

Definition

Eine **abelsche Gruppe** ist ein Paar $(A, +)$ bestehend aus einer Menge A und einer **assoziativen** und **kommutativen** Verknüpfung $+$ mit den folgenden beiden Eigenschaften.

- Es gibt ein Element 0_A , so dass $0_A + a = a$ und $a + 0_A = a$ für alle $a \in A$ erfüllt ist.
- Für jedes $a \in A$ existiert ein Element $-a \in A$, so dass $a + (-a) = 0_A$ und $(-a) + a = 0_A$ erfüllt ist.

Wiederholung einiger Grundbegriffe (Forts.)

Definition

Ein **Ring** ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge R und zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf R mit folgenden Eigenschaften.

- (i) Das Paar $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
- (ii) Das Paar $(R, \cdot)$ ist ein abelsches Monoid.
- (iii) Es gilt das Distributivgesetz $a(b + c) = ab + ac$ für alle $a, b, c \in R$.

Wenn die Menge $R^\times$ der invertierbaren Elemente des Monoids $(R, \cdot)$ mit $R \setminus \{0_R\}$ übereinstimmt, dann bezeichnet man den Ring auch als **Körper**.

Wiederholung einiger Grundbegriffe (Forts.)

Definition (6.1)

Sei K ein Körper. Ein K -Vektorraum ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge V und Abbildungen $+: V \times V \rightarrow V$ und $\cdot: K \times V \rightarrow V$ genannt Vektoraddition und skalare Multiplikation, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Das Paar $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
- (ii) Für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gelten die Rechenregeln
 - (a) $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$
 - (b) $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$
 - (c) $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
 - (d) $1_K \cdot v = v$

Die Elemente der Menge V werden Vektoren genannt.

Wiederholung einiger Grundbegriffe (Forts.)

Definition

Sei V ein K -Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ wird **Untervektorraum** von V genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (i) $0_V \in U$
- (ii) $v + w \in U$ für alle $v, w \in U$
- (iii) $\lambda \cdot v \in U$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in U$

wichtig:

Unter den gegebenen Voraussetzungen ist $(U, +_U, \cdot_U)$ **selbst ein Vektorraum**, wobei die Abbildungen $+_U : U \times U \rightarrow U$ und $\cdot_U : K \times U \rightarrow U$ durch **Einschränkung** der Vektoraddition und der skalaren Multiplikation von V zu Stande kommen.

Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum.

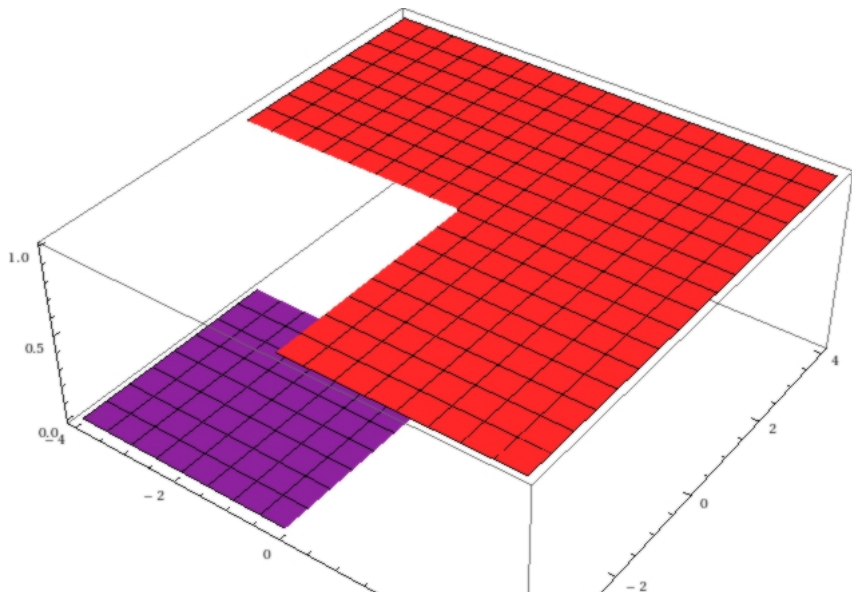
Beispiele für Untervektorräume:

- $\{0_V\}$ „Nullpunkt“, „Koordinatenursprung“
- lineare Geraden Sei $v \in V, v \neq 0_V$
 $\langle v \rangle_K = \{\lambda v \mid \lambda \in K\}$
- lineare Ebenen Seien $v, w \in V$, mit $v \neq 0_V$ und $w \notin \langle v \rangle_K$.
 $\langle v, w \rangle_K = \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in K\}$

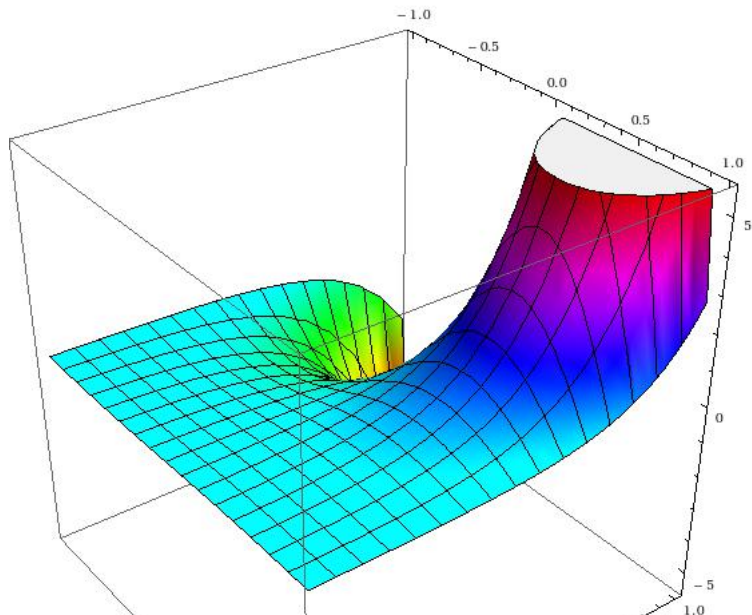
- Basen von Vektorräumen, Dimensionsbegriff
- Koordinatensysteme
- Determinanten
- Eigenwerte und Eigenvektoren

- metrische und topologische Räume
- Grenzwerte von Folgen und Funktionen, Stetigkeit
- partielle und totale Differenzierbarkeit
- mehrdimensionale Taylor-Entwicklung
- Bestimmung lokaler Extrema

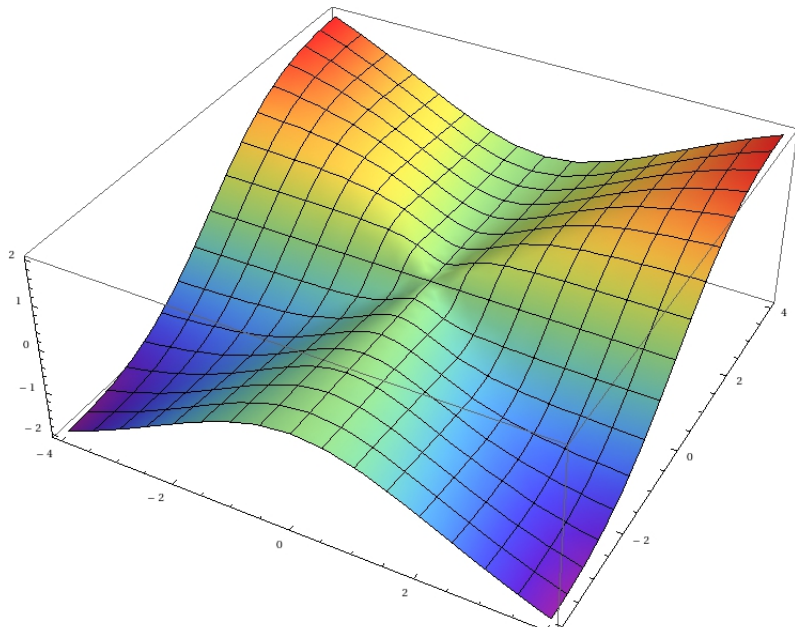
Beispiel einer mehrdimensionalen **unstetigen** Funktion



