# Definition der Basen eines $K$-Vektorraums

**Definition (9.1)**

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt Basis von $V$, wenn sie linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von $V$ ist. Ein Tupel $(v_1, ..., v_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, bestehend aus Vektoren $v_i \in V$, wird geordnete Basis genannt, wenn $\{v_1, ..., v_n\}$ aus $n$ verschiedenen Elementen besteht und eine Basis von $V$ bildet.

# Äquivalente Charakterisierungen des Basisbegriffs

**Satz (9.2)**

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Für eine Teilmenge $B \subseteq V$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Sie ist eine Basis von $V$.

(ii) Sie ist ein minimales Erzeugendensystem von $V$.

(iii) Sie ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $V$.

# Das Austauschlemma

Ein $K$-Vektorraum $V$ wird als endlich erzeugt bezeichnet, wenn eine endliche Teilmenge $S \subseteq V$ mit $V = \langle S \rangle_K$ existiert.

Ziel: Je zwei Basen eines endlich erzeugten $K$-Vektorraums haben gleich viele Elemente.

**Lemma (9.3)**

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum, $S \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge und $E \subseteq V$ ein Erzeugendensystem von $V$. Dann gibt es für jeden Vektor $v \in S \setminus E$ ein $w \in E \setminus S$, so dass auch $(S \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $V$ ist.

Beweis von Lemma 8.3:

geg: $V$ $K$-Vektorraum, $S \subseteq V$ lin. unabh., $E \subseteq V$ mit $\langle E \rangle_K = V$

Sei $v \in S \setminus E$, ang. es gibt kein „passendes" $w$, d.h. die Menge $(S \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ ist stets linear abhängig

$\underset{\text{Satz 8.9 (iii)}}{\Longrightarrow}$ $w \in \langle S \setminus \{v\} \rangle_K \quad \forall w \in E \setminus S$

$\Rightarrow E \setminus S \subseteq \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$, außerdem: $S \setminus \{v\} \subseteq \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$

$\Rightarrow (E \setminus S) \cup (S \setminus \{v\}) = E \setminus \{v\} \subseteq \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$

$v \notin E \Rightarrow E \setminus \{v\} = E \Rightarrow E \subseteq \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$

$\Rightarrow (E \setminus S) \cup (S \setminus \{v\}) = E \setminus \{v\} \subseteq \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$

$v \notin E \Rightarrow E \setminus \{v\} = E \Rightarrow E \subseteq \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$

$\langle S \setminus \{v\} \rangle_K$ ist Untervektorraum $\Rightarrow \langle E \rangle_K \subseteq \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$

$\Rightarrow V = \langle S \setminus \{v\} \rangle_K \overset{v \in V}{\Longrightarrow} v \in \langle S \setminus \{v\} \rangle_K \underset{\text{Satz 8.9}}{\Longrightarrow}$

$S$ ist linear abh. $\lightning$

$\square$

# Der Austauschsatz

**Satz (9.4)**

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum, $S \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge und $E \subseteq V$ ein Erzeugendensystem. Dann gibt es für jede endliche Teilmenge $T \subseteq S$ eine Teilmenge $F \subseteq E$ mit der Eigenschaft, dass $|F| = |T|$ gilt und auch $(S \setminus T) \cup F$ linear unabhängig ist.

Beweis von Satz 9.4:

1. Schritt: Zeige durch vollst. Ind. über $n \in \mathbb{N}_0$:

Ist $T \subseteq S \setminus E$ mit $|T| = n$, dann gibt es eine Teilmenge $F \subseteq E \setminus S$, so dass $(S \setminus T) \cup F$ lin. unabh. ist, wobei $|F| = n$

Ind-Anf.: $n = 0$. Dann ist $T = \emptyset$.

setze $F = \emptyset$. $\Rightarrow |T| = 0 = |F|$, $(S \setminus \emptyset) \cup \emptyset = S$ ist linear unabhängig

Indschritt $n \to n+1$: Sei $T \subseteq S \setminus E$ mit $|T| = n+1$.

Sei $v \in T$ und $T' = T \setminus \{v\}$ $\Rightarrow |T'| = n$, $T' \subseteq S \setminus E$

Ind-V. $\Rightarrow \exists F' \subseteq E \setminus S$ mit $|F'| = n = |T'|$, wobei $S' = (S \setminus T') \cup F'$ linear unabhängig ist

Es gilt $v \in S' \setminus E$, denn: $v \in S$, $v \notin T' \Rightarrow v \in S \setminus T' \Rightarrow v \in (S \setminus T') \cup F'$. außerdem: $v \notin E$

Austauschlemma 9.3 $\Rightarrow \exists\, w \in E \setminus S'$, so dass $(S' \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ linear unabhängig ist

Setze $F = F' \cup \{w\}$. zu überprüfen:

(1) $|F| = n+1$ (2) $F \subseteq E \setminus S$ (3) $(S \setminus T) \cup F$ ist linear unabh.

