Der Dimensionssatz für lineare Abbildungen

Satz (10.8)

Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K, und sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\dim V \quad = \quad \dim \ker(\phi) + \dim \mathrm{im}(\phi).$$

Bedeutung der Spalten einer Matrix

Proposition (10.10)

Sei $A = (a_{ij})$ eine $(m \times n)$-Matrix über K und $\phi_A : K^n \to K^m$ die lineare Abbildung gegeben durch $v \mapsto Av$. Dann gilt

(i) Für $1 \leq k \leq n$ gilt $\phi_A(e_k) = a_{\bullet k}$. Die Bilder der Einheitsvektoren sind also genau die Spalten der Matrix.

(ii) Es gilt $\mathrm{im}(\phi_A) = \langle a_{\bullet 1}, ..., a_{\bullet n} \rangle_K$.

Bsp. zu Prop. 10.10 (i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Bild von e_2 = zweite Spalte der Matrix

Beweis von Prop 10.10

zu (i) geg.: $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}, K$, $e_k \in K^n$ k-ter Einheitsvektor (Einträge: $(e_k)_i = \delta_{ki}$ für $1 \le i \le m$)

z.zg.: $A e_k = a_{\bullet k}$, äquivalent: $(A e_k)_i = a_{ik}$ für $1 \le i \le n$. Sei $i \in \{1, \dots, m\}$. Nach Def des Matrix-Vektor-Produkts ist die i-te Komponente

von Ae_k geg. durch $(Ae_k)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{kj}$
$= a_{ik} \cdot \delta_{kk} = a_{ik}$

<u>zu (ii)</u> Beh.: $\operatorname{im}(\phi_A) = \langle a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n} \rangle_K$

„$\supseteq$" bekannt: $\operatorname{im}(\phi_A)$ ist Untervektorraum von K^m
Deshalb genügt es z.zg.: $a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n} \in \operatorname{im}(\phi_A)$
Teil (i) $\Rightarrow a_{\bullet k} = \phi_A(e_k)$ für $1 \leq k \leq n \Rightarrow a_{\bullet k} \in \operatorname{im}(\phi_A)$
für $1 \leq k \leq n$
„$\subseteq$" Sei $w \in \operatorname{im}(\phi_A) \Rightarrow \exists v \in K^n$ mit $\phi_A(v) = w$
$v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j \Rightarrow \phi_A(v) = \phi_A\left(\sum_{j=1}^{n} v_j e_j\right) \overset{\phi_A \text{ linear}}{=} \sum_{j=1}^{n} v_j \phi_A(e_j)$
$\overset{(i)}{=} \sum_{j=1}^{n} v_j a_{\bullet j} \Rightarrow \phi_A(v) \in \langle a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n} \rangle_K$ $\square$

Spalten- und Zeilenraum einer Matrix

Definition (10.11)

Sei A eine $(m \times n)$-Matrix über K.

(i) Der Untervektorraum $\mathrm{im}(\phi_A) = \langle a_{\bullet 1}, ..., a_{\bullet n} \rangle_K$ von K^m wird der Spaltenraum der Matrix A genannt und von uns mit $\mathrm{SR}(A)$ bezeichnet. Die Dimension $\mathrm{sr}(A) = \dim \mathrm{SR}(A)$ nennt man den Spaltenrang von A.

(ii) Ebenso nennt man den Untervektorraum von K^n gegeben durch $\langle a_{1\bullet}, ..., a_{m\bullet} \rangle$ den Zeilenraum von A und bezeichnet ihn mit $\mathrm{ZR}(A)$. Die Dimension $\mathrm{zr}(A) = \dim \mathrm{ZR}(A)$ wird Zeilenrang von A genannt.

Beispiel für den Zeilen- bzw. Spaltenrang einer Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3,\, \mathbb{R}}$$

Zeilenraum $ZR(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} =$

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Das System $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ kein skalares Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist $\Rightarrow$ Zeilenrang -

von A ist $\mathrm{zr}(A) = \dim \mathrm{ZR}(A) = 2$

Spaltenraum $\mathrm{SR}(A) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

Es gilt $\mathrm{sr}(A) = \dim \mathrm{SR}(A) = 2$, denn $\left\{ \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig und $\left\langle \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ ist somit bereits ein 2-dim Untervektorraum von $\mathrm{SR}(A)$ $\longrightarrow$ $\dim \mathrm{SR}(A) \geq 2$. Aus $\mathrm{SR}(A) \subseteq \mathbb{R}^2$ folgt andererseits $\dim \mathrm{SR}(A) \leq 2$.

$\longrightarrow \mathrm{zr}(A) = \mathrm{sr}(A)$

Zusammenhang mit der Kennzahlen einer normierten ZSF

Proposition (10.12)

Sei $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$ eine Matrix in normierter Zeilenstufenform, mit r und $j_1, ..., j_r$ als Kennzahlen. Dann ist r der Zeilenrang von A im Sinne von Definition 10.11.

