Der Rangsatz

Satz (10.15)

Für jede Matrix $A \in \mathscr{M}_{m \times n,K}$ gilt $\mathrm{zr}(A) = \mathrm{sr}(A)$. Wir bezeichnen die Zahl $\mathrm{zr}(A)$ deshalb einfach als den Rang $\mathrm{rg}(A)$ der Matrix.

Dimension des Lösungsraums eines LGS

Den Kern der linearen Abbildung $\phi_A : K^n \to K^m$, $v \mapsto Av$ nennt man auch den Kern der Matrix A und bezeichnet ihn mit $\ker(A)$.

Satz (10.16)

Sei $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$ und $\mathscr{L} \subseteq K^n$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = 0_{K^m}$. Dann gilt $\dim \mathscr{L} = n - \mathrm{rg}(A)$.

Ist A eine Matrix in Zeilenstufenform mit Kennzahlen r und $j_1, ..., j_r$, und ist $S = \{1, ..., n\} \setminus \{j_1, ..., j_r\}$, dann gilt also $\dim \mathscr{L} = n - r = |S|$.

$\Rightarrow \varphi$ injektiv „(iii) $\Rightarrow$ (i)" offensichtlich $\square$

Beweis von Satz 10.16:

geg. $A \in M_{m \times n, K}$ (wobei $m, n \in \mathbb{N}$, K Körper)

Betrachte die lineare Abb. $\phi_A : K^n \to K^m$, $v \mapsto Av$.

Dimensionssatz über lineare Abb. $\Rightarrow$

$$n = \dim K^n = \dim \ker(\phi_A) + \dim \operatorname{im}(\phi_A)$$

bekannt: $\ker(\phi_A) = \mathcal{L}$, $\operatorname{im}(\phi_A) = SR(A) \Rightarrow$

$$\dim \operatorname{im}(\phi_A) = \dim SR(A) = rg(A)$$

einsetzen $\Rightarrow n = \dim \mathcal{L} + rg(A) \Rightarrow$

$$\dim \mathcal{L} = n - rg(A)$$

$\square$

Weitere Folgerung aus dem Dimensionssatz

Erinnerung:

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung zwischen gleichmächtigen endlichen Mengen A, B. Dann gilt

$$f \text{ injektiv} \;\Leftrightarrow\; f \text{ surjektiv} \;\Leftrightarrow\; f \text{ bijektiv.}$$

Satz (10.17)

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V, W derselben Dimension n. Dann sind äquivalent

(i) Die Abbildung ϕ ist injektiv.

(ii) Sie ist surjektiv.

(iii) Sie ist bijektiv.

Beweis von Satz 10.17.

geg.: K-Vektorräume V, W, $n = \dim V = \dim W$

$\phi: V \to W$ lineare Abbildung. Dimensionssatz $\Rightarrow$

$n = \dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi)$

„(i) $\Rightarrow$ (ii)“ ϕ injektiv $\Rightarrow \ker(\phi) = \{0_V\} \Rightarrow \dim \ker(\phi) = 0$

$\overset{\text{Dim-satz}}{\Longrightarrow} \dim V = n = 0 + \dim \operatorname{im}(\phi) = \operatorname{im}(\phi) \Rightarrow \dim W = \dim \operatorname{im}(\phi)$

$\operatorname{im}(\phi) \subseteq W$, $\dim \operatorname{im}(\phi) = \dim W \Rightarrow \operatorname{im}(\phi) = W \Rightarrow \phi$ ist surjektiv

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)“ Vor.: ϕ surjektiv noch z.zg. ϕ ist injektiv (dann ist ϕ insg. bijektiv) ϕ surjektiv $\Rightarrow \dim \operatorname{im}(\phi) = \dim W = n$

$\overset{\text{Dim-satz}}{\Longrightarrow} n = \dim \ker(\phi) + n \Rightarrow \dim \ker(\phi) = 0 \Rightarrow \ker(\phi) = \{0_V\}$

$\Rightarrow \phi$ injektiv „(iii) $\Rightarrow$ (i)“ offensichtlich $\square$

Berechnung des Durchschnitts zweier Untervektorräume

Proposition (10.18)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien U und W Untervektorräume mit $r = \dim U$ und $s = \dim W$. Es sei $\{u_1, ..., u_r\}$ eine Basis von U und $\{w_1, ..., w_s\}$ eine Basis von W. Weiter definieren wir die Teilmenge $\mathscr{L} \subseteq K^{r+s}$ durch

$$\mathscr{L} = \left\{ (\lambda_1, ..., \lambda_r, \mu_1, ..., \mu_s) \mid \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j w_j = 0_V \right\}.$$

Dann gilt

$$U \cap W =$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i \mid \lambda_1, ..., \lambda_r \in K, \exists\, \mu_1, ..., \mu_s \text{ mit } (\lambda_1, ..., \lambda_r, \mu_1, ..., \mu_s) \in \mathscr{L} \right\}.$$

Verfahren zur Berechnung von $U \cap W$

Sei $V = K^m$, und seien U, W, r, s sowie die Vektoren u_i und w_j wie in der Proposition definiert.

