

§ 25. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Definition (25.1)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige Teilmenge. Wir bezeichnen einen Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ als **elementar konstruierbar** aus $\mathcal{P}$, wenn Punkte $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{P}$ mit $p_1 \neq p_2$ und $p_3 \neq p_4$ existieren, so dass auf q eine der folgenden Aussagen zutrifft.

- (1) Der Punkt q ist Schnittpunkt der Geraden durch p_1 und p_2 mit der Geraden durch p_3 und p_4 , wobei die beiden Geraden aber nicht zusammenfallen.
- (2) Der Punkt q ist ein Schnittpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt p_1 durch den Punkt p_2 mit der Geraden durch die Punkte p_3 und p_4 .
- (3) Der Punkt q ist ein Schnittpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt p_1 durch den Punkt p_2 mit dem Mittelpunkt p_3 durch den Punkt p_4 .

Mehrschrittige Konstruktionen

Definition (25.2)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir definieren **rekursiv** eine Folge $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Teilmengen $\mathcal{P}_n \subseteq \mathbb{R}^2$ durch folgende Vorschrift: Zunächst setzen wir $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$. Ist nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{P}_n$ bereits definiert, dann bezeichnen wir mit $\mathcal{Q}$ die Menge der Punkte, die aus $\mathcal{P}_n$ elementar konstruierbar sind, und setzen $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \cup \mathcal{Q}$. Die Punkte der Menge

$$\mathcal{P}_{\text{con}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$$

bezeichnen wir dann als die Menge der aus $\mathcal{P}$ **konstruierbaren** Punkte.

Es ist $\mathcal{P}_{\text{con}}$ die kleinste Obermenge von $\mathcal{P}$, die abgeschlossen unter der elementaren Konstruktion von Punkten ist.

Im weiteren Verlauf sind wir vor allem an einer **algebraischen** Interpretation von $\mathcal{P}_{\text{con}}$ interessiert. Dazu ordnen wir jeder Teilmenge $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Teilmenge

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} = \{x \mid (x, y) \in \mathcal{P}\} \cup \{y \mid (x, y) \in \mathcal{P}\}$$

der reellen Zahlen zu.

Satz (25.3)

- (i) Ist $\mathcal{P}$ eine beliebige Teilmenge mit $\mathcal{P} \supseteq \{(0,0), (1,0)\}$, dann ist $(\mathcal{P}_{\text{con}})_{\mathbb{R}}$ ein **Zwischenkörper** von $\mathbb{R}|\mathbb{Q}(\mathcal{P}_{\mathbb{R}})$.
- (ii) Für alle $a \in \mathbb{R}^+$ mit $a \in (\mathcal{P}_{\text{con}})_{\mathbb{R}}$ gilt auch $\sqrt{a} \in (\mathcal{P}_{\text{con}})_{\mathbb{R}}$.

Proposition (25.4)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige Teilmenge und K ein Zwischenkörper von $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ mit $(\mathcal{P})_{\mathbb{R}} \subseteq K$. Sei $q = (q_x, q_y)$ aus $\mathcal{P}$ elementar konstruierbar. Dann gilt $[K(q_x) : K] \leq 2$ und ebenso auch $[K(q_y) : K] \leq 2$.

Beweis von Prop. 25.4

geg. $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $K \subseteq \mathbb{R}$ Teilkörper mit $K \supseteq \mathbb{Q}(P_{\mathbb{R}})$

$q \in \mathbb{R}^2$ elementar konstruierbar aus P

z.zeg: $[K(q_x) : K] \leq 2$: $[K(q_y) : K] \leq 2$

1. Fall: p entsteht durch den Schnitt zweier Geraden

geg. $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$, $p_1 \neq p_2$, $p_3 \neq p_4$

g Gerade durch p_1, p_2 wird beschrieben durch die

Gleichung $ax + by = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$

h Gerade durch p_3, p_4 wird beschrieben durch die

Gleichung $dx + ey = f$, mit $d, e, f \in \mathbb{R}$, $(d, e) \neq (0, 0)$

(a, b, c) ist Lösungsmenge des LGS $a p_{1,x} + b p_{1,y} - c = 0$

$$a p_{2,x} + b p_{2,y} - c = 0$$

Wegen $p_1 \neq p_2$ ist die Koef. des homogenen LGS geg. durch

$\begin{pmatrix} p_{1,x} & p_{1,y} & -1 \\ p_{2,x} & p_{2,y} & -1 \end{pmatrix}$ vom Rang 2, die Lösungsmenge also ein 1-dim.

Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$. Darüber hinaus gibt es eine eind. best.

Lösung mit $a=1$ oder eine eind. best. Lösung mit $b=1$. Diese kann

mit der Cramerschen Regel berechnet werden. Daraus folgt, dass

in jedem Fall eine Lösung (a, b, c) mit $a, b, c \in K$ (und $(a, b) \neq (0, 0)$)

existiert, weil die Determinante einer Matrix mit Einträgen aus K wiederum in K liegt. Aus demselben Grund können wir auch

$d, e, f \in K$ (und $(d, e) \neq (0, 0)$) voraussetzen.

Da q lt. Annahme der eindeutige Schnittpunkt von g und h ist, ist (q_x, q_y) ebenfalls die eindeutig bestimmte Lsg eines LGS über K ,

nämlich von
$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$
 Da auch diese

Lösung durch die Cramersche Regel berechnet werden kann, folgt $q_x, q_y \in K$.

$\Rightarrow [K(q_x) : K] = [K(q_y) : K] = 1$ in diesem Fall

2. Fall: q entsteht als Schnittpunkt eines Kreises mit einer Geraden

geg. $p_1, \dots, p_4 \in P$, $p_1 \neq p_2$, $p_3 \neq p_4$

Gleichung des Kreises mit Mittelpkt. p_1 durch p_2 :

$$(x - p_{1,x})^2 + (y - p_{1,y})^2 \stackrel{(*)}{=} (p_{2,x} - p_{1,x})^2 + (p_{2,y} - p_{1,y})^2$$

S.o. $\Rightarrow$ Die Gerade g durch p_3 und p_4 wird beschrieben durch eine Gleichung $ax + by \stackrel{(**)}{=} c$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$, $a, b, c \in K$. Diese Gleichung kann nach x oder y umgestellt werden. Einsetzen in $(*)$ liefert eine quadr. Gleichung in y bzw. x .

q Schnittpunkt $\Rightarrow q_y$ bzw. q_x ist Lsg. einer quadratischen Gleichung über $K \Rightarrow$

Kreises

$$[K(q_y):K] \leq 2 \text{ oder } [K(q_x):K] \leq 2$$

Da q_x, q_y die Gleichung (*) erfüllen (die linear ist),
gilt $K(q_x) = K(q_y)$. Somit gilt auch

$$[K(q_x):K] \leq 2 \text{ bzw. } [K(q_y):K] \leq 2.$$

3. Fall: q entsteht als Schnitt zweier Kreise
siehe Skript



Satz (25.5)

Sei $\mathcal{P}$ eine beliebige Teilmenge mit $\mathcal{P} \supseteq \{(0,0), (1,0)\}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ liegt genau dann in $(\mathcal{P}_{\text{con}})_{\mathbb{R}}$, wenn eine Körperkette

$$\mathbb{Q}(\mathcal{P}_{\mathbb{R}}) = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_{r-1} \subseteq L_r$$

mit $a \in L_r$ und $[L_{j+1} : L_j] \leq 2$ für $0 \leq j < r$ existiert.

Beweis von Satz 25.5

geg. $P \in \mathbb{R}^2$ mit $P \neq (0,0), (1,0)$
 $a \in \mathbb{R}$

Beh.: $a \in (P_\infty)_\mathbb{R} \iff$ Es gibt eine Körperkette
 $K_0 = \mathbb{Q}(P_\mathbb{R}) \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_r$ mit
 $a \in K_r$ und $[K_j : K_{j-1}] \leq 2$ für
 $1 \leq j \leq r$

" $\implies$ ": zeige durch vollst. Ind. über n :

Liegt a in $(P_n)_\mathbb{R}$, dann existiert eine Körperkette wie angegeben.

Ind - Anf. $n=0$: $a \in P_\mathbb{R} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}(P_\mathbb{R})$

Es existiert also eine Körperkette wie angeg. der Länge 0.

Ind.-schritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in (P_{n+1})_{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists q \in P_{n+1}$ mit $a = q_x$ oder $b = q_y$. Nach Def. von P_{n+1} entsteht q durch einen elementaren Konstruktions-schritt aus Punkten $p_1, \dots, p_4 \in P_n$.

Mehrmalige Anwendung des Ind.-V. liefert insg. eine Körperkette

$K_0 \subseteq \dots \subseteq K_r$ mit $K_0 = \mathbb{Q}(P_{\mathbb{R}})$, $[K_{j+1} : K_j] \leq 2$ für

$0 \leq j \leq r-1$ und $q_{i,x}, q_{i,y} \in K_r$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Nach Prop 25.4 gilt $[K_r(q_x) : K_r] \leq 2$ und

$[K_r(q_x, q_y) : K_r(q_x)] \leq 2$. Setzen wir $K_{r+1} = K_r(q_x)$,

$K_{r+2} = K_{r+1}(q_y)$, dann erhalten wir eine Körperkette der

Länge $r+2$ mit der angeg. Eigenschaft.

" $\Leftarrow$ " Zeige durch vollst. Ind über r : Ist $K_0 \subseteq \dots \subseteq K_r$ eine Körperkette wie angegeben, dann liegen alle Elemente aus K_r in $(P_{\text{con}})_{\mathbb{R}}$.

Sowohl der Ind-Anfang als auch der Ind-Schritt ergeben sich aus Satz 25.3, der $\mathbb{Q}(P_{\mathbb{R}}) \subseteq (P_{\text{con}})_{\mathbb{R}}$ gilt und K_j jeweils entweder mit K_j übereinstimmt oder durch Adjunktion der Quadratwurzel einer positiven reellen Zahl aus K_j entsteht. (Details siehe Skript) $\square$

Folgerung (25.6)

Sei $\mathcal{P}$ eine beliebige Teilmenge mit $\mathcal{P} \supseteq \{(0,0), (1,0)\}$. Setzen wir $L = \mathbb{Q}(\mathcal{P}_{\mathbb{R}})$, dann ist $[L(a) : L]$ für jedes $a \in (\mathcal{P}_{\text{con}})_{\mathbb{R}}$ eine **Zweierpotenz**.

Die Unmöglichkeit klassischer Konstruktionsaufgaben

Als **Quadratur des Kreises** bezeichnet man das Problem, zu einem gegebenen Kreis in endlich vielen Schritten ein Quadrat mit **demselben Flächeninhalt** zu konstruieren.

Folgerung (25.7)

Die Quadratur des Kreises ist unmöglich.

Beweis von Folgerung 25.7

Annahme: Quadratur des Kreises ist möglich

Rindemann (1882): π ist transzendent (über $\mathbb{Q}$)

Zeit Ann. kann ein Quadrat konstruiert werden, das denselben Flächeninhalt (π) hat wie der Einheitskreis. Dieses Quadrat hätte die Seitenlänge $\sqrt{\pi}$. Folgerung 26.6 $\Rightarrow \sqrt{\pi}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$ (und $[\mathbb{Q}(\sqrt{\pi}) : \mathbb{Q}]$ eine Zerrepotenz) $\Rightarrow \pi$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$ $\downarrow$ □

Die Unmöglichkeit klassischer Konstruktionsaufgaben

Unter dem **Delischen Problem** versteht man die Aufgabe, aus der Kantenlänge a eines Würfels die Kantenlänge eines Würfels mit **doppeltem Volumen** zu konstruieren.

Folgerung (25.8)

Das Delische Problem ist unlösbar.

Die Unmöglichkeit klassischer Konstruktionsaufgaben

Als **Winkeldreiteilung** bezeichnet man die Konstruktionsaufgabe, zu zwei Geraden, die sich in einem Winkel mit einem Bogenmaß α schneiden, jeweils zwei weitere Geraden zu konstruieren, deren Schnittwinkel im Bogemaß $\frac{1}{3}\alpha$ beträgt.

Folgerung (25.9)

Die Winkeldreiteilung ist unmöglich.

Beweis von Folgerung 25.9

Annahme: Die Winkeldreiteilung ist möglich.

Sei $P = (0,0), (1,0)$ zeige zunächst: Der Punkt

$$(\cos(60^\circ), \sin(60^\circ)) = (\cos(\frac{\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{3})) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) \text{ ist aus}$$

P konstruierbar. $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2 \xrightarrow{\text{Satz 25.5}} \text{jedes Element}$
von $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ liegt in $(P_{\text{con}})\mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3} \in (P_{\text{con}})\mathbb{R} \Rightarrow P :=$

$(\cos(60^\circ), \sin(60^\circ)) \in P_{\text{con}}$. Die Gerade durch $(0,0)$ und P
schneidet die x -Achse im 60° -Winkel. Aus der Annahme
folgt, dass sich damit auch zwei Geraden g, h konstruieren lassen,
die sich in einem 20° -Winkel schneiden.



Sei p der Schnittpunkt der Geraden g und h .
Konstruiere in p den Einheitskreis (durch
Verschiebung der Strecke zwischen $(0,0)$ und $(1,0)$
auf die Strecke zw. p und (p_x+1, p_y)). Sei
 q der Schnittpkt. von g mit dem Kreis und
 r der Schnittpunkt von h mit dem Kreis.
Fälle das Lot von r senkrecht auf die Gerade
 g . Sei q' der Schnittpkt. der Senkrechten
mit g . Dann haben p und q' den Abstand
 $\cos(20^\circ) \Rightarrow \cos(20^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ ist eine
konstruierbare reelle Zahl.

Sei $\zeta = e^{\frac{\pi i}{9}} = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$, eine primitive
 18-te Einheitswurzel $\Rightarrow [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(18)$
 $= \varphi(2) \cdot \varphi(9) = 1 \cdot 6 = 6$

ζ ist Nullst. des Pol. $x^2 - (\zeta + \zeta^{-1})x + 1 \in \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})[x]$

Wobei $\zeta + \zeta^{-1} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \Rightarrow [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right))] \leq 2$

$\zeta \notin \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right))] = 2$

Gradformel $\Rightarrow 6 = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right))] \cdot$

$[\mathbb{Q}(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot [\mathbb{Q}(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)) : \mathbb{Q}] \Rightarrow$

$[\mathbb{Q}(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)) : \mathbb{Q}] = 3$ keine Zweierpotenz $\Rightarrow$ Folgerung 25.6

$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \notin (\mathbb{P}_{\cos})\mathbb{R} \quad \nabla$

□

Proposition (25.10)

Sei $r \in \mathbb{N}_0$ und K ein Zwischenkörper von $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft, dass $K|\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung und $[K : \mathbb{Q}] = 2^r$ ist. Dann gilt $K \subseteq (\mathcal{P}_{\text{con}})_{\mathbb{R}}$ für $\mathcal{P} = \{(0, 0), (1, 0)\}$.

Die Konstruierbarkeit der regelmäßigen n -Ecke

Als **regelmäßiges n -Eck** bezeichnen wir das Polygon mit den Eckpunkten $P_{n,k} = (\cos(\frac{2k\pi}{n}), \sin(\frac{2k\pi}{n}))$ mit $0 \leq k < n$.

Die Zahlen der Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben durch $F_n = 2^{2^n} + 1$ sind unter dem Namen **Fermat-Zahlen** bekannt. Die Primzahlen unter ihnen werden als **Fermatsche Primzahlen** bezeichnet. Bisher sind nur fünf Fermat-Primzahlen bekannt, nämlich $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ und $F_4 = 65537$.

Satz (25.11)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Das regelmäßige n -Eck ist genau dann aus $\mathcal{P} = \{(0, 0), (1, 0)\}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn $r, s \in \mathbb{N}_0$ und verschiedene Fermatsche Primzahlen $p_1, \dots, p_s$ existieren, so dass die Gleichung $n = 2^r \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_s$ erfüllt ist.