Ralf Gerkmann

Mathematisches Institut der
Ludwig-Maximilians-Universität München

Sommersemester 2025

Analysis mehrerer Variablen

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Konvergenz in metrischen Räumen

Inhaltsübersicht

In Kapitel § 14 haben wir zwei wichtige neue Grundbegriffe eingeführt: die Normen auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum und die Metriken auf einer Menge. Allerdings kennen wir bisher abgesehen von der Norm $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, die durch das euklidische Standard-Skalarprodukt induziert wird, keine weiteren konkreten Beispiele. Wir beginnen das aktuelle Kapitel mit der Einführung einer Vielzahl weiterer Normen auf dem $\mathbb{R}^n$, den sog. *p-Normen*. Außerdem behandeln wir das Konzept der *Äquivalenz* von Normen, das im Hinblick auf die mehrdimensionale Analysis eine wichtige Rolle spielt, weil viele analytische Eigenschaften von Funktionen (wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit) unverändert bleiben, wenn man zu einer äquivalenten Norm übergeht.

Außerdem verallgemeinern wir die Definition der *Konvergenz*, die wir aus dem ersten Semester für Folgen reeller Zahlen definiert haben, auf Folgen in beliebigen metrischen Räumen. Wie dort ist auch hier das Ziel, der ungenauen Aussage, dass eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d_X) sich einem Punkt $a \in X$ „nähert", oder dass der Abstand zwischen $x^{(n)}$ und a „immer kleiner wird", eine präzise Bedeutung zu geben. Auch das Konzept der *Cauchyfolgen*, dass die Feststellung der Konvergenz ohne die Angabe eines Grenzwerts ermöglicht, lässt sich auf die metrischen Räume übertragen. Zum Schluss beweisen wir den sog. *Banachschen Fixpunktsatz*, ein wichtiges Hilfsmittel sowohl für praktische Anwendungen, vor allem numerische Verfahren, als auch für theoretische Herleitungen. Beispielsweise werden wir diesen Satz später beim Kriterium für lokale Umkehrarkeit und implizit definierte Funktionen verwenden, und noch später werden wir ihm in der Theorie der Gewöhnlichen Differenzialgleichungen wieder begegnen.

Wichtige Begriffe und Sätze

- Konvergenz und Grenzwerte in metrischen Räumen
- Cauchyfolgen und Vollständigkeit metrischer Räume
- Definition der p-Norm auf $\mathbb{R}^n$ für $p \in [1, +\infty]$.
- Definition der Äquivalenz von Normen
- Je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.
- Banachscher Fixpunktsatz

(1.1) Satz Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ ist für jedes $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ durch

$$\|x\|_p \quad = \quad \sqrt[p]{\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad , \quad x = (x_1, ..., x_n) \in V$$

eine Norm definiert, die sogenannte ***p*-Norm**. Eine weitere Norm erhält man durch

$$\|x\|_\infty \quad = \quad \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} \quad , \quad \text{die } \textbf{\textit{Supremumsnorm}}.$$

Beweis: Wir überprüfen zunächst die Normeigenschaften der Supremumsnorm. Offenbar gilt $\|x\|_\infty = 0$ genau dann, wenn $|x_1| = ... = |x_n| = 0$ gilt, und dies wiederum genau dann der Fall, wenn $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ ist. Sei nun $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Für den Beweis der Gleichung $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\|x\|_\infty$ sei $i \in \{1, ..., n\}$ so gewählt, dass $|x_i| \geq |x_j|$ für $1 \leq j \leq n$ erfüllt ist. Dann gilt auch $|\lambda x_i| \geq |\lambda x_j|$ für alle j, und es folgt $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda x_i| = |\lambda||x_i| = |\lambda|\|x\|_\infty$.

Zum Beweis der Dreiecksungleichung seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Für $1 \le i \le n$ gilt jeweils

$$|x_i + y_i| \quad \le \quad |x_i| + |y_i| \quad \le \quad \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \quad ,$$

also auch $\|x + y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. Damit ist $\|\cdot\|_\infty$ tatsächlich eine Norm auf V.

Wenden wir uns nun dem Beweis der Norm-Eigenschaften für die p-Norm zu, wobei $p \in \mathbb{R}$ und $p \ge 1$ ist. Für jedes $x \in V$ gilt auch hier $\|x\|_p = 0$ genau dann, wenn die Beträge $|x_i|$ der Koordinaten alle gleich Null sind, und dies ist wiederum äquivalent zu $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\lambda x\|_p \quad = \quad \sqrt[p]{\textstyle\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p} \quad = \quad |\lambda| \sqrt[p]{\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad = \quad |\lambda| \|x\|_p. \tag{1.2}$$

Also ist auch die zweite Bedingung erfüllt. Der Beweis der Dreiecksungleichung ist leider nur für $p = 1$ einfach. Hier folgt sie durch die Rechung

$$\|x + y\|_1 \quad = \quad \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \quad \le \quad \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| \quad = \quad \|x\|_1 + \|y\|_1. \qquad \square$$

Für den Beweis der Dreiecksungleichung im Fall $p > 1$ benötigen wir als zusätzliches Hilfsmittel die Höldersche Ungleichung. Der Beweis dieser Ungleichung erfordert allerdings ein wenig Vorbereitung.

(1.3) Lemma Seien $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x, y \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt

$$x^{1/p} y^{1/q} \quad \le \quad \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Beweis: Wir können voraussetzen, dass $x, y \neq 0$ sind, denn im Fall $x = 0$ oder $y = 0$ ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt. Aus Symmetriegründen können wir außerdem $x \ge y$ annehmen, da wir ansonsten die Aussage durch Vertauschung von x und y bzw. p und q auf diesen Fall zurückführen können. Schließlich können wir auch noch $x > y$ voraussetzen, denn im Fall $x = y$ reduziert sich die Aussage auf die offensichtliche Ungleichung $x \le x$.