- Trage die Vektoren $u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s$ als Spalten in eine Matrix $A \in \mathscr{M}_{m\times(r+s),K}$ ein.
- Wende das Gaußsche Eliminationsverfahren an, um A in eine Matrix $A' = (a'_{ij}) \in \mathscr{M}_{m\times(r+s),K}$ in normierter Zeilenstufenform umzuwandeln.
- Seien $b_1, ..., b_\ell \in K^{r+s}$ die Basisvektoren von $\mathscr{L}$. Setze $v_k = \sum_{i=1}^r b_{ki} u_i$ für $1 \le k \le \ell$. Dann ist $\{v_1, ..., v_\ell\}$ eine Basis von $U \cap W$.

Beispiel: Berechnung des Durchschnitts zweier Untervektorräume $U, W \subseteq \mathbb{R}^4$

Sei $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle_{\mathbb{R}}$, $W = \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},\quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Berechnung von $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -12/7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -16/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 37/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -11/7 \end{pmatrix}$$

Die letzte Spalte liefert den einzigen Basisvektor von $\mathcal{L}$ $\Rightarrow \mathcal{L} = \left\langle \left(\frac{12}{7}, \frac{16}{7}, -\frac{37}{7}, \frac{11}{7}, 1 \right) \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -11/7 \end{pmatrix}$$

Die letzte Spalte liefert den einzigen Basis-

$= \langle (12, 16, -37, 11, 7) \rangle_{\mathbb{R}}$ Nach Prop. 10.1.8

wird $U \cap W$ von einem einzigen Vektor aufgespannt,

nämlich $12u_1 + 16u_2 - 37u_3 = \begin{pmatrix} -25 \\ -29 \\ 7 \\ -48 \end{pmatrix}$. also:

$U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} -25 \\ -29 \\ 7 \\ 48 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$, insb. $\dim U \cap W = 1$.

Eindeutige Darstellbarkeit als Linearkombination

Lemma (11.1)

Sei V ein K-Vektorraum, $(v_1, ..., v_n)$ ein linear unabhängiges Tupel von Vektoren aus V und $U = \langle v_1, ..., v_n \rangle_K$. Dann besitzt jeder Vektor $v \in U$ genau eine Darstellung der Form $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$.

Beweis von Lemma 11.1:

Die Existenz folgt direkt aus der Definition von $\langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$.

zur Eindeutigkeit: Sei $v \in U$. Ang. es gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j + \sum_{j=1}^{n} (-\mu_j) v_j$$

$$= 0_V \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \mu_j) v_j = 0_V \quad \underset{\text{linear unabh.}}{\overset{(v_1, \dots, v_n)}{\Longrightarrow}}$$

$$\lambda_j - \mu_j = 0_V \text{ für } 1 \leq j \leq n \Longrightarrow \lambda_j = \mu_j \text{ für } 1 \leq j \leq n \qquad \square$$

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Abbildungen

Satz (11.2)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, V ein endlich erzeugter und W ein beliebiger K-Vektorraum. Außerdem sei $(v_1, ..., v_n)$ ein Tupel von Vektoren aus V und $(w_1, ..., w_n)$ ein Tupel von Vektoren aus W.

(i) Ist $(v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig, dann existiert eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ mit $\phi(v_j) = w_j$ für $1 \leq j \leq n$.

(ii) Gilt $V = \langle v_1, ..., v_n \rangle_K$, dann existiert höchstens eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ mit $\phi(v_j) = w_j$ für $1 \leq j \leq n$.

(iii) Ist $(v_1, ..., v_n)$ eine geordnete Basis von V, dann gibt es genau eine lineare Abbildung mit dieser Eigenschaft.

Beweis von Satz 11.2

zu (i) Basisergänzungssatz $\Rightarrow$ können das Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ durch weitere Vektoren $v_{n+1}, \dots, v_m$ zu einer Basis von V ergänzen. (Dann ist $m = \dim V$.) Definition von $\phi : V \to W$:

Ist $v \in V$ beliebig vorgeg., dann existieren nach Lemma 11.1 eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ mit $v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j$.

Definiere dann $\phi(v) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j$. zu überprüfen:

(1) $\phi(v_j) = w_j$ für $1 \leq j \leq n$. (2) ϕ ist lineare Abb.

zu (1) Sei $j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow v_j = \sum_{i=1}^{m} \delta_{ij} v_i$ Nach Def. von ϕ gilt dann $\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \delta_{ij} w_i = \delta_{jj} w_j = w_j$.

zu (2) Seien $v, v' \in V$, $\mu \in K$. Zu überprüfen:

$$\phi(v+v') = \phi(v) + \phi(v'), \quad \phi(\mu v) = \mu \phi(v)$$

$v, v' \in V \Rightarrow \exists$ eind. best. $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_1', \dots, \lambda_m'$ $\in K$ mit $v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j$, $v' = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j' v_j$

Nach Def. von ϕ gilt $\phi(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j$ und $\phi(v') = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j' w_j$.