Beweis von Prop. 10.12:

geg.: $A \in M_{m\times n, K}$ in normierter ZSF mit Kennzahlen $r, j_1, \dots, j_r$ <u>Beh.</u>: $r = zr(A)$

Die Matrix A besitzt genau r Zeilen ungleich null, nämlich die ersten r Zeilen. $\Rightarrow$ Der Zeilenraum wird bereits von diesen Zeilen aufgespannt.

$\Rightarrow ZR(A) = \langle a_{1\bullet}, \dots, a_{r\bullet} \rangle \Rightarrow zr(A) = \dim ZR(A) \leq r$

Darüber hinaus sind die Zeilen $a_{i\bullet}$ $(1 \leq i \leq r)$ linear unabh. (so dass also sogar $\dim ZR(A) = r$ gilt), denn: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_{i\bullet} = 0_{K^n} \quad \text{komponentenweise}$$

g

abhän-

ses

rang-

gilt also $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_{ij} = 0_K$ für $1 \leq j \leq n$.

insbesondere: $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_{ij_k} = 0_K$ für $1 \leq k \leq r$

In der j_k-ten Spalte von A gibt es nur einen Eintrag ungleich null, nämlich $a_{kj_k} = 1_K$.

$\Rightarrow \lambda_k a_{kj_k} = 0_K,\ 1 \leq k \leq r \Rightarrow \lambda_k = 0_K$ für $1 \leq k \leq r$.

$\square$

Hilfsaussage zum Beweis des Rangsatzes

Proposition (10.14)

Sei $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$ und $i \in \{1, ..., m\}$ eine Zeilennummer mit der Eigenschaft, dass die i-te Zeile von A eine Linearkombination der übrigen $m-1$ Zeilen ist. Entsteht nun die Matrix $\bar{A} \in \mathscr{M}_{(m-1)\times n,K}$ aus A durch Streichung der i-ten Zeile, dann gilt $\mathrm{ZR}(\bar{A}) = \mathrm{ZR}(A)$, also insbesondere $\mathrm{zr}(\bar{A}) = \mathrm{zr}(A)$, und ebenso $\mathrm{sr}(\bar{A}) = \mathrm{sr}(A)$.

Beweis von Prop 10.14

Vor: $A \in M_{m\times n, K}$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Vor.:

Die Zeile $a_{i\cdot}$ ist Linearkombination der übrigen Zeilen,

d.h. es gibt $\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_m$ mit

$$a_{i\cdot} = \sum_{k=1}^{i-1} \mu_k a_{k\cdot} + \sum_{k=i+1}^{m} \mu_k a_{k\cdot} \text{ im } K^n \quad (*)$$

$\bar{A} \in M_{(m-1)\times n, K}$ = Matrix, die durch Streichung der i-ten Zeile von A entsteht

Beh.: (i) $zr(A) = zr(\bar{A})$ (ii) $sr(A) = sr(\bar{A})$

$$a_{i\bullet} = \sum_{k=1} \mu_k a_{k\bullet} + \sum_{k=i+1} \mu_k a_{k\bullet}$$

$\bar{A} \in M_{(m-1)\times n, K}$ = Matrix, die durch Streichung der

zu li) zeige: Es gilt $ZR(A) = ZR(\bar{A})$. Daraus folgt

$$zr(A) = \dim ZR(A) = \dim ZR(\bar{A}) = zr(\bar{A}).$$

Nach Def. des Zeilenraums ist also z.zg.:

$$\langle a_{1\bullet}, a_{2\bullet}, \dots, a_{m\bullet} \rangle_K = \langle a_{1\bullet}, \dots, \widehat{a_{i\bullet}}, \dots, a_{m\bullet} \rangle$$

↑ i-te Zeile fehlt

„$\supseteq$" offensichtlich „$\subseteq$" Auf der rechten Seite steht ein Untervektorraum $\Rightarrow$ genügt z.zg.: $a_{k\bullet} \in \langle a_{1\bullet}, \dots, \widehat{a_{i\bullet}}, \dots, a_{m\bullet} \rangle$ für $1 \leq k \leq m$. Für $k \neq i$ ist das offensichtlich der Fall, und für $k = i$ folgt es aus der Voraussetzung zu (ii) Idee: Wende den Dimensionssatz für lineare Abb. auf eine geeignete lineare Abb. $\phi : SR(A) \to SR(\bar{A})$ an.

Betrachte die Abb. $\pi : K^m \to K^{m-1}$,

$$(v_1, \dots, v_m) \mapsto (v_1, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_m).$$

Die Anwendung von π auf die Spalten von A liefert genau die Spalten von $\bar{A}$.

Setze $\phi = \pi|_{SR(A)} : SR(A) \to K^{m-1}$

Beh.: $\operatorname{im}(\phi) = SR(\bar{A})$ (und somit kann ϕ als surjektive Abb. $SR(A) \to SR(\bar{A})$

B

Be

W

Es g

ein W

Wegen

prüfen

in W

betrachtet werden

„$\subseteq$" Sei $w \in \mathrm{im}(\phi)$. $\Rightarrow \exists\, v \in SR(A)$ mit $w = \phi(v)$. $v \in SR(A) \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{\cdot j} \underset{\phi \text{ linear}}{\Rightarrow} \phi(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \phi(a_{\cdot j})$$

$\Rightarrow w = \phi(v) \in SR(\bar{A})$, da die Vektoren $\phi(a_{\cdot j})$ $(1 \le j \le n)$ genau die Spalten von $\bar{A}$ sind.