(*) denn: $v \in T$, $T \subseteq S \setminus E$ nach Vor.

zu (1) Es reicht zu überprüfen, dass $w \notin F'$ gilt.

Ang. $w \in F' \Rightarrow w \in S'$ ↯ zu $w \in E \setminus S'$

$F'$

$T) \cup F$

$\square$

dass

ist

<u>zu (2)</u> bereits bekannt: $F' \subseteq E \setminus S$, außerdem:

$F = F' \cup \{w\}$, z.zg.: $w \in E \setminus S$ s.o. $\Rightarrow$

$w \in E \setminus S' \Rightarrow w \in E$, noch z.zg.: $w \notin S$

Ang. $w \in S$, $w \notin S' \underset{\text{Def. von } S'}{\Rightarrow} w \in T'$, $T' \subseteq T \subseteq S \setminus E$

$\Rightarrow w \notin E$ ↯

<u>zu (3)</u> Es gilt $(S \setminus T) \cup F = ((S \setminus T') \setminus \{v\}) \cup F$

$= ((S \setminus T') \setminus \{v\}) \cup F' \cup \{w\} \overset{!}{=}$

$((S \setminus T') \cup F') \setminus \{v\} \cup \{w\} = (S' \setminus \{v\}) \cup \{w\}$

Das „=" bei (!) gilt, weil $v \notin F'$ ist (denn:
$F' \subseteq E \setminus S$, $v \in S \setminus E$, insb. $v \notin E$)

Zeige nun die eigentliche Aussage:

Sei $T \subseteq S$ eine endl. Teilmenge

z.zg.: $\exists F \subseteq E$ mit $|F| = |T|$
und $(S \setminus T) \cup F$ linear unabh.

Setze $T' = T \setminus E$. Dann gilt
$T = T' \cup (T \cap E)$. Wende die
bereits bewiesene Aussage auf
$T'$ an ($T' \subseteq S \setminus E$) $\Rightarrow \exists F' \subseteq$
$E \setminus S$ mit $|F'| = |T'|$, so dass
$(S \setminus T') \cup F'$ linear unabh. ist

Z

F

$w \in$

Ang

$\Rightarrow w$

Zu (3)

$= (S$

$((S \setminus T$

Das „=" 

$F' \subseteq$

Setze $F = F' \cup (T \cap E)$

$F' \cap (T \cap E) = \emptyset$ (da $F' \subseteq E \setminus S$ und $T \cap E \subseteq S$) $\Rightarrow$

$|F| = |F'| + |T \cap E| =$

$|T'| + |T \cap E| = |T|$

außerdem: $(S \setminus T) \cup F =$

$(S \setminus T') \setminus (T \cap E) \cup (T \cap E) \cup F'$

$= (S \setminus T') \cup F' \Rightarrow (S \setminus T) \cup F$

ist linear unabhängig. $\square$

# Hinreichendes Kriterium für eine Basis

**Proposition (9.5)**

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum, $E$ ein Erzeugendensystem von $V$ und $B \subseteq E$ eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $E$. Dann ist $B$ eine Basis von $V$.

Beweis von Prop 9.5

geg: $V$ $K$-Vektorraum, $E$ Erz.-system, $B \subseteq E$ max. linear unabh. Teilmenge <u>von $E$</u> Beh: $B$ ist Basis von $V$

Maximalität $\Rightarrow$ $B \cup \{v\}$ ist linear abhängig $\forall v \in E \setminus B$

Satz 8.9 $\Rightarrow$ $v \in \langle B \rangle_K \; \forall v \in E \setminus B$

$\Rightarrow E \setminus B \subseteq \langle B \rangle_K \xRightarrow{B \subseteq \langle B \rangle_K} E \subseteq \langle B \rangle_K \xRightarrow[\text{Untervektorraum}]{\langle B \rangle_K \text{ ist}}$

$\Rightarrow \langle E \rangle_K \subseteq \langle B \rangle_K \xRightarrow[E \text{ Erz.-system}]{} V \subseteq \langle B \rangle_K \Rightarrow V = \langle B \rangle_K$

also: $B$ ist lin. unabh. <u>und</u> Erz.-system von $V$

$\Rightarrow$ $B$ ist Basis von $V$ $\square$

# Gleichmächtigkeit von Basen

**Satz (9.6)**

Sei $V$ ein endlich erzeugter $K$-Vektorraum.

(i) In $V$ existiert eine endliche Basis $B$.

(ii) Für jede Basis $B'$ von $V$ gilt $|B'| = |B|$, insbesondere ist jede Basis endlich.

(iii) Ist $S \subseteq V$ linear unabhängig und $E \supseteq S$ ein Erzeugendensystem von $V$, dann gibt es eine Basis $B'$ mit $S \subseteq B' \subseteq E$.

Beweis von Satz 9.6

geg: $K$-Vektorraum $V$, $E_0 \subseteq V$ endlich mit $V = \langle E_0 \rangle_K$.

zu ii) $E_0$ ist endl. $\Rightarrow$ $\exists$ maximale linear unabh. Teilmenge $B \subseteq E_0$. Prop. 9.5 $\Rightarrow$ Dies ist eine Basis von $V$, endlich wg. $B \subseteq E_0$.

zu iii) geg: endliche Basis $B$, $B'$ beliebige Basis

zeige zunächst: $|B'| \geq |B|$. $B'$ ist Erz.-system, $B$ endl. lin. unabh. Teilmenge von $V$. Austausch-satz $\Rightarrow$ $\exists\, F \subseteq B'$ mit $|F| = |B|$ und

$(B \setminus B) \cup F = F$ ist lin. unabh.

$F \subseteq B' \Rightarrow |F| \leq |B'| \Rightarrow |B| \leq |B'|$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad |F| = |B|$

Zeige nun, dass $B'$ endlich ist.

$|B'| \geq |B| \Rightarrow \exists\, T \subseteq B'$ mit $|T| = |B|$

$B'$ ist linear unabh. (als Basis) Austauschsatz $\Rightarrow$

$\exists\, F \subseteq B$, so dass $|F| = |T| = |B|$ gilt und

$(B' \setminus T) \cup F$ linear unabh. ist

$F \subseteq B$ und $|F| = |B| \Rightarrow F = B$

$\Rightarrow (B' \setminus T) \cup B$ ist linear unabh.

Da $B$ als Basis eine max. linear unabh. Teilmenge ist, muss $B' \setminus T \subseteq B$ gelten $\Rightarrow$

$|B'| = |T| + |B' \setminus T| \leq |T| + |B|$

$= |B| + |B| < +\infty \Rightarrow B'$ ist endlich

Wende nun die bereits bewiesene Aussage $|B| \leq |B'|$ an auf $B'$ und $B$ mit vertauschten Rollen.

$\Rightarrow |B| \geq |B'|$, insg. $|B| = |B'|$

h

$B| \le |B'|$

ollen.

<u>zu (iii)</u> <u>Beh.</u>: Für jede lin. unabh. Teilmenge $T$ mit $S \subseteq T \subseteq E$ gilt $|T| \le n$, insb. ist $T$ endlich, wobei $n = |B|$.

Sei zunächst $T \subseteq E$ eine <u>endl.</u> lin. unabh. Teilmenge

<u>Beh 1</u>: $|T| \le n$ Austauschsatz, angewendet auf $T \subseteq T$ und $B$ (als Erz.-system). $\Rightarrow$

$\exists F \subseteq B$ mit $|F| = |T|$, so dass $(T \setminus T) \cup F = F$ linear unabh. ist. $F \subseteq B \Rightarrow |F| \le n$

$\Rightarrow |T| \le n$ Aus der Beh 1. folgt, dass jede lin. unabh. Menge $T$ mit $S \subseteq T \subseteq E$ endlich sein und $|T| \le n$ gelten muss. $\Rightarrow$ Beh. oben gezeigt

Beh $\Rightarrow \exists\, S \subseteq T \subseteq E$ mit $T$ lin. unabh., das mit diesen Eig. maximal ist Prop. 9.5 $\Rightarrow$ $T$ ist eine Basis von $V$. $\square$

# Basisergänzungs- und Basisauswahlsatz

**Folgerung (9.7)**

Sei $V$ ein endlich erzeugter $K$-Vektorraum.

(i) *(Basisergänzungssatz)*
Jede linear unabhängige Teilmenge $S \subseteq V$ kann zu einer Basis von $V$ ergänzt werden.

(ii) *(Basisauswahlsatz)*
Aus jedem Erzeugendensystem $E$ von $V$ kann man eine Basis von $V$ auswählen.

- Teil (i) folgt durch Anwendung von Satz 9.6 (iii) auf $E = V$
- Teil (ii) folgt durch Anwendung von Satz 9.6 (iii) auf $S = \varnothing$

# Definition der Dimension

**Definition (9.8)**

Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Dann ist die Dimension von $V$ definiert durch

$$\dim_K V = \dim V = \begin{cases} |B| & \text{falls } B \text{ eine endliche Basis von } V \text{ ist,} \\ \infty & \text{falls } V \text{ nicht endlich erzeugt ist.} \end{cases}$$

# Beispiele für die Dimension von Vektorräumen

(i) $\dim_K K^n = n$ für jeden Körper $K$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\dim_K \mathscr{M}_{m \times n, K} = mn$ für jeden Körper $K$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$

(iii) $\dim_K K = 1$ für jeden Körper $K$

(iv) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

(v) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(vi) $\dim_K \{0_V\} = 0$ für jeden Körper $K$

(vii) $\dim_K K[x] = \infty$ für jeden Körper $K$