Es gilt $v + v' = \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j + \lambda_j') v_j \Longrightarrow$

$$\phi(v+v') = \sum (\lambda_j + \lambda_j') w_j = \sum \lambda_j w_j +$$

$$\phi(v+v') = \sum (\lambda_j + \lambda_j') w_j = \sum \lambda_j w_j +$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j' = \phi(v) + \phi(v')$$

ebenso: $\mu v = \sum_{j=1}^{m} \mu \lambda_j v_j \Rightarrow \phi(\mu v) =$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu \lambda_j w_j = \mu \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j = \mu \phi(v)$$

Bsp.: $V = W = \mathbb{R}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \ldots \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ \ldots \end{pmatrix}$

Beweis von Satz 11.2, Teil (ii)

Ang., ϕ und ψ sind beides Abb. $V \to W$ mit $\phi(v_j) = w_j$, $\psi(v_j) = w_j$, jeweils für $1 \leq j \leq n$. z.zg: $\phi = \psi$

Sei $v \in V$. zu überprüfen: $\phi(v) = \psi(v)$ $\quad V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K$

$\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \Rightarrow \phi(v) =$

$$\phi\Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\Big) \underset{\phi \text{ linear}}{=} \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(v_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j w_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j \psi(v_j)$$

$$= \psi\Big(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j\Big) = \psi(v)$$

$\Box$

__Bem.__ Ist das Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ __nicht__ linear unabhängig, dann ist die Existenz einer lin. Abb. $\phi: V \to W$ mit $\phi(v_j) = w_j$ für $1 \le j \le n$ __nicht__ gewährleistet.

__Bsp.__ $V = W = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Dann existiert keine lineare Abb. $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\phi(v_j) = w_j$ für $j = 1, 2, 3$ denn: Ang. ϕ ist eine solche Abb. Dann gilt $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = w_3 = \phi(v_3) = \phi(v_1 + v_2)$
$= \phi(v_1) + \phi(v_2) = w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ ↯ da $8 \neq 7$

Definition der Koordinatenabbildungen

Folgerung (11.3)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathscr{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine geordnete Basis von V. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\Phi_{\mathscr{B}} : V \to K^n$$

mit $\Phi_{\mathscr{B}}(v_j) = e_j$ für $1 \leq j \leq n$ (wobei e_j jeweils den j-ten Einheitsvektor bezeichnet). Wir nennen sie die Koordinatenabbildung zur geordneten Basis $\mathscr{B}$. Es handelt sich dabei um einen Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Notation: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden Körper K bezeichnet $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ die Einheitsbasis des K^n bestehend aus den Einheitsvektoren e_j.

Beispiele für Koordinatendarstellungen:

(i) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, Basis $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ Es gilt $\Phi_{\mathcal{E}}(e_1) = e_1$, $\Phi_{\mathcal{E}}(e_2) = e_2$, $\phi(e_3) = e_3$

$v = 1 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 5 \cdot e_3$, $\Phi_{\mathcal{E}}$ lineare Abb. $\rightarrow$

$\Phi_{\mathcal{E}}(v) = 1 \cdot \Phi_{\mathcal{E}}(e_1) + 3 \, \Phi_{\mathcal{E}}(e_2) + 5 \cdot \Phi_{\mathcal{E}}(e_3) =$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ Es gilt $\Phi_{\mathcal{E}}(e_1) = e_1$, $\Phi_{\mathcal{E}}(e_2) = e_2$, $\phi(e_3) = e_3$

$v = 1 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 5 \cdot e_3$, $\Phi_{\mathcal{E}}$ lineare Abb. $\rightarrow$

$1 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 5 e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

allgemeines Verfahren zur Bestimmung von $\Phi_{\mathcal{B}}(v)$:

Stelle v als Linearkombination $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$ dar. Dann

$$\Phi_{\mathcal{B}}(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Phi_{\mathcal{B}}(v_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

iii) $k = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Phi_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = ?$ $\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-5)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5/3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \Phi_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5/3 \end{pmatrix}$

(iii) $K = \mathbb{R}$, $V = M_{2,\mathbb{R}}$, $\mathcal{B} = (B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22})$

(Basismatrizen), $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in V$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_{11}} + 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_{12}} + 3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B_{21}} + 4 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B_{22}}$$

$$\Rightarrow \Phi_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(iv) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$ (als $\mathbb{C}$-Vektorraum),

$\mathcal{B} = (e_2, ie_1)$, $v = \begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix} \in V$

$$\begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1-2i) \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1-2i \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = (e_2, ie_1 \ldots), \; v = \begin{pmatrix} \ldots \\ 5 \end{pmatrix} \in V$

(v) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum)

$\mathcal{B} = (e_1, ie_1, e_2, ie_2), \; v = \begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix} \in V$

$$\begin{pmatrix} 2-i \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$