Linearkombinationen eines Tupels von Vektoren

Definition (8.1)

Sei V ein K-Vektorraum, $r \in \mathbb{N}_0$ und $(v_1, ..., v_r)$ ein Tupel von Elementen aus V. Wir bezeichnen einen Vektor $w \in V$ als Linearkombination des Tupels, wenn ein Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in K^r$ existiert, so dass

$$w \quad = \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Definition des erzeugten Untervektorraums

Definition (8.2)

Sei V ein K-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Dann bezeichnen wir mit

$$\langle S \rangle_K \quad = \quad \left\{ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k \;\middle|\; r \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, ..., \lambda_r \in K, v_1, ..., v_r \in S \right\}$$

die Menge aller Linearkombinationen von Tupeln bestehend aus Vektoren der Menge S. Man nennt $\langle S \rangle_K$ den von S erzeugten oder aufgespannten Untervektorraum.

Definition der linearen Unabhängigkeit eines Tupels

Definition (8.6)

Sei V ein K-Vektorraum. Wir bezeichnen ein Tupel $(v_1, ..., v_r)$ mit $r \in \mathbb{N}_0$, bestehend aus Vektoren $v_k \in V$, als linear unabhängig, wenn für jedes Tupel $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in K^r$ die Implikation

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_k = 0_V \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = ... = \lambda_r = 0_K \qquad \text{erfüllt ist.}$$

erfüllt ist. Ein Tupel, das nicht linear unabhängig ist, wird linear abhängig genannt.

Definition der linearen Unabhängigkeit einer Teilmenge

Definition (8.7)

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $S \subseteq V$ bezeichnen wir als linear unabhängig, wenn jedes Tupel $(v_1, ..., v_r)$ bestehend aus lauter verschiedenen Elementen v_k der Menge S linear unabhängig ist.

Kriterien für lineare Unabhängigkeit

Proposition (8.9)

Sei V ein K-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge.

(i) Genau dann ist S linear abhängig, wenn ein $v \in S$ mit $v \in \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$ existiert.

(ii) Sie ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \notin \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$ für alle $v \in S$ erfüllt ist.

(iii) Ist S linear unabhängig und $v \in V \setminus \langle S \rangle_K$, dann ist auch $S \cup \{v\}$ linear unabhängig.

Beweis von Prop. 8.9 (Forts.)

zu ii) „$\Longrightarrow$": Vor.: S ist linear abh. z.z.g. $\exists\, v \in S$ mit $v \in \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$

S lin. abh. $\Rightarrow$ $\exists$ Tupel $(v_1, \dots, v_m)$ mit $v_j \in S$ für $1 \leq j \leq m$, das lin. abh. ist, wobei $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ $\Rightarrow$ $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, nicht alle null, mit $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j = 0_V$. Sei $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $\lambda_i \neq 0_K$ $\Longrightarrow$ $v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \left(-\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right) v_j$. Setze $v = v_i$.

v ist Linearkombination des Tupels $(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_m)$ $\widehat{} \mathrel{\hat{=}} v_i$ fehlt

... wobei $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ ... $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$,
nicht alle null, mit $\sum^{m} \lambda_i v_i = 0_V$. Sei $i \in \{1, \dots, m\}$
und $\{v_1, \dots, v_m\} \setminus \{v_i\} \subseteq S \setminus \{v\} \Rightarrow v \in \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$

zu (ii) folgt direkt aus (i), durch Negation

zu (iii) Ang. S ist lin. unabh., $v \in V \setminus \langle S \rangle_K$, $S \cup \{v\}$ ist lin. abh.
Dann gibt es in $S \cup \{v\}$ ein linear abh. Tupel $(v_1, \dots, v_m)$ bestehend aus lauter verschiedenen Vektoren v_j. Wäre $v \neq v_j$ für $1 \leq j \leq m$ dann wäre $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq S$ und S somit linear abh. ↯
also: $v = v_j$ für ein $j \in \{1, \dots, m\}$. lin. Abh. $\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, nicht alle null, mit $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0_V$. Es muss $\lambda_j \neq 0$ gelten, da sonst bereits $(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_m)$ linear abh. wäre $\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow}$ S lin. abh. ↯
so aber: $v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right) v_i \in \langle S \rangle_K$ ↯ zu $v = v_j \notin \langle S \rangle_K$. $\square$

Rechnerische Überprüfung von Linearkomb.
und lin. Unabhängigkeit

<u>Beispiel 1</u>: $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

außerdem: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

<u>Frage</u>: (a) Ist v Linearkomb. von (v_1, v_2, v_3)?
(b) Ist w " " " ?