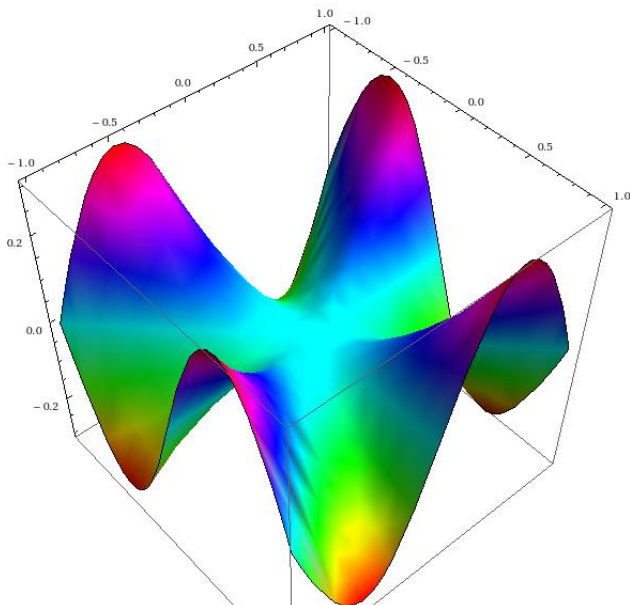
Grenzwertverhalten mehrdimensionaler Funktionen



Beispiel einer nicht differenzierbaren Funktion



Richtungsabhängige Ableitungen im Mehrdimensionalen



Definition (8.1)

Sei V ein K -Vektorraum, $r \in \mathbb{N}_0$ und $(v_1, \dots, v_r)$ ein Tupel von Elementen aus V . Wir bezeichnen einen Vektor $w \in V$ als **Linearkombination** des Tupels, wenn ein Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in K^r$ existiert, so dass

$$w = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \quad \text{erfüllt ist.}$$

Beispiele für Linearkombinationen von $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$
(falls $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$) :

$$\bullet \quad (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definition des erzeugten Untervektorraums

Definition (8.2)

Sei V ein K -Vektorraum und $S \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Dann bezeichnen wir mit

$$\langle S \rangle_K = \left\{ \sum_{k=1}^r \lambda_k v_k \mid r \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K, v_1, \dots, v_r \in S \right\}$$

die Menge **aller Linearkombinationen** von Tupeln bestehend aus Vektoren der Menge S . Man nennt $\langle S \rangle_K$ den von S **erzeugten** oder **aufgespannten** Untervektorraum.

Beispiel für einen aufgespannten Untervektorraum

$$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\langle S \rangle_K = \left\{ \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j \mid r \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}, v_1, \dots, v_r \in S \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^r \lambda_j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine ähnliche Rechnung zeigt, dass in $V = \mathbb{R}^3$
für beliebige $v, w \in \mathbb{R}^3$ jeweils

$$\langle v, w \rangle_{\mathbb{R}} = \{ \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} \text{ gilt.}$$

Bsp. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \langle S \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \right.$
 $\left. \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \text{ („xy-Ebene“)}$

Satz (8.3)

Sei V ein K -Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann gilt

- (i) Die Menge $\langle S \rangle_K$ bildet einen Untervektorraum von V mit $\langle S \rangle_K \supseteq S$.
- (ii) Ist U ein weiterer Untervektorraum von V mit $U \supseteq S$, dann gilt $U \supseteq \langle S \rangle_K$.

Es handelt sich also bei $\langle S \rangle_K$ um den **kleinsten** Untervektorraum von V , der S als Teilmenge enthält.

Beweis von Satz 8.3.

geg: K Körper, V K -Vektorraum, $S \subseteq V$

$$\langle S \rangle_K = \left\{ \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j \mid r \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K, v_1, \dots, v_r \in S \right\}$$

zu 1) $\langle S \rangle_K$ ist Untervektorraum von V

überprüfe: (1) $0_V \in \langle S \rangle_K$

(2) $\forall v, w \in \langle S \rangle_K : v + w \in \langle S \rangle_K$

(3) $\forall \lambda \in K \forall v \in \langle S \rangle_K : \lambda v \in \langle S \rangle_K$

zu 1) Nach Def. ist 0_V eine Linearkomb. des leeren Tupels $()$ (setze $r=0$) $\Rightarrow 0_V \in \langle S \rangle_K$

zu (2) Seien $v, w \in \langle S \rangle_K$, z.zg. $v+w \in \langle S \rangle_K$

$v \in \langle S \rangle_K \Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K, v_1, \dots, v_r \in S$
mit $v = \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j$

$w \in \langle S \rangle_K \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N}_0, \mu_1, \dots, \mu_s \in K$ und

$w_1, \dots, w_s \in S$ mit $w = \sum_{k=1}^s \mu_k w_k$

$$\Rightarrow v+w = \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j + \sum_{k=1}^s \mu_k w_k =$$

$$\sum_{l=1}^{r+s} \alpha_l u_l \quad \text{mit} \quad \alpha_l = \begin{cases} \lambda_l & \text{falls } 1 \leq l \leq r \\ \mu_{l-r} & \text{falls } r+1 \leq l \leq r+s \end{cases}$$

$$\langle S \rangle_K \text{ und } u_l = \begin{cases} v_l & \text{falls } 1 \leq l \leq r \\ w_{l-r} & \text{falls } r+1 \leq l \leq r+s \end{cases}$$

$$\Rightarrow v+w \in \langle S \rangle_K$$

$$u_1, \dots, u_{r+s} \in S$$

$$a_1, \dots, a_{r+s} \in K$$

K und

zu (3) Seien $\lambda \in K$ und $v \in \langle S \rangle_K$. z.zg: $\lambda v \in \langle S \rangle_K$

$$v \in \langle S \rangle_K \Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K, v_1, \dots, v_r \in S$$

$$\text{mit } v = \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j \rightarrow \lambda v = \sum_{j=1}^r (\lambda \lambda_j) v_j$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \lambda \lambda_1, \dots, \lambda \lambda_r \in K \\ &v_1, \dots, v_r \in S \end{aligned}$$

$$\lambda v \in \langle S \rangle_K$$

noch z.zg.: $S \subseteq \langle S \rangle_K$ Sei $v \in S$,

z.zg. $v \in \langle S \rangle_K$ Setze $r = 1$, $v_1 = v$, $\lambda_1 = 1_K$.

Dann gilt $\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 = 1_K \cdot v = v$.
 $\Rightarrow v \in \langle S \rangle_K$

zu ii) Sei U ein Untervektorraum von V mit

$U \supseteq S$. z.zg. $U \supseteq \langle S \rangle_K$ Dafür muss ge-
zeigt werden: $\forall r \in \mathbb{N}_0 \forall \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \forall v_1, \dots, v_r \in S$

gilt $\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j \in U$. Beweis durch vollst. Ind. über r .

Ind.-Anf. $r = 0$ In diesem Fall ist jeder Ausdruck des

Form $\sum_{j=1}^r \lambda_j v_j$ gleich 0_V , und es gilt $0_V \in U$, da U Untervektorraum von V ist.

Ind-Schritt: Sei $r \in \mathbb{N}_0$, setze die Aussage für r voraus.
 $r \mapsto r+1$

Seien $v_1, \dots, v_{r+1} \in S$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1} \in K$ zu zeigen:

$$\sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j v_j \in U \quad \text{Ind-V} \Rightarrow \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j \in U$$

außerdem: $v_{r+1} \in S$, $S \subseteq U \Rightarrow v_{r+1} \in U \xRightarrow{\text{U Untervektorraum}}$

$$\lambda_{r+1} v_{r+1} \in U \quad \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j \in U, \lambda_{r+1} v_{r+1} \in U, U \text{ ist}$$

$$\text{Untervektorraum} \Rightarrow \sum_{j=1}^r \lambda_j v_j + \lambda_{r+1} v_{r+1} \in U \Rightarrow \sum_{j=1}^{r+1} \lambda_j v_j \in U \quad \square$$

Erzeugendensystem eines Untervektorraums

Definition (8.4)

Ist V ein K -Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, dann wird jede Teilmenge $S \subseteq V$ mit der Eigenschaft $U = \langle S \rangle_K$ ein **Erzeugendensystem** von U genannt.

Beispiele:

- Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist ein Erzeugendensystem des Untervektorraums

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{des } \mathbb{R}^3.$$

Weitere Beispiele für Erzeugendensysteme

- Nimmt man den dritten Einheitsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu der Menge aus dem letzten Beispiele hinzu, so erhält man ein Erzeugendensystem des gesamten $\mathbb{R}$ -Vektorraums $\mathbb{R}^3$.
- Für jeden K -Vektorraum V ist sowohl $\emptyset$ als auch $\{0_V\}$ ein Erzeugendensystem des Untervektorraums $\{0_V\}$ von V .
- Für jede Teilmenge $S \subseteq V$ gilt $\langle S \rangle_K = S$ genau dann, wenn S selbst ein Untervektorraum von V ist. (Beweis als Übung)