§ 26. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Definition (26.1)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige Teilmenge. Wir bezeichnen einen Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ als elementar konstruierbar aus $\mathcal{P}$, wenn Punkte $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{P}$ mit $p_1 \neq p_2$ und $p_3 \neq p_4$ existieren, so dass auf q eine der folgenden Aussagen zutrifft.

(1) Der Punkt q ist Schnittpunkt der Geraden durch p_1 und p_2 mit der Geraden durch p_3 und p_4, wobei die beiden Geraden aber nicht zusammenfallen.

(2) Der Punkt q ist ein Schnittpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt p_1 durch den Punkt p_2 mit der Geraden durch die Punkte p_3 und p_4.

(3) Der Punkt q ist ein Schnittpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt p_1 durch den Punkt p_2 mit dem Mittelpunkt p_3 durch den Punkt p_4.

Mehrschrittige Konstruktionen

Definition (26.2)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir definieren rekursiv eine Folge $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Teilmengen $\mathcal{P}_n \subseteq \mathbb{R}^2$ durch folgende Vorschrift: Zunächst setzen wir $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$. Ist nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{P}_n$ bereits definiert, dann bezeichen wir mit $\mathcal{Q}$ die Menge der Punkte, die aus $\mathcal{P}_n$ elementar konstruierbar sind, und setzen $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \cup \mathcal{Q}$. Die Punkte der Menge

$$\mathcal{P}_{\mathrm{con}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$$

bezeichnen wir dann als die Menge der aus $\mathcal{P}$ konstruierbaren Punkte.

Es ist $\mathcal{P}_{\mathrm{con}}$ die kleinste Obermenge von $\mathcal{P}$, die abgeschlossen unter der elementaren Konstruktion von Punkten ist.

Wichtige geometrische Basiskonstruktionen

I. Konstruktion einer Orthogonalen
durch einen Punkt p_0 einer Geraden g

II. Konstruktion einer Parallelen
zu einer Geraden g durch einen Punkt $p_0 \notin g$

- Enthält eine Punktmenge $\mathcal{P}$ die Punkte $(0,0)$ und $(1,0)$, so erhält man die x-Achse, indem man die beiden Punkte verbindet.
- Die Orthogonale zur x-Achse durch den Punkt $(0,0)$ ist dann die y-Achse.

Konstruierbare reelle Zahlen

Im weiteren Verlauf sind wir vor allem an einer algebraischen Interpretation von $\mathcal{P}_{\text{con}}$ interessiert. Dazu ordnen wir jeder Teilmenge $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Teilmenge

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} = \{x \mid (x, y) \in \mathcal{P}\} \cup \{y \mid (x, y) \in \mathcal{P}\}$$

der reellen Zahlen zu.

Körpereigenschaft der konstruierbaren reellen Zahlen

Satz (26.3)

(i) Ist $\mathcal{P}$ eine beliebige Teilmenge mit $\mathcal{P} \supseteq \{(0,0),(1,0)\}$, dann ist $(\mathcal{P}_{\mathrm{con}})_{\mathbb{R}}$ ein Zwischenkörper von $\mathbb{R}|\mathbb{Q}(\mathcal{P}_{\mathbb{R}})$.

(ii) Für alle $a \in \mathbb{R}^+$ mit $a \in (\mathcal{P}_{\mathrm{con}})_{\mathbb{R}}$ gilt auch $\sqrt{a} \in (\mathcal{P}_{\mathrm{con}})_{\mathbb{R}}$.

Proposition (26.4)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige Teilmenge und K ein Zwischenkörper von $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ mit $(\mathcal{P})_{\mathbb{R}} \subseteq K$. Sei $q = (q_x, q_y)$ aus $\mathcal{P}$ elementar konstruierbar. Dann gilt $[K(q_x) : K] \leq 2$ und ebenso auch $[K(q_y) : K] \leq 2$.

Beweis von Proposition 26.4 (Abschluss)

geg. $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$, $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{P}$, $q \in \mathbb{R}^2$ entstehe aus p_1, p_2, p_3, p_4 durch einen elementaren Konstruktionsschritt

K Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ mit $(\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}} \subseteq K$

Beh. $[K(q_x) : K] \leq 2$ und $[K(q_y) : K] \leq 2$

1. Fall: q entsteht als Schnittpunkt zwei Geraden

bereits gezeigt: Dann gilt sogar $[K(q_x) : K] = 1$ und $[K(q_y) : K] = 1$.

2. Fall: q entsteht als Schnittpunkt eines Kreises mit einer Geraden

Beh. $[K(q_x):K] \leq 2$ und $[K(q_y):K] \leq 2$

1. Fall: q entsteht als Schnittpunkt zwei Geraden

Kreis mit Mittelpunkt p_1 durch p_2:

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-(p_1)_x)^2 + (y-(p_1)_y)^2 = ((p_2)_x - (p_1)_x)^2 + ((p_2)_y - (p_1)_y)^2\}.$$

Wegen $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ sind die Koeffizienten der Gl. in K enthalten. Siehe 1. Fall $\Rightarrow$ Die Gerade durch p_3, p_4 hat die Form $ax + by = c$ mit $a, b, c \in K$ und $a = 1$ oder $b = 1$. Die Gleichung kann im Fall $a = 1$ nach x, sonst nach y aufgelöst werden. Einsetzen in die Kreisgleichung liefert eine quadratische Gleichung in x bzw. y. Eine der Lösungen α ist die x- bzw. y-Koordinate des Schnittpunkts q. Es gilt dann $[K(\alpha):K] \leq 2$. Die andere Koordinate erhält man durch Einsetzen von α in die Geradengleichung. Sie liegt dann ebenfalls in $K(\alpha)$.

$\Rightarrow [K(q_x):K] \leq 2$ und $[K(q_y):K] \leq 2$.

3. Fall: q entsteht als Schnittpunkt zweier Kreise

Gleichungen des Kreises in p_1 durch p_2 bzw. in p_3 durch p_4:

$$K_1: (x-(p_1)_x)^2 + (y-(p_1)_y)^2 = ((p_2)_x-(p_1)_x)^2 + ((p_2)_y-(p_1)_y)^2$$

$$K_2: (x-(p_3)_x)^2 + (y-(p_3)_y)^2 = ((p_4)_x-(p_3)_x)^2 + ((p_4)_y-(p_3)_y)^2$$

Die Koeffizienten beider Gleichungen liegen in K. Die Subtraktion der beiden Gl. liefert eine lineare Gleichung in x und y, dessen linke Seite ungleich null ist. (Grund: Ansonsten wäre das ursprüngliche Gleichungssystem entweder un-

z

(2

„(1

q

Zeig

durch

Inf.

den

lösbar, oder es hätte unendlich viele Lösungen, in Abhängigkeit von der rechten Seite. Das würde bedeuten, dass die Kreise sich entweder nicht schneiden oder zusammenfallen.)

Die lineare Gleichung kann nach x oder y aufgelöst und in die erste Kreisgleichung eingesetzt werden. $\Rightarrow$ erhalte die x- oder die y-Koordinate von q als Lösung einer quadr. Gleichung über K.

Wie im 2. Fall folgt $[K(q_x):K] \leq 2$ und $[K(q_y):K] \leq 2$.

$\square$

Algebraisches Kriterium für die Konstruierbarkeit

Satz (26.5)

Sei $\mathcal{P}$ eine beliebige Teilmenge mit $\mathcal{P} \supseteq \{(0,0),(1,0)\}$. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ liegt genau dann in $(\mathcal{P}_{\mathrm{con}})_{\mathbb{R}}$, wenn eine Körperkette

$$\mathbb{Q}(\mathcal{P}_{\mathbb{R}}) \quad = \quad L_0 \quad \subseteq \quad L_1 \quad \subseteq \quad \ldots \quad \subseteq \quad L_{r-1} \quad \subseteq \quad L_r$$

mit $a \in L_r$ und $[L_{j+1} : L_j] \leq 2$ für $0 \leq j < r$ existiert.

Beweis von Satz 26.5

geg. $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(0,0), (1,0) \in \mathcal{P}$, $a \in \mathbb{R}$

z.zg.: Äquivalenz der Aussagen (1) $a \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$

(2) Es gibt eine Körperkette $L_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{P}_{\mathbb{R}}) \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_r \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in L_r$ und $[L_j : L_{j-1}] \leq 2$ für $1 \leq j \leq r$.

„(1) $\Rightarrow$ (2)" Nach Voraussetzung existiert ein Punkt q mit $q_x = a$ oder $q_y = a$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $q \in \mathcal{P}_n$.

Zeige die Existenz einer Körperkette der angeg. Form durch vollst. Ind. über n.

Ind.-anf. $n = 0$: Dann gilt $q \in \mathcal{P}$. $\Rightarrow q_x, q_y$

en.)

esetzt

näte

e K

$y). K] \le 2$

□

$\in P_{\mathbb{R}} \Rightarrow a \in P_{\mathbb{R}} \Rightarrow a \in \mathbb{Q}(P_{\mathbb{R}})$ Die Körperkette der Länge $r = 0$ mit $L_0 = \mathbb{Q}(P_{\mathbb{R}})$ erfüllt alle Bedingungen

Ind-Schritt $n \mapsto n+1$: Setze $q \in P_{n+1}$ voraus

Nach Def gilt $P_{n+1} = P_n \cup Q$, wobei Q die Menge der aus P_n elementar konstruierbaren Punkte bezeichnet.

$\Rightarrow q \in P_n$ oder $q \in Q$.

1. Fall: $q \in P_n$ Anwendung der Ind-V. liefert die Aussage

2. Fall: $q \in Q$ Dann entsteht q durch einen elementaren Konstruktionsschritt aus vier Punkten $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P_n$. Ind-V. $\Rightarrow$ Es gibt eine Körperkette $K_0 = \mathbb{Q}(P_{con}) \subseteq \dots \subseteq L_r$ mit $[L_j : L_{j-1}] \le 2$ für $1 \le j \le r$, $L_r \subseteq \mathbb{R}$ und $(p_1)_x \in L_r$. Nach evtl.

Verlängerung der Kette liegen auch $(p_1)_y$ und die Koordinaten von p_2, p_3, p_4 in L_r. Wende Prop. 26.4 auf den Körper L_r und den Punkt q an. $\Rightarrow [L_r(q_x) : L_r] \leq 2$ und $[L_r(q_y) : L_r] \leq 2$ $\Rightarrow [L_r(a) : L_r] \leq 2$. Setzen wir $L_{r+1} = L_r(a)$, erhalten wir insgesamt eine Körperkette wie angeg.

„(2) $\Rightarrow$ (1)" geg: Körperkette $L_0 = \mathbb{Q}(\mathcal{P}_\mathbb{R}) \subseteq L_1 \subseteq \dots$
$\subseteq L_r$ mit $a \in L_r$, $L_r \subseteq \mathbb{R}$, $[L_j : L_{j-1}] \le 2$ für $1 \le j \le r$

z.zg: $a \in (\mathcal{P}_{con})_\mathbb{R}$ Beweise die Aussage durch vollst. Ind über $r \in \mathbb{N}_0$.

Ind.-Anf.: $r = 0$ Dann gilt $a \in \mathbb{Q}(\mathcal{P}_\mathbb{R})$. Nach Satz 26.3 ist $(\mathcal{P}_{con})_\mathbb{R}$ ein Zwischenkörper von $\mathbb{R} | \mathbb{Q}(\mathcal{P}_\mathbb{R})$

$\Longrightarrow a \in (\mathcal{P}_{con})_\mathbb{R}$

Ind.-Schritt $r \mapsto r+1$: Nach Ind.-Voraussetzung liegen alle Elemente von L_r in $(\mathcal{P}_{con})_\mathbb{R}$, d.h. $L_r \subseteq (\mathcal{P}_{con})_\mathbb{R}$

Ind-Schritt $r \mapsto r+1$. Nach Ind-Voraussetzung liegen alle Elemente von L_r im $(\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$, d.h. $L_r \subseteq (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$

$[L_{r+1} : L_r] \leq 2$, $a \in L_{r+1} \Rightarrow [L_r(a) : L_r] \leq 2 \xRightarrow{\S 14}$ $\exists\, c \in L_r$, $c \geq 0$ und $L_r(a) = L_r(\sqrt{c})$. $c \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$, $L_r \subseteq (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}} \xRightarrow{\text{Prop } 26.3} \Rightarrow \sqrt{c} \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}} \xRightarrow{\text{Körpererg.}} L_r(\sqrt{c}) \subseteq (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$
$