Dividieren wir die Ungleichung durch y und setzen wir $\xi = \frac{x}{y}$, dann erhalten wir auf der rechten Seite den Term

$$\tfrac{1}{p}\xi + \tfrac{1}{q} \quad = \quad \tfrac{1}{p}\xi + 1 - \tfrac{1}{p} \quad = \quad \tfrac{1}{p}(\xi - 1) + 1 \quad ,$$

auf der linken Seite $x^{1/p} y^{1/q-1} = (\frac{x}{y})^{1/p} y^{1/p+1/q-1} = \xi^{1/p}$. Es genügt also, für jedes reelle $\xi > 1$ die Ungleichung $\xi^{1/p} \le \frac{1}{p}(\xi - 1) + 1$ zuvbeweisen. Setzen wir $\eta = \xi - 1$, so erhalten wir nach Subtraktion von 1 auf beiden Seiten die äquivalente Ungleichung

$$(\eta + 1)^{1/p} - 1 \quad \le \quad \tfrac{1}{p}\eta \qquad \text{für} \quad \eta > 0$$

Diese kann nun durch den Mittelwertsatz der Differentialrechnung bewiesen werden. Dazu betrachten wir die Funktion $\phi(t) = (t + 1)^{1/p}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, \eta]$. Auf Grund des Mittelwertsatzes gibt es ein $t_0 \in]0, \eta[$ mit $\phi(\eta) - \phi(0) = \eta \phi'(t_0)$. Die linke Seite dieser Gleichung ist gleich $(\eta + 1)^{1/p} - 1$, die rechte Seite ist wegen $\phi'(t) = \frac{1}{p}(t + 1)^{1/p-1}$ gleich $\eta \cdot \frac{1}{p}(t_0 + 1)^{1/p-1}$. Wegen $t_0 + 1 > 1$ und $\frac{1}{p} - 1 < 0$ kann die rechte Seite durch $\frac{1}{p}(t_0 + 1)^{1/p-1} \le \frac{1}{p}\eta$ abgeschätzt werden. $\square$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung aus der Linearen Algebra lässt sich nun verallgemeinern zu

(1.4) Proposition *(Höldersche Ungleichung)*
Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$ und $y = (y_1, ..., y_n)$, und seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p, q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vorgegeben. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |y_i| \quad \leq \quad \|x\|_p \|y\|_q$$

Beweis: Nach Lemmma (1.3), angewendet auf die nicht-negativen Zahlen $\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}$ und $\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}$ gilt

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \quad \leq \quad \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q} \qquad \text{für} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \cdot \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q} \right) \quad =$$

$$\frac{1}{p} \frac{1}{\|x\|_p^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q} \frac{1}{\|y\|_q^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \quad = \quad \frac{1}{p} \frac{1}{\|x\|_p^p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \frac{1}{\|y\|_q^q} \|y\|_q^q \quad = \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad = \quad 1.$$

Durch Multiplikation dieser Ungleichung mit $\|x\|_p \|y\|_q$ erhalten wir die Höldersche Ungleichung. □

Beweis der Dreiecksungleichung für die p-Norm, für $p > 1$:

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben. Wir können $x + y \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ annehmen, weil die Dreiecksungleichung ansonsten offensichtlich sogar mit Gleichheit erfüllt ist. Sei $q \in \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte (positive) reelle Zahl mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nämlich $q = \frac{p}{p-1}$. Außerdem sei $z \in \mathbb{R}^n$ der Vektor mit den Komponenten $z_i = (x_i + y_i)^{p-1}$ für $1 \leq i \leq n$. Es gilt dann

$$\|x + y\|_p^p \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i + y_i|^{p-1} \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i||z_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i||z_i|$$

$$\leq \quad \|x\|_p \|z\|_q + \|y\|_p \|z\|_q \quad = \quad \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

$$= \quad \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{(p-1)/p} + \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{(p-1)/p} \quad = \quad \|x\|_p \cdot \|x + y\|_p^{p-1} + \|y\|_p \cdot \|x + y\|_p^{p-1}$$

wobei im vierten Schritt die Höldersche Ungleichung und im sechsten Schritt die Gleichungen $q = \frac{p}{p-1}$ und $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ verwendet wurden. Division durch $\|x + y\|_p^{p-1}$ auf beiden Seiten liefert das gewünschte Ergebnis.

Die Verwendung vom Index ∞ bei der Supremumsnorm ist auf Grund der folgenden Beziehung zwischen p-Norm und Supremumsnorm gerechtfertigt.

(1.5) Proposition Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Beweis: Für $x = 0$ ist die Gleichung offensichtlich erfüllt, denn dann gilt $\|x\|_\infty = 0$ und $\|x\|_p = 0$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Sei nun $x \neq 0$ und x_k die Komponente von x mit dem größten Betrag. Dann können wir $\|x\|_p$ auch in der Form

$$|x_k| \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p}{|x_k|^p} \right)^{1/p}$$

schreiben. Die Summe in der Klammer kann nach unten abgeschätzt werden durch $\frac{|x_k|^p}{|x_k|^p} = 1$, und nach oben wegen $\frac{|x_i|^p}{|x_k|^p} \le 1$ für $1 \le i \le n$ durch den Wert n. Für jedes p gilt also jeweils $|x_k| \le \|x\|_p \le |x_k| \cdot \sqrt[p]{n}$. Wegen

$$\lim_{p\to+\infty} |x_k| \cdot \sqrt[p]{n} \quad = \quad |x_k| \cdot \lim_{p\to+\infty} \sqrt[p]{n} \quad = \quad |x_k| \cdot \lim_{p\to+\infty} e^{\frac{\ln(n)}{p}} \quad = \quad |x_k| \cdot e^0 \quad = \quad |x_k|$$

folgt nun aus dem Sandwich-Lemma, dass auch $\|x\|_p$ für $p \to +\infty$ gegen $|x_k| = \|x\|_\infty$ konvergiert. □

Häufig lassen sich Normen durch eine Konstante gegeneinander abschätzen. So gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ zum Beispiel

$$\|x\|_2 \quad = \quad \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2} \quad \le \quad (n|x_i|^2)^{1/2} \quad = \quad \sqrt{n}\|x\|_\infty \quad ,$$

wobei x_i wieder eine Komponente von x mit maximalem Betrag $|x_i|$ bezeichnet. Eine ebenso einfache Rechnung zeigt $\|x\|_\infty \le \|x\|_2$. Zwischen der 1- und der Supremumsnorm hat man die Abschätzungen $\|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$ und $\|x\|_\infty \le \|x\|_1$.

(1.6) Definition Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V werden als ***äquivalent*** bezeichnet, wenn reelle Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ mit der Eigenschaft

$$\gamma_1\|x\| \quad \le \quad \|x\|' \quad \le \quad \gamma_2\|x\| \qquad \text{für alle } x \in V \text{ existieren.}$$

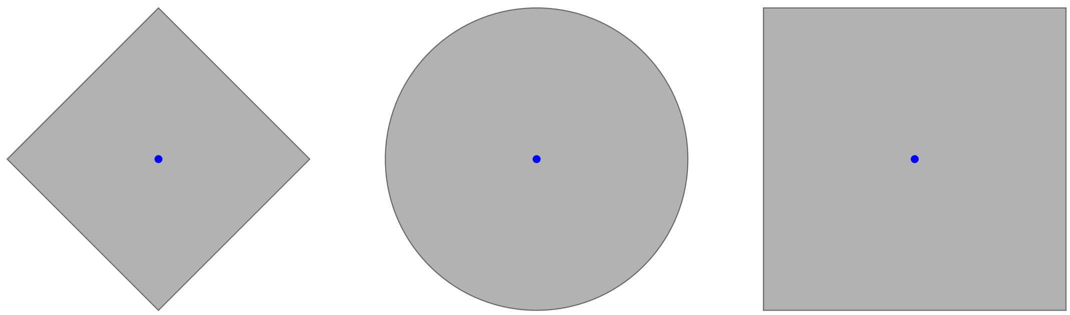
Offenbar gleichwertig mit dieser Bedingung ist die Existenz von reellen Konstanten $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit $\|x\| \le \delta_1\|x\|'$ und $\|x\|' \le \delta_2\|x\|$ für alle $x \in V$.

Es ist nicht schwer zu sehen, dass jede Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V zu sich selbst äquivalent ist. Ist eine Norm $\|\cdot\|$ auf V äquivalent zu $\|\cdot\|'$, dann ist auch $\|\cdot\|'$ äquivalent zu $\|\cdot\|$. Sind $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$, $\|\cdot\|''$ drei Normen auf V, wobei $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|'$ äquivalent zu $\|\cdot\|''$, dann ist auch $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|''$. Die Ausarbeitung der Details ist eine leichte Übungsaufgabe. Man fast die drei Aussagen zusammen in der Feststellung, dass durch den Begriff der Äquivalenz auf der Menge der Normen von V eine ***Äquivalenzrelation*** gegeben ist.

Dem Begriff der Äquivalenz lässt sich folgendermaßen eine anschauliche Bedeutung geben. Für alle $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in V$ bezeichnen wir mit

$$B_{\|\cdot\|,r}(a) \quad = \quad \{x \in V \mid \|x - a\| < r\} \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{B}_{\|\cdot\|,r}(a) \quad = \quad \{x \in V \mid \|x - a\| \le r$$

den ***offenen*** bzw. ***abgeschlossenen Ball*** vom Radius r um den Punkt a bezüglich der Norm $\|\cdot\|$. Ebenso definieren wir $B_{\|\cdot\|',r}$ und $\bar{B}_{\|\cdot\|',r}$ für die Norm $\|\cdot\|'$. Die folgende Graphik zeigt die abgeschlossenen Bälle einiger Normen auf dem $\mathbb{R}^2$, wobei der blaue Punkt jeweils den Koordinatenursprung kennzeichnet.



$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 \leq 1\}$ $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$

(1.7) Proposition Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$. Dann ist die Ungleichung $\|x\|' \leq \delta\|x\|$ für alle $x \in V$ gleichbedeutend mit $B_{\|\cdot\|,r}(a) \subseteq B_{\|\cdot\|',\delta r}(a)$ für $a \in V$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Eine entsprechende Aussage gilt auch für die abgeschlossenen Bälle.

Beweis: Wir beschränken uns darauf, die Äquivalenzaussage für die offenen Bälle zu beweisen.

„$\Rightarrow$" Setzen wir $\|x\|' \leq \delta\|x\|$ für alle $x \in V$ voraus. Ist nun $x \in B_{\|\cdot\|,r}(a)$ vorgegeben, dann gilt $\|x-a\| < r$, damit $\delta\|x-a\| < \delta r$ und $\|x-a\|' < \delta r$. Es folgt $x \in B_{\|\cdot\|',\delta r}(a)$.

„$\Leftarrow$" Nehmen wir an, dass $B_{\|\cdot\|,r}(a) \subseteq B_{\|\cdot\|',\delta r}(a)$ für alle $r \in \mathbb{R}^+$ und $a \in V$ erfüllt ist, zugleich aber ein $x \in V$ mit $\|x\|' > \delta\|x\|$ existiert. Setzen wir $r = \|x\|'$, dann gilt $\|\delta x\| = \delta\|x\| < r$ und somit $\delta x \in B_{\|\cdot\|,r}(0_V)$. Andererseits ist $\|x\|' = r$, also $\|\delta x\|' = \delta r$ und damit $\delta x \notin \mathrm{B}_{\|\cdot\|',\delta r}(0_V)$. Dies steht zur angenommenen Inklusion im Widerspruch. $\square$

Dem folgenden Resultat hat für die Analysis endlich-dimensionaler Vektorräume eine zentrale Bedeutung.

(1.8) Satz Auf jedem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V sind je zwei Normen äquivalent.

Beweis: Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V. Beim Nachweis der Äquivalenz beschränken wir uns zunächst auf den Fall $V = \mathbb{R}^d$, für beliebiges $d \in \mathbb{N}$. Es genügt zu zeigen, dass $\|\cdot\|$ äquivalent zur 1-Norm $\|\cdot\|_1$ ist. Weil $\|\cdot\|$ nämliche eine beliebig gewählte Norm ist, folgt aus dem Beweis dann auch die Äquivalenz von $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|_1$, und auf Grund der Bemerkungen von oben erhalten wir somit insgesamt die Äquivalenz von $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$.

Sei $\delta_1 = \max\{\|e_1\|, ..., \|e_d\|\}$, wobei $e_i \in \mathbb{R}^d$ jeweils den i-ten Einheitsvektor bezeichnet. Für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v = (v_1, ..., v_n)$ gilt dann

$$\|v\| \quad = \quad \left\|\sum_{i=1}^d v_i e_i\right\| \quad \leq \quad \sum_{i=1}^d |v_i|\|e_i\| \quad \leq \quad \delta_1 \sum_{i=1}^d |v_i| \quad = \quad \delta_1\|v\|_1.$$

Um zu zeigen, dass auch eine Konstante δ_2 mit der Eigenschaft $\|v\|_1 \leq \delta_2\|v\|$ existiert, betrachten wir die Menge $S = \{w \in \mathbb{R}^d \mid \|w\|_1 = 1\}$ und definieren $\gamma = \inf\{\ \|w\| \mid w \in S\}$. Angenommen, wir können zeigen, dass $\gamma > 0$ ist. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^d$, $v \neq 0_{\mathbb{R}^d}$ ist $w = \|v\|_1^{-1}v$ in S enthalten, es gilt also $\|v\|_1^{-1}\|v\| = \|w\| \geq \gamma$ und somit $\|v\|_1 \leq \gamma^{-1}\|v\|$. Im Fall $v = 0_{\mathbb{R}^d}$ ist die Ungleichung $\|v\|_1 \leq \gamma^{-1}\|v\|$ offenbar auch erfüllt. Setzen wir also $\delta_2 = \gamma^{-1}$, dann gilt $\|v\|_1 \leq \delta_2\|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^d$, und die Äquivalenz der beiden Normen ist damit bewiesen.

Die Ungleichung $\gamma > 0$ erhalten wir durch den folgenden Widerspruchsbeweis. Angenommen, es ist $\gamma = 0$. Dann gibt es eine Folge $(w^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von Vektoren $w^{(n)} \in S$ mit $\lim_n \|w^{(n)}\| = 0$. Wegen $\|w^{(n)}\|_1 = 1$ gilt jeweils $|w_i^{(n)}| \le 1$ für die Komponenten von $w^{(n)}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le d$). Insbesondere die Folge $(w_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist also ganz im Intervall $[-1,1]$ enthalten. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß aus der Analysis einer Variablen gibt es eine Teilfolge von $(w_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen eine Zahl $a_1 \in \mathbb{R}$ konvergiert. Durch Übergang zu einer Teilfolge von $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir also erreichen, dass $\lim_n w_1^{(n)} = a_1$ erfüllt ist. Indem wir die Folge noch weiter ausdünnen, können wir sogar

$$\lim_{n\to\infty} w_i^{(n)} \quad = \quad a_i \qquad \text{für} \quad 1 \le i \le d \quad \text{annehmen.}$$

Setzen wir $a = (a_1, ..., a_d) \in \mathbb{R}^d$, so folgt $\lim_n \|a - w^{(n)}\|_1 = \lim_n \sum_{i=1}^d |a_i - w_i^{(n)}| = 0$. Aus $w^{(n)} \in S$ folgt nun einerseits $\|w^{(n)}\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit auch

$$\|a\|_1 \quad = \quad \sum_{i=1}^d |a_i| \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^d |w_i^{(n)}| \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \|w^{(n)}\|_1 \quad = \quad 1.$$

Also ist auch a in S enthalten. Betrachten wir andererseits für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\|a\| \le \|a - w^{(n)}\| + \|w^{(n)}\| \le \delta_1 \|a - w^{(n)}\|_1 + \|w^{(n)}\|$ und lassen wir n gegen Unendlich laufen, so folgt $\|a\| = 0$. Auf Grund der Norm-Eigenschaft von $\|\cdot\|$ müsste $a = 0_{\mathbb{R}^d}$ gelten. Aber in diesem Fall kann a kein Element von S sein, denn es gilt $\|0_{\mathbb{R}^d}\|_1 = 0$. Wir haben die Annahme $\gamma = 0$ auf einen Widerspruch geführt. Damit ist der Beweis für $V = \mathbb{R}^d$ insgesamt abgeschlossen.

Sei nun V ein beliebiger d-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass je zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume derselben Dimension isomorph sind. Es gibt also einen Isomorphismus $\phi : \mathbb{R}^d \to V$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass sich eine Norm durch einen Vektorraum-Isomorphismus von einem $\mathbb{R}$-Vektorraum auf einen anderen übertragen lässt. Demnach sind durch $\|v\|_* = \|\phi(v)\|$ und $\|v\|'_* = \|\phi(v)\|'$ Normen auf $\mathbb{R}^d$ definiert. Wie wir bereits gezeigt haben, sind zwei Normen auf $\mathbb{R}^d$ äquivalent, also gibt es Konstanten $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $\|v\|'_* \le \delta_1 \|v\|_*$ und $\|v\|_* \le \delta_2 \|v\|'_*$ für alle $v \in \mathbb{R}^d$. Für ein beliebig vorgegebenes $w \in V$ setzen wir $v = \phi^{-1}(w)$. Es gilt dann $\phi(v) = w$ und folglich

$$\|w\|' \quad = \quad \|\phi(v)\|' \quad = \quad \|v\|'_* \quad \le \quad \delta_1 \|v\|_* \quad = \quad \delta_1 \|\phi(v)\| \quad = \quad \delta_1 \|w\|.$$

Genauso beweist man die Abschätzung $\|w\| \le \delta_2 \|w\|'$. □

Genau wie bei den normierten Vektorräumen definieren wir

(1.9) Definition Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jeden Punkt $x \in X$ und jede Zahl $r \in \mathbb{R}^+$ bezeichnet man $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ bzw. $\bar{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) \le r\}$ als den ***offenen*** bzw. den ***abgeschlossenen Ball*** vom Radius r um den Punkt x.

Ist speziell $V = \mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ und $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ für ein $p \in \mathbb{R}$ mit $p \ge 1$ oder $p = \infty$, dann bezeichnen wir die induzierte Metrik mit d_p. Ein wichtiger Spezialfall ist die von jeder p-Norm auf $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ induzierte Metrik gegeben durch $d(x,y) = |x - y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$, die wir auch als ***Standardmetrik*** auf $\mathbb{R}$ bezeichnen.

Allgemein wird nicht jede Metrik von einer Norm induziert, selbst dann nicht, wenn die unterliegende Menge X Teilmenge eines $\mathbb{R}$-Vektorraums ist. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel.

(1.10) Definition Auf jeder Menge X ist die ***diskrete Metrik*** δ_X folgendermaßen definiert: Für alle $x \in X$ ist $\delta_X(x,x) = 0$, und für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ setzt man $\delta_X(x,y) = 1$.

Dass es sich bei δ_X tatsächlich um eine Metrik handelt, kann leicht überprüft werden. Ist nun V ein mindestens eindimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, dann wird δ_V nicht durch eine Norm $\|\cdot\|$ auf V induziert. Denn nehmen wir an, dies wäre doch der Fall. Für einen beliebigen Vektor $v \neq 0_V$ gilt dann $\delta_V(v, 0_V) = \|v\|$ und $\delta_V(2v, 0_V) = \|2v\| = 2\|v\|$. Aus der ersten Gleichung und der Definition der diskreten Metrik folgt dann $\|v\| = \delta_V(v, 0_V) = 1$. Durch erneute Anwendung der Definition erhalten wir dann aber den Widerspruch $1 = \delta_V(2v, 0_V) = \|2v\| = 2\|v\| = 2$.

Für das Verständnis ist es auch hilfreich sich zu überlegen, wie die offenen bzw. abgeschlossenen Bälle bezüglich der diskreten Metrik auf einer Menge X aussehen: Für alle $x \in X$ und $r < 1$ ist $B_r(x) = \bar{B}_r(x) = \{x\}$. Für $r = 1$ gilt $B_r(x) = \{x\}$ und $\bar{B}_r(x) = X$. Im Fall $r > 1$ gilt schließlich $B_r(x) = \bar{B}_r(x) = X$.

In der Analysis einer Variablen haben wir die Schreibweise $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für Folgen reeller Zahlen verwendet. Als mathematisches Objekt ist eine solche Folge lediglich eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Unter einer Folge in einem metrischen Raum (X,d) verstehen wir nun entsprechend eine Abbildung $\mathbb{N} \to X$ und verwenden für solche Folgen Bezeichnungen der Form $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Den Index n des Folgengliedes setzen wir nach oben, da es sich bei unseren metrischen Räumen oft um Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ handelt und wir den unteren Index zur Bezeichnung der Komponenten des Vektors benötigen. Die Komponenten eines Folgenglieds $x^{(n)}$ im Vektorraum $\mathbb{R}^m$ bezeichnen wir üblicherweise mit $x_k^{(n)}$ für $1 \le k \le m$. In dieser Schreibweise gilt dann $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, ..., x_m^{(n)})$.

(1.11) Definition Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $a \in X$ ein Punkt. Man sagt, die Folge ***konvergiert*** in (X,d) gegen a und schreibt

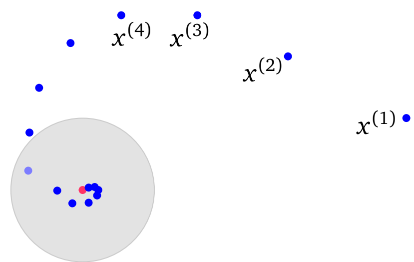
$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} \quad = \quad a \quad ,$$

wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x^{(n)} \in B_\varepsilon(a)$ für alle $n \ge N$ gilt. Der Punkt a wird in diesem Fall ein ***Grenzwert*** der Folge genannt. Eine Folge, die gegen keinen Punkt von X konvergiert, bezeichnet man als ***divergent***.

Nach Definition ist die Bedingung $x \in B_\varepsilon(a)$ äquivalent zu $d(a,x) < \varepsilon$. Die Konvergenz der Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist also äquivalent dazu, dass

$$\lim_{n\to\infty} d(a, x^{(n)}) \quad = \quad 0 \qquad \text{gilt.} \tag{1.12}$$

Die folgende Abbildung zeigt, wie man sich die Konvergenz im $\mathbb{R}^2$ aussehen könnte: Egal wie klein die graue Umgebung des rot eingezeichneten Grenzpunktes a gewählt wird, es liegen immer alle bis auf endlich viele Punkte innerhalb der Umgebung und nur endlich viele außerhalb.



Im speziellen metrischen Raum $(\mathbb{R}, d_1)$ ist die Konvergenz einer Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt $a \in \mathbb{R}$ gleichbedeutend mit der Konvergenz, wie wir sie in der Analysis einer Variablen definiert haben. In diesem Fall hat die Bedingung (1.12) einfach die Form $\lim_n |x^{(n)} - a| = 0$. Wie in der Analysis einer Variablen gilt auch hier

(1.13) Proposition Jede Folge in einem metrischen Raum hat höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Nehmen wir an, dass die Folge in (X, d) die beiden Grenzwerte $a, b \in X$ besitzt, wobei $a \neq b$ ist. Sei $\varepsilon = d(a, b)$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass zugleich $d(x^{(n)}, a) < \frac{1}{2}\varepsilon$ und $d(x^{(n)}, b) < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Dies führt nun zu dem Widerspruch

$$\varepsilon \quad = \quad d(a,b) \quad \leq \quad d(a, x^{(N)}) + d(x^{(N)}, b) \quad < \quad \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad = \quad \varepsilon. \qquad \square$$

Bezüglich der diskreten Metrik lässt sich die Konvergenz einer Folge besonders einfach beschreiben.

(1.14) Proposition Sei X eine beliebige Menge. Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X, δ_X) ausgestattet mit der diskreten Metrik konvergiert genau dann gegen einen Punkt $a \in X$, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x^{(n)} = a$ für alle $n \geq N$ existiert.

Beweis: „$\Leftarrow$“ Sei N eine natürliche Zahl mit der angegebenen Eigenschaft und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für alle $n \geq N$ gilt dann $\delta_X(x^{(n)}, a) = \delta_X(a, a) = 0 < \varepsilon$, also ist die Konvergenzbedingung erfüllt. „$\Rightarrow$“ Nach Voraussetzung gibt es für $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\delta_X(x^{(n)}, a) < 1$ für alle $n \geq N$ gilt. Weil δ_X nur die Werte 0 und 1 annimmt, ist $\delta_X(x^{(n)}, a) = 0$ für alle $n \geq N$. Nach Definition der diskreten Metrik bedeutet dies $x^{(n)} = a$ für alle $n \geq N$. $\square$

(1.15) Proposition Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit zwei äquivalenten Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$, und seien d, d' die beiden von den Normen induzierten Metriken. Sei $a \in V$ und $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Genau dann konvergiert die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a im metrischen Raum (V, d), wenn sie im metrischen Raum (V, d') gegen a konvergiert.

Beweis: Nach Definition der Äquivalenz gibt es Konstanten $\delta, \delta' \in \mathbb{R}^+$ mit $\|v\|' \leq \delta\|v\|$ und $\|v\| \leq \delta'\|v\|'$ für alle $v \in V$. Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen: Konvergiert $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im Raum (V, d) gegen a, dann auch im Raum (V, d'). Setzen wir ersteres also voraus. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x^{(n)} - a\| = d(x^{(n)}, a) < \delta^{-1}\varepsilon$ für alle $n \geq N$. Es folgt dann

$$d'(x^{(n)}, a) \quad = \quad \|x^{(n)} - a\|' \quad \leq \quad \delta\|x^{(n)} - a\| \quad < \quad \delta\delta^{-1}\varepsilon \quad = \quad \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq N.$$

Dies zeigt, dass $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X, d') konvergiert. $\square$

Nach Satz (1.8) sind je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum äquivalent. Sei V ein solcher Vektorraum, $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm, d die induzierte Metrik und $X \subseteq V$ eine Teilmenge. Bezeichnen wir die Einschränkung der Abbildung d auf die Teilmenge $X \times X \subseteq V \times V$ ebenfalls mit d, so ist (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge in X bezeichnen wir als ***konvergent*** gegen einen Punkt $a \in X$, wenn sie im metrischen Raum (X,d) gegen a konvergiert. Nach Proposition (1.15) ist diese Definition von der Wahl der Norm $\|\cdot\|$ unabhängig.

(1.16) Satz Sei $m \in \mathbb{N}$. Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^m$ konvergiert genau dann gegen einen Punkt $a \in \mathbb{R}^m$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = a_k$ für $1 \le k \le m$ erfüllt ist.

Beweis: „$\Leftarrow$“ Wie im Absatz zuvor erläutert wurde, genügt es zu zeigen, dass $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$ gegen a konvergiert. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Auf Grund der Voraussetzung gibt es für jedes $k \in \{1,...,m\}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$, so dass jeweils $|x_k^{(n)} - a_k| < \varepsilon$ für alle $n \ge N_k$ erfüllt ist. Setzen wir $N = \max\{N_1,...,N_m\}$, dann gilt für alle $n \ge N$ die Abschätzung

$$d_\infty(x^{(n)},a) \quad = \quad \|x^{(n)} - a\|_\infty \quad = \quad \max\{|x_1^{(n)} - a_1|,...,|x_m^{(n)} - a_m|\} \quad < \quad \varepsilon.$$

Nach Definition bedeutet das, dass $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$ konvergiert.

„$\Rightarrow$“ Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die im metrischen Raum $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$ gegen a konvergiert. Zu zeigen ist $\lim_n x_k^{(n)} = a_k$ für $1 \le k \le m$. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $d_\infty(x^{(n)},a) < \varepsilon$ für alle $n \ge N$ gilt. Dann folgt

$$|x_k^{(n)} - a_k| \quad \le \quad \max\{|x_1^{(n)} - a_1|,...,|x_m^{(n)} - a_m|\} \quad = \quad \|x^{(n)} - a\|_\infty \quad = \quad d_\infty(x^{(n)},a) \quad < \quad \varepsilon$$

für alle $n \ge N$ und $1 \le k \le m$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Beispielsweise ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $a_n = (\frac{1}{n}, (-1)^n)$ divergent, weil die zweite Komponente $(-1)^n$ der Folge divergiert. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$b_n = \left(1 + \frac{2}{n}, \frac{3n^2 - 7n + 6}{4n^2 - 5}\right)$$

ist dagegen konvergent, es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n \quad = \quad \left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right), \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 7n + 6}{4n^2 - 5}\right) \quad = \quad (1, \tfrac{3}{4}).$$

(1.17) Definition Eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ein einem metrischen Raum (X,d) wird ***Cauchyfolge*** genannt, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x^{(m)}, x^{(n)}) < \varepsilon$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$ mit $m,n \ge N$ gilt.

(1.18) Proposition Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit zwei äquivalenten Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$, und seien d,d' die beiden von den Normen induzierten Metriken. Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Genau dann ist die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (V,d), wenn sie eine Cauchyfolge in (V,d') ist.

Beweis: Dieser Beweis ist dem Beweis von Proposition (1.15) über die Konvergenz sehr ähnlich. Die Ausführung der Details ist eine leichte Übungsaufgabe. □

Da je zwei Normen auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V äquivalent sind, können wir in Teilmengen $X \subseteq V$ von Cauchyfolgen schlechthin sprechen, ohne Festlegung einer Metrik. Gemeint ist dann immer die Cauchyfolgen-Eigenschaft bezüglich der von einer (beliebig gewählten) Norm induzierten Metrik.

Jede konvergente Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) mit einem Grenzwert $a \in X$ ist auch eine Cauchyfolge. Sei nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $d(x^{(n)},a) < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Dann folgt $d(x^{(m)},x^{(n)}) \leq d(x^{(m)},a) + d(a,x^{(n)}) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ für alle $m,n \geq N$.

Andererseits gibt es in einigen metrischen Räumen durchaus Cauchyfolgen, die nicht konvergieren. Als Beispiel betrachten wir $(\mathbb{Q},d)$ mit der Metrix $d(a,b) = |a-b|$. Aus der Analysis einer Variablen ist bekannt, dass jede (rationale oder irrationale) Zahl als Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen dargestellt werden kann. Zum Beispiel gibt es eine Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$, die gegen $\sqrt{2}$ (im gewöhnlichen Sinn) konvergiert. Diese Folge ist in $(\mathbb{Q},d)$ eine Cauchyfolge, denn für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ können wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x^{(n)} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N$ finden, und es gilt dann $d(x^{(m)},x^{(n)}) = |x^{(m)} - x^{(n)}| \leq |x^{(m)} - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - x^{(n)}| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $m,n \geq N$. Aber andererseits ist $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum $(\mathbb{Q},d)$ nicht konvergent, denn das würde bedeutet, dass $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ zwei verschiedene reelle Grenzwerte im gewöhnlichen Sinn besitzen würde, nämlich neben $\sqrt{2}$ noch einen rationalen. Dies ist, wie wir bereits aus der Analysis einer Variablen wissen, unmöglich.

(1.19) Definition Ein metrischer Raum (X,d) heißt ***vollständig***, wenn jede Cauchyfolge in (X,d) konvergiert. Ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum, der vollständig bezüglich der induzierten Metrik ist, wird ***Banachraum*** genannt.

In endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen ist diese Bedingung immer erfüllt.

(1.20) Satz Jeder normierte, endlich-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

Beweis: Zunächst betrachten wir den Fall $V = \mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in V. Dann ist $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere eine Cauchyfolge im metrischen Raum $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$. Wir zeigen, dass die Folgen $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ für $1 \leq k \leq d$ Cauchyfolgen im Sinne der Analysis einer Variablen sind. Sei dazu $k \in \{1,...,d\}$ beliebig gewählt und $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Weil $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d_\infty(x^{(m)},x^{(n)}) < \varepsilon$ für alle $m,n \geq N$ erfüllt ist. Es folgt

$$|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| \quad \leq \quad \max\{|x_1^{(m)} - x_1^{(n)}|,...,|x_d^{(m)} - x_d^{(n)}|\} \quad = \quad \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_\infty \quad = \quad d_\infty(x^{(m)},x^{(n)}) \quad < \quad \varepsilon$$

für alle $m,n \geq N$. Also ist jede Folge $(x_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Aus der Analysis einer Variablen ist bekannt, dass jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert. Es gibt also $a_1,...,a_d \in \mathbb{R}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} \quad = \quad a_k \qquad \text{für} \quad 1 \leq k \leq d$$

erfüllt ist. Nach Satz (1.16) konvergiert die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$ gegen den Punkt $a = (a_1,...,a_d)$.

Sei nun V ein beliebiger endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wegen Proposition (1.15) und Proposition (1.18) genügt es zu zeigen, dass V bezüglich irgendeiner Norm vollständig ist, die wir frei wählen können. Weil $d = \dim V$ endlich ist, gibt es einen Isomorphismus $\phi : \mathbb{R}^d \to V$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen, und durch $\|v\| = \|\phi^{-1}(v)\|_\infty$ ist auf V eine Norm definiert. Sei nun $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in V bezüglich der durch $\|\cdot\|$ induzierten Metrik, die wir mit d_V bezeichnen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $x^{(n)} = \phi^{-1}(y^{(n)})$. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$d_\infty(x^{(m)}, x^{(n)}) \quad = \quad d_\infty(\phi^{-1}(y^{(m)}), \phi^{-1}(y^{(n)})) \quad = \quad \|\phi^{-1}(y^{(m)}) - \phi^{-1}(y^{(n)})\|_\infty \quad = \quad \|y^{(m)} - y^{(n)}\| \quad = \quad d_V(y^{(m)}, y^{(n)})$$

nach Definition, also ergibt sich aus der Cauchyfolgen-Eigenschaft von $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in (V, d_V) dieselbe Eigenschaft für die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$. Wie bereits gezeigt, konvergiert die Cauchyfolge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$ gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}^d$. Sei nun $b = \phi(a) \in V$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$d_\infty(x^{(n)}, a) \quad = \quad d_\infty(\phi^{-1}(y^{(n)}), \phi^{-1}(b)) \quad = \quad \|\phi^{-1}(y^{(n)}) - \phi^{-1}(b)\|_\infty \quad = \quad \|y^{(n)} - b\| \quad = \quad d_V(y^{(n)}, b).$$

Aus der Konvergenz von $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a im metrischen Raum $(\mathbb{R}^d, d_\infty)$ ergibt sich also die Konvergenz von $(y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b in (V, d_V). □

Wir betrachten nun eine wichtige Situation, in der die Vollständigkeit eines metrischen Raumes verwendet wird.

(1.21) Definition Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $\phi : X \to X$ wird ***Kontraktion*** genannt, wenn eine Konstante $\gamma \in\ ]0,1[$ existiert, so dass $d(\phi(x), \phi(y)) \leq \gamma d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.

Diese Eigenschaft einer Abbildung ist entscheidend für den

(1.22) Satz *(Banachscher Fixpunktsatz)*

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann besitzt jede Kontraktion $\phi : X \to X$ genau einen Fixpunkt. Es gibt also ein eindeutig bestimmtes $z \in X$ mit $\phi(z) = z$.

Beweis: *Existenz:* Sei $\gamma \in \mathbb{R}^+$ eine Konstante mit $\gamma < 1$ und $d(\phi(x), \phi(y)) \leq \gamma d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Wir wählen $x^{(0)} \in X$ beliebig und definieren rekursiv $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Als erstes schätzen wir nun die Abstände $d(x^{(n)}, x^{(n+p)})$ für beliebige $n, p \in \mathbb{N}$ ab. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$d(x^{(n+1)}, x^{(n+2)}) \quad = \quad d(\phi(x^{(n)}), \phi(x^{(n+1)})) \quad \leq \quad \gamma d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \quad ,$$

und durch vollständige Induktion über p zeigt man leicht

$$d(x^{(n+p)}, x^{(n+p+1)}) \quad \leq \quad \gamma^p d(x^{(n)}, x^{(n+1)}).$$

Mit der Summenformel $\sum_{k=0}^{p-1} \gamma^k = (1-\gamma^p)/(1-\gamma)$ aus der Analysis einer Variablen und der Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $p \in \mathbb{N}$ jeweils

$$d(x^{(n)}, x^{(n+p)}) \quad \le \quad \sum_{k=0}^{p-1} d(x^{(n+k)}, x^{(n+k+1)}) \quad \le \quad \sum_{k=0}^{p-1} \gamma^k d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \quad =$$

$$\frac{1-\gamma^p}{1-\gamma} d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \quad \le \quad \frac{1}{1-\gamma} d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \quad \le \quad \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x^{(0)}, x^{(1)}).$$

Wegen $\lim_n \gamma^n = 0$ ist $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ somit eine Cauchyfolge in X. Auf Grund der Vollständigkeit von (X,d) existiert der Grenzwert $z = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$.

Um zu zeigen, dass z ein Fixpunkt von ϕ ist, beweisen wir, dass die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ auch gegen $\phi(z)$ konvergiert. Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x^{(n)}, z) < \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Daraus folgt

$$d(x^{(n+1)}, \phi(z)) \quad = \quad d(\phi(x^{(n)}), \phi(z)) \quad \le \quad \gamma d(x^{(n)}, z) \quad < \quad \gamma\varepsilon \quad < \quad \varepsilon$$

für alle $n \ge N$. Es folgt $\phi(z) = \lim_n x^{(n+1)} = \lim_n x^{(n)} = z$.

Eindeutigkeit: Angenommen, $z' \in X$ ist ein weiterer Fixpunkt von ϕ. Aus $\phi(z) = z$ und $\phi(z') = z'$ folgt dann $d(z,z') = d(\phi(z), \phi(z')) \le \gamma d(z,z')$. Wegen $\gamma < 1$ ist dies nur für $d(z,z') = 0$, also $z = z'$, möglich. □

(1.23) Proposition Für den Abstand der Folgenglieder zum Fixpunkt z hat man die „a priori"-Abschätzung

$$d(x^{(n)}, z) \quad \le \quad \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x^{(0)}, x^{(1)}).$$

Beweis: Es gilt die Abschätzung

$$d(x^{(n)}, z) \quad \le \quad d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) + d(x^{(n+1)}, z) \quad = \quad d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) + d(\phi(x^{(n)}), \phi(z))$$

$$\le \quad \gamma^n d(x^{(0)}, x^{(1)}) + \gamma d(x^{(n)}, z) \quad ,$$

was zu $(1-\gamma) d(x^{(n)}, z) \le \gamma^n d(x^{(0)}, x^{(1)}) \Leftrightarrow d(x^{(n)}, z) \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(x^{(0)}, x^{(1)})$ umgeformt werden kann. □

Als Anwendungsbeispiel setzen wir uns zum Ziel, den Wert von $\sqrt{2}$ numerisch durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes mit hoher Genauigkeit zu bestimmen. Der naheliegende Ansatz, $\sqrt{2}$ als Fixpunkt der Abbildung $\phi(x) = \frac{2}{x}$ zu betrachten, führt nicht zum Ziel, weil diese Abbildung in einer Umgebung von $\sqrt{2}$ keine Kontraktion ist. Statt dessen definieren wir $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ durch $\phi(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Die Zahl $\sqrt{2}$ ist auch ein Fixpunkt dieser Abbildung, wie die Rechnung $\phi(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \frac{1}{2}(2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ zeigt.

Zunächst betrachten wir die Funktion ϕ auf dem Intervall $X = [1, \frac{3}{2}]$. Es gilt $\phi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$. Auf dem offenen Intervall $]1, \frac{3}{2}[$ gilt die Abschätzung

$$-\tfrac{1}{2} \quad = \quad \phi'(1) \quad < \quad \phi'(x) \quad < \quad \tfrac{1}{18} \quad = \quad \phi'(\tfrac{3}{2})$$

und somit $|\phi'(x)| < \frac{1}{2}$ für alle $x \in]1, \frac{3}{2}[$. Seien nun $x, y \in [1, \frac{3}{2}]$ vorgegeben. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechung gibt es ein $x_0 \in]1, \frac{3}{2}[$ mit

$$\phi'(x_0) = \frac{\phi(x) - \phi(y)}{x - y} \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x) - \phi(y) = \phi'(x_0)(x - y).$$

Es folgt $|\phi(x) - \phi(y)| = |\phi'(x_0)||x - y| \le \frac{1}{2}|x - y|$.

Wählen wir nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varepsilon \leq \frac{3}{2} - \sqrt{2}$, und setzen wir $X = [\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2} + \varepsilon]$, dann bildet ϕ die Menge X in sich ab und definiert auf X eine Kontraktion, mit Kontraktionskonstante $\gamma = \frac{1}{2}$. Denn wie wir oben gezeigt haben, gilt $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$ für alle $x, y \in [1, \frac{3}{2}]$, also erst recht für alle $x, y \in X$. Ist nun $x \in X$ vorgegeben, dann gilt $|x - \sqrt{2}| \leq \varepsilon$ und somit $|\phi(x) - \sqrt{2}| = |\phi(x) - \phi(\sqrt{2})| \leq \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, also $\sqrt{2} - \frac{1}{2}\varepsilon \leq \phi(x) \leq \sqrt{2} + \frac{1}{2}\varepsilon$ und damit auch $\phi(x) \in X$. Wie wir später sehen werden, sind abgeschlossene Teilmengen vollständiger metrischer Räume selbst vollständig, und daraus wird sich ergeben, dass X ein vollständiger metrischer Raum ist. Der Banachsche Fixpunktsatz ist in dieser Situation also anwendbar.

Definieren wir nun $x^{(0)} = 1{,}5$ und $x^{(n+1)} = \phi(x^{(n)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann erhalten wir die Werte

n	$x^{(n)}$
0	1,5
1	1,41666666666666667
2	1,41421568627450980
3	1,41421356237468991
4	1,41421356237309505

Die Abstand $|x^{(0)} - x^{(1)}|$ kann durch den Wert 0,084 nach oben abgeschätzt werden. Auf Grund der Fehlerabschätzung Proposition (1.23) gilt nach vier Schritten $|x^{(4)} - \sqrt{2}| < 0{,}105$, nach zwanzig Schritten $|x^{(20)} - \sqrt{2}| < 1{,}6 \cdot 10^{-7}$. Die Tabelle zeigt aber, dass die Approximation in der Praxis deutlich besser ist: Es gilt $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373095048801$, also sind schon für das Folgenglied $x^{(4)}$ alle 17 angegebenen Nachkommastellen korrekt. Statt in der Größenordnung 0,1 beträgt der tatsächliche Fehler also höchstens $0{,}5 \cdot 10^{-17}$.

Literaturverzeichnis

[BF] M. Barner, F. Flor, *Analysis II*. de Gruyter Lehrbuch.

[Fo] O. Forster, *Analysis 2*. vieweg studium - Grundkurs Mathematik.

[He] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Teubner-Verlag.

[Kö] K. Königsberger, *Analysis 2*. Springer-Verlag.