„$\supseteq$" Sei $w \in SR(\bar{A})$. $\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \phi(a_{\cdot j}) = \phi\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{\cdot j}}_{\in SR(A)}\Big) \in \mathrm{im}(\phi)$$

...e für
...are
...-1
...,
...ten von
$\bar{A}$.
K^{m-1}
...somit
$= SR(\bar{A})$

<u>Beh.</u> $\ker(\Phi) = \{0_{K^m}\}$.

Betrachte die folgende Teilmenge vom K^m:

$$W = \left\{ c \in K^m \;\middle|\; c_i = \sum_{k=1}^{i-1} \mu_k c_k + \sum_{k=i+1}^{m} \mu_k c_k \right\}$$

Es gilt $SR(A) \subseteq W$, denn: Offenbar ist W ein Untervektorraum vom K^m (leicht zu überprüfen). Wegen $SR(A) = \langle a_{\bullet 1}, \ldots, a_{\bullet n} \rangle$ genügt es zu überprüfen, dass die Spalten $a_{\bullet j}$ $(1 \leq j \leq n)$ alle in W liegen, d.h. z.zg. ist

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} \mu_k c_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} \mu_k c_{kj} \quad \text{für } 1 \leq j \leq n$$

Diese Gleichungen erhält man, indem man in (*) jeweils die j-te Komponente betrachtet.

($\Rightarrow SR(A) \subseteq W$ gezeigt) zum Nachweis der Beh.: genügt z. zg.: $\ker(\phi) \subseteq \{0_{K^m}\}$. Sei also $v \in \ker(\phi)$.

$v \in SR(A)$, $SR(A) \subseteq W \Rightarrow v \in W \Rightarrow$

$$v_i = \sum_{k=1}^{i-1} \mu_k v_k + \sum_{k=i+1}^{m} \mu_k v_k \quad (**)$$

$v \in \ker(\phi) \Rightarrow \phi(v) = 0_{K^{m-1}} \Rightarrow (v_1, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_m) = (0_K, \ldots, 0_K) \Rightarrow v_k = 0_K$ für $1 \leq k \leq m$, $k \neq i$

Einsetzen in (**) $\Rightarrow v_i = \sum_{k=1}^{i-1} \mu_k \cdot 0_K + \sum_{k=i+1}^{m} \mu_k \cdot 0_K = 0_K$. Insgesamt ist also $v = 0_{K^m}$. ($\Rightarrow$ Beh.)

Dimensionssatz für lineare Abl. $\Rightarrow \dim SR(A) =$

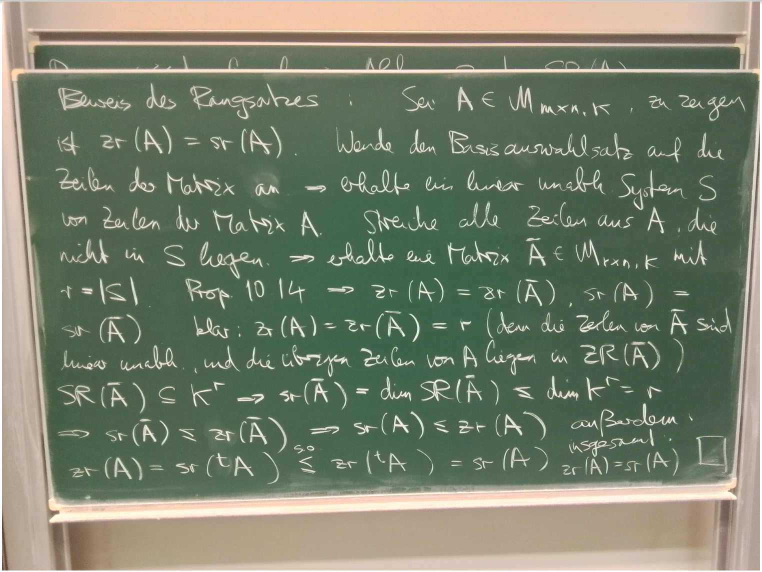
$= \dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi) = \dim \{0_{K^m}\} + \dim SR(\bar{A})$

$= \dim SR(\bar{A}) \Rightarrow sr(A) = sr(\bar{A})$. $\square$

Der Rangsatz

Satz (10.15)

Für jede Matrix $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$ gilt $\mathrm{zr}(A) = \mathrm{sr}(A)$. Wir bezeichnen die Zahl $\mathrm{zr}(A)$ deshalb einfach als den Rang $\mathrm{rg}(A)$ der Matrix.



Das „siehe oben“ (s.o.) in der letzen Zeile soll bedeuten: Die bisherige Argumentation liefert $\mathrm{sr}(A) \leq \mathrm{zr}(A)$ für jede Matrix A. Also gilt die Ungleichung auch für ${}^{\mathrm{t}}A$ an Stelle von A. ,