zu (a) v Lin-komb von (v_1, v_2, v_3) $\Longleftrightarrow$

$\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$

Es gilt jeweils: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = v \Longleftrightarrow$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -\lambda_1 + 6\lambda_2 + 8\lambda_3 \\ 7\lambda_2 + 7\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \text{ ist Lösung}$$

des LGS $x_1 + 2x_2 = 1,\ -x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0,$
$7x_2 + 7x_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b

zu (

äqui

diesm

$A \mapsto$

Die Ma

$r = 2$

$\longrightarrow$ w

Um w

v_3

$\Longleftrightarrow$

$\Longrightarrow$

ist Lösung

$= 0$.

Das LGS ist unlösbar, somit ist v keine Linear-kombination von (v_1, v_2, v_3).

zu (b) Wie unter (a) zeigt man zuerst, dass die Frage äquiv. ist zur Frage der Lösbarkeit eines LGS, diesmal mit der Koeff.-matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix rechts ist in ZSF, mit Kennzahlen

$r = 2,\ j_1 = 1,\ j_2 = 2 \xrightarrow{\text{1. Bemerkung}}$ LGS ist lösbar

$\Longrightarrow$ w ist Linearkomb. von (v_1, v_2, v_3)

Um w tatsächlich als Linearkomb. darzustellen,

$v_3)$?

?

kann man die Lösungsmenge des LGS ausrechnen

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $S = \{1,2,3\} \setminus \{j_1, j_2\} = \{3\}$

Basisvektor des hom. Lösungsraums ist somit $b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, spezielle Lsg. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge ist $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Jedes</u> Element von $\mathcal{L}$ liefert eine Darstellung von w als Lin.komb. von (v_1, v_2, v_3), z.B.

$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ <u>oder</u>

$$3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\7\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$$

2. Beispiel: Überprüfe (v_1, v_2, v_3) mit $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ auf lineare Unabhängigkeit.

Für alle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt die Äquivalenz

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}\lambda_1 + 3\lambda_3\\2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3\\-\lambda_2 + 3\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \text{ ist } \in \text{ Lösungsmenge}$$

des homogenen LGS mit der Koeff.-matrix $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\2 & 2 & 3\\0 & -1 & 3\end{pmatrix}$

des homogenen LGS mit der Koeff.-matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

<u>also</u>: (v_1, v_2, v_3) ist genau dann lin. unabh., wenn $(0,0,0)$ die einzige Lösung dieses hom. LGS ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ZSF mit Kennzahlen $r = 3$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$

$S = \{1,2,3\} \setminus \{j_1, j_2, j_3\} = \emptyset \Rightarrow$ einzige Lsg. $(0,0,0)$

$\Rightarrow$ Tupel ist linear unabhängig.

Kriterium für lineare Unabhängigkeit im K^m

Proposition (8.10)

- Seien $m, n \in \mathbb{N}$.
- Sei $(v_1, ..., v_n)$ ein Tupel bestehend aus Vektoren $v_k \in K^m$.
- Sei $A \in \mathscr{M}_{m \times n, K}$ die Matrix mit der Eigenschaft, dass v_k jeweils der k-te Spaltenvektor $a_{\bullet k}$ von A ist, für $1 \leq k \leq n$.

Genau dann ist Tupel linear unabhängig, wenn die einzige Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0_{K^m}$ der Nullvektor 0_{K^n} ist.

Definition der Basen eines K-Vektorraums

Definition (9.1)

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt Basis von V, wenn sie linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von V ist. Ein Tupel $(v_1, ..., v_n)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, bestehend aus Vektoren $v_i \in V$, wird geordnete Basis genannt, wenn $\{v_1, ..., v_n\}$ aus n verschiedenen Elementen besteht und eine Basis von V bildet.

Äquivalente Charakterisierungen des Basisbegriffs

Satz (9.2)

Sei V ein K-Vektorraum. Für eine Teilmenge $B \subseteq V$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Sie ist eine Basis von V.

(ii) Sie ist ein minimales Erzeugendensystem von V.

(iii) Sie ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V.

Beweis von Satz 9.2

geg. V K-Vektorraum, $B \subseteq V$

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" B ist Erz.-system nach Voraussetzung

Minimalität: Ang. $B' \subsetneq B$ ist ebenfalls Erz.-system.

Sei $v \in B \setminus B'$ $\quad B'$ Erz-system $\Rightarrow \langle B' \rangle_K = V$

$$v \in \langle B' \rangle_K \underset{B' \subseteq B \setminus \{v\}}{\Longrightarrow} v \in \langle B \setminus \{v\} \rangle_K \overset{\text{Satz } 8.9}{\Longrightarrow}$$

B ist linear abh. $\lightning$ zu B Basis

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" z.zg.: (a) B ist lin. unabh. (✓)

(b) B ist maximal mit dieser Eig. (✓)

zu (a) Ang. B ist lin. abhängig. $\overset{\text{Satz 8.9}}{\Longrightarrow} \exists v \in B$ mit $v \in \langle B \setminus \{v\} \rangle_K$. Sei $B' = B \setminus \{v\}$. Beh.: B' ist Erz.-system von V. Grund: $v \in \langle B \setminus \{v\} \rangle_K$, $B \setminus \{v\} \subseteq \langle B \setminus \{v\} \rangle_K$

$\Rightarrow B \subseteq \langle B \setminus \{v\} \rangle_K \overset{§8}{\Longrightarrow} \langle B \rangle_K \subseteq \langle B \setminus \{v\} \rangle_K \overset{B \text{ ist Erz-system}}{\Longrightarrow}$

$V = \langle B \setminus \{v\} \rangle_K = \langle B' \rangle_K$ ($\Rightarrow$ Beh.) Wegen $B' \subsetneq B$ ist B kein minimales Erz.-system ↯ zu Vor.

zu (b) Ang., es gibt eine Menge $B' \supsetneq B$, die ebenfalls linear unabh. ist. Sei $v \in B' \setminus B$. Betrachte $B \cup \{v\}$. $\langle B \rangle_K = V$

$\Rightarrow v \in \langle B \rangle_K \underset{B' \setminus \{v\} \supseteq B}{\Longrightarrow} v \in \langle B' \setminus \{v\} \rangle_K$ Satz 8.9 $\Rightarrow$

B' ist linear abhängig ↯ zur Annahme

Beweis von Satz 9.2 (Abschluss)

(iii) $\Rightarrow$ (i) Nach Voraussetzung ist B eine linear unabhängige Teilmenge von V. Zu zeigen bleibt $\langle B \rangle_K = V$. Ist dies nicht der Fall, dann ist $\langle B \rangle_K$ eine echte Teilmenge von V. Sei dann $v \in V \setminus \langle B \rangle_K$. Nach Satz 8.9 (iii) ist $B \cap \{v\}$ linear unabhängig. Aber das widerspricht der Voraussetzung, dass B als linear unabhängige Teilmenge von V maximal ist. Die Annahme $\langle B \rangle_K \neq V$ war also falsch, und folglich ist B ein Erzeugendensystem von V. ´

Das Austauschlemma

Ein K-Vektorraum V wird als endlich erzeugt bezeichnet, wenn eine endliche Teilmenge $S \subseteq V$ mit $V = \langle S \rangle_K$ existiert.

Ziel: Je zwei Basen eines endlich erzeugten K-Vektorraums haben gleich viele Elemente.

Lemma (9.3)

Sei V ein K-Vektorraum, $S \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge und $E \subseteq V$ ein Erzeugendensystem von V. Dann gibt es für jeden Vektor $v \in S \setminus E$ ein $w \in E \setminus S$, so dass auch $(S \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V ist.

Beweis des Austauschlemmas:

geg: V K-Vektorraum, $S \subseteq V$ lin. unabh.,
$E \subseteq V$ mit $V = \langle E \rangle_K$.

Sei $v \in S \setminus E$. Ang., es existiert kein w mit der angeg. Eigenschaft. $\Rightarrow$ Für <u>jedes</u> $w \in E \setminus S$ ist
$(S \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ linear abhängig. $\Rightarrow$
$w \in \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$ für alle $w \in E \setminus S$ $\Rightarrow$

Setze $S' = S \setminus \{v\}$. $v \notin E \Rightarrow E \setminus S = E \setminus S'$

$E \setminus S' = E \setminus S \subseteq \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$, $S' \subseteq \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$

$\Rightarrow E = (E \setminus S') \cup S' \subseteq \langle S \setminus \{v\}_K \rangle$

$\Rightarrow V = \langle E \rangle_K \subseteq \langle S \setminus \{v\} \rangle_K \Rightarrow v \in \langle S \setminus \{v\} \rangle_K$

$\xRightarrow{\text{Satz 8.9}}$ S ist lin. abhängig ↯ zur Voraussetzung. $\square$