

Probeklausur - Aufgabe 6

zu (a) Frage: Was bedeutet es, dass eine Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) gegen $a \in X$ konvergiert?

1. Möglichkeit: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d(a, x^{(n)}) < \varepsilon$

2. Mögl.: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x^{(n)} \in B_\varepsilon(a)$

$\lim_{n \rightarrow \infty} d$

Zu (b) Vor: $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X , wobei
 $\mathbb{N} \rightarrow X, n \mapsto x^{(n)}$ injektiv ist

z.z. $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert in (X, δ_X) (wobei $\delta_X =$ diskrete Metrik auf X)

Ang. die Folge konvergiert in (X, δ_X) gegen ein $a \in X$. Dann gibt es wsl. ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\delta_X(a, x^{(n)}) < 1 \quad \forall n \geq N$. Nach Def. von δ_X folgt daraus $\delta_X(a, x^{(n)}) = 0$ und $x^{(n)} = a \quad \forall n \geq N \Rightarrow x^{(N)} = a = x^{(N+1)}$
 $\nmid$ zur Injektivität.

Es genügt also zu zeigen: $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x^{(n)}, y^{(n)}) = 0$

zu (c) Vor: $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in (X, d) mit Grenzwert a , $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ weitere Folge mit

Wsk- $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x^{(n)}, y^{(n)}) = 0$ z.zg: $\lim_{n \rightarrow \infty} y^{(n)} = a$ in (X, d)

1. Möglichkeit: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

z.zg. $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : d(a, y^{(n)}) < \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 : d(a, x^{(n)}) < \frac{1}{2} \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x^{(n)}, y^{(n)}) = 0 \Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 : d(x^{(n)}, y^{(n)}) < \frac{1}{2} \varepsilon$

$d(x^{(n)}, y^{(n)}) < \frac{1}{2} \varepsilon$. Sei $N = \max \{N_1, N_2\}$.

Sei $n \geq N$. $n \geq N_1 \Rightarrow d(x^{(n)}, a) < \frac{1}{2} \varepsilon$

$$n \geq N_2 \Rightarrow d(x^{(n)}, y^{(n)}) < \frac{1}{2} \varepsilon$$

$$\Delta\text{-Ungleichung} \rightarrow d(a, y^{(n)}) \leq d(a, x^{(n)}) + d(x^{(n)}, y^{(n)}) \\ < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

und

Raum

$\mathbb{C}$

2. Möglichkeit:

$$\text{f. V. gilt: } \lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)} = a \text{ in } (X, d) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(a, z^{(n)}) = 0$$

für jede Folge $(z^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in (X, d) .

$$\text{Es genügt also z. z. g.: } \lim_{n \rightarrow \infty} d(a, y^{(n)}) = 0$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt (auf Grund des Δ -Ungl.)

$$0 \leq d(a, y^{(n)}) \leq d(a, x^{(n)}) + d(x^{(n)}, y^{(n)}) \quad (*)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, x^{(n)}) = 0 \text{ wegen } \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = a \text{ und}$$

$N: \forall n \geq N:$

$\geq N:$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x^{(n)}, y^{(n)}) = 0 \text{ nach Voraussetzung}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (d(a, x^{(n)}) + d(x^{(n)}, y^{(n)})) = 0 + 0 = 0$$

Sandwich-Lemma, angewendet auf (*)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(a, y^{(n)}) = 0$$

Probeklausur - Aufgabe 5

Eigenwertberechnung

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{ges.: } \text{Eig}(A, -3)$$

$$A - (-3)E = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kennzahlen der ZSF: $r=2$, $j_1=1$, $j_2=2$
 $S = \{1, 2, 3\} \setminus \{j_1, j_2\} = \{3\}$

A) $\Rightarrow$ Lösungsraum hat einen Basisvektor $b_3 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

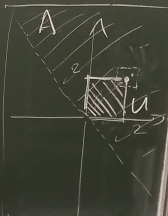
es(A) $\Rightarrow \text{Eig}(A, -3) = \left\langle \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

Beispiel für relative Offenheit:

geg. metrischer Raum $(\mathbb{R}^2, d)$, wobei d
 geg. durch $d(v, w) = \|v - w\|_{\infty}$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$$

$$= A^2(\cdot) \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 2\}$$



(a) Zeige: U ist nicht relativ offen in A

Ang. U ist rel. offen in A . Dann existiert für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{A,\varepsilon}(x) \subseteq U$, wobei $B_{A,\varepsilon}(x) = \{ y \in \underline{A} \mid d(x,y) < \varepsilon \}$. Insb. existiert für $(2,2) \in U$ ein solches ε .

Betrachte $y = (2 + \frac{1}{2}\varepsilon, 2 + \frac{1}{2}\varepsilon)$. $(2 + \frac{1}{2}\varepsilon) + (2 + \frac{1}{2}\varepsilon) = 4 + \varepsilon > 0 \rightarrow y \in A$ (*)

$$\begin{aligned} d((2,2), y) &= \|y - (2,2)\|_{\infty} = \|(2 + \frac{1}{2}\varepsilon, 2 + \frac{1}{2}\varepsilon) - (2,2)\|_{\infty} \\ &= \|(\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{2}\varepsilon)\|_{\infty} = \max\{|\frac{1}{2}\varepsilon|, |\frac{1}{2}\varepsilon|\} = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon \quad (**) \end{aligned}$$

Aus (*) und (**) folgt $y \in B_{A,\varepsilon}((2,2))$

Aber wegen $2 + \frac{1}{2}\varepsilon > 2$ gilt $y \notin U$. Also gilt insgesamt $B_{A,\varepsilon}((2,2)) \not\subseteq U$ $\downarrow$

2. Mittel: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$

Für jed

(b) Zeige: U ist relativ abgeschlossen in A

gleich bedeutend: $A \setminus U$ ist relativ offen in A

Es gilt $A \setminus U = A \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \text{ oder } y \leq 0 \text{ oder } x > 2 \text{ oder } y > 2\}$.

$= A \cap \tilde{U}$, wobei $\tilde{U} = \{x \leq 0 \vee y \leq 0 \text{ oder } x > 2 \text{ oder } y > 2\}$. Es genügt zu zeigen, dass $\tilde{U}$ offen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Schreibe $\tilde{U} = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$ mit

$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$, $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$, $U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 2\}$, $U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 2\}$

Es reicht zu zeigen, dass $U_1, \dots, U_4$ offen in $\mathbb{R}^2$ sind, weil die Vereinigung offener Mengen offen ist.

Offenheit von U_1 :

Sei $\pi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ geg. durch $(x, y) \mapsto x$.

Es gilt $U_1 = \pi_1^{-1}(-\infty, 0[)$, da $(x, y) \in \pi_1^{-1}(-\infty, 0[)$

$$\iff \pi_1(x, y) \in]-\infty, 0[\iff x < 0 \iff (x, y) \in U_1$$

$\forall (x, y) \in U_1$. $]-\infty, 0[$ ist offen in $\mathbb{R}$ (als offenes Intervall). Als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Abb. ist U_1 offen.

Offenheit von U_2, U_3, U_4 : analog

z.zg: Äquivalenz der Aussagen

K Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n,K}$

ii) $\ker A = \text{SR}(A)$ iii) $A^2 = 0 \wedge n = 2 \cdot \text{rg}(A)$

"ii) $\Rightarrow$ i)" " $\supseteq$ " Sei $v \in \text{SR}(A)$, z.zg: $v \in \ker(A)$

$v \in \text{SR}(A) \Rightarrow v$ ist Linearkombination der Spalten $\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{\bullet j}$

Spalten sind die Bilder des Einheitsvektoren unter

$$\phi_A \Rightarrow v = \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi_A(e_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j A e_j =$$

$$A \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right) \Rightarrow Av = A \left(A \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \right) \right) = A^2(\dots)$$

$$\stackrel{A^2=0}{=} 0 \Rightarrow v \in \ker(A)$$

"=" Dimensionssatz für lineare AGL. (angewendet auf Matrizen) $\Rightarrow n = \dim \ker(A) + \operatorname{rg}(A)$

$$\operatorname{SR}(A) \subseteq \ker(A) \Rightarrow \dim \operatorname{SR}(A) \leq \dim \ker(A)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) \leq \dim \ker(A)$$

$$\text{Vors.} \Rightarrow n = \dim \ker(A) + \operatorname{rg}(A) \geq 2 \cdot \operatorname{rg}(A)$$

$$= n \Rightarrow \dim \ker(A) = \operatorname{rg}(A)$$

$$\Rightarrow \dim \ker(A) = \dim \operatorname{SR}(A)$$

$$\operatorname{SR}(A) \subseteq \ker(A) \quad \ker(A) = \operatorname{SR}(A)$$

Aufgabe

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot (x+y)}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

z.zg: f stetig in $(0,0)$:

1 Möglichkeit: mit dem ε - δ -Kriterium

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ z.zg: $\exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|(x,y)\|_\infty < \delta \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$$

$$\left[\text{einziges Problem, der Fall } x \neq 0 \quad |f(x,y)| = \frac{|x||x+y|}{|x|+|y|} \right. \\ \left. = \frac{|x+y|}{1 + \frac{|y|}{|x|}} \leq |x+y| \stackrel{!}{<} \varepsilon \text{ erfüllt, wenn } |x|, |y| < \frac{1}{2}\varepsilon \right]$$

Sei $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ und $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x,y)\|_\infty < \delta$.

$$\text{z.z.g: } |f(x,y)| < \varepsilon$$

1. Fall: $x=0$ Dann gilt $|f(x,y)| = |0| = 0 < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \text{2. Fall: } x \neq 0 \quad \text{Dann gilt } |f(x,y)| &= \frac{|x| |x+y|}{|x| + |y|} \\ &= \frac{|x+y|}{1 + \frac{|y|}{|x|}} \leq |x+y| \quad \| (x,y) \|_{\infty} < \delta \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\max\{|x|, |y|\} < \delta \Rightarrow |x|, |y| < \delta = \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x,y)| \leq |x+y| \leq |x| + |y| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

2. Möglichkeit: anhand der Def (mit Folgen)

Sei $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0,0)$

$$\text{z.z.g: } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = 0 \quad \text{Sei } \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{z.z.g: } \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |f(x_n, y_n)| < \varepsilon.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (0,0) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \| (x_n, y_n) \|_{\infty} < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Beh: $|f(x_n, y_n)| < \varepsilon$

1. Fall: $x_n = 0$ $|f(x_n, y_n)| = |0| = 0 < \varepsilon$

2. Fall: $x_n \neq 0$ $\|(x_n, y_n)\|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow \max\{|x_n|, |y_n|\} < \frac{1}{2}\varepsilon \Rightarrow |x_n|, |y_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$

$$\Rightarrow |f(x_n, y_n)| = \frac{|x_n| \cdot |x_n + y_n|}{|x_n| + |y_n|}$$

$$= \frac{|x_n + y_n|}{1 + \frac{|y_n|}{|x_n|}} \leq |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$= \varepsilon$$

Aufgabe

$$\frac{|y|}{(y^2+1)}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto$$

$$\begin{cases} \frac{(x^2-1)y}{(x-1)(y^2+1)} & \text{falls } x \neq 1 \\ 0 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

z.zg. f stetig in $(1, 0)$

$$\left[\text{Ang } x \neq 1: |f(x, y)| = \left| \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}y}{\cancel{(x-1)}(y^2+1)} \right| \leq \frac{2|y|}{(y^2+1)} < 3|y| \right]$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ Sei $\delta = \min \{1, \frac{1}{2}\varepsilon\}$

Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x, y) - (1, 0)\|_\infty < \delta$

z.zg. $|f(x, y)| = |f(x, y) - f(1, 0)| < \varepsilon$

$$\|(x-1, y)\|_\infty < \delta \rightarrow \max\{|x-1|, |y|\} < \delta$$

$$\Rightarrow |x-1| < \delta \text{ und } |y| < \delta \Rightarrow |x-1| \leq 1, |y| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x+1| = |x-1+2| \leq |x-1| + 2 \leq 1 + 2 = 3$$

$$0 < x < 2$$

$$x-1 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x+1 \leq 3$$

$$\frac{2|y|}{(y^2+1)} < 3|y|$$

$$\frac{1}{y^2+1} < \frac{3}{2}$$

$$1. \text{ Fall: } x=1 \Rightarrow |f(x,y)| = |0| = 0 < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Fall: } x \neq 1 &\Rightarrow |f(x,y)| = \left| \frac{(x^2-1)y}{(x-1)(y^2+1)} \right| = \frac{|\cancel{(x-1)}(x+1)y|}{|\cancel{(x-1)}(y^2+1)|} \\ &= \frac{|x-1| \cdot |y|}{y^2+1} \leq |x-1| \cdot |y| \leq 3|y| < 3 \cdot \frac{1}{3} \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

alternativ mit Folgen: Sei $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (1, 0)$. z.zg. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = 0 = f(1, 0)$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (1, 0) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$$

$$\|(x_n, y_n) - (1, 0)\|_\infty < \delta, \text{ wobei } \delta = \min \left\{ 1, \frac{1}{3} \varepsilon \right\}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt (auf Grund des Δ -Kriegl.)

1. Fall: $x_n = 1$ $|f(x_n, y_n)| = |0| = 0 < \varepsilon$

2. Fall: $x_n \neq 1$ $\|(x_n - 1, y_n)\|_\infty < \delta \Rightarrow \max\{|x_n - 1|, |y_n|\} < \delta$

$< \delta \Rightarrow |x_n - 1|, |y_n| < \delta \Rightarrow |x_n - 1| \leq 1$ und $|y_n| < \frac{1}{3} \varepsilon$

$\Rightarrow |x_n| = |(x_n - 1) + 1| \leq |x_n - 1| + 1 \leq 2 + 1 = 3$

$\Rightarrow |f(x_n, y_n)| = \left| \frac{(x_n^2 - 1) y_n}{(x_n - 1)(y_n^2 + 1)} \right| = \left| \frac{\cancel{(x_n - 1)}(x_n + 1) y_n}{\cancel{(x_n - 1)}(y_n^2 + 1)} \right| \leq |x_n + 1| \cdot |y_n|$
 $< 3 \cdot \frac{1}{3} \varepsilon = \varepsilon$

$\in \mathbb{R}^2$

$\in \mathbb{R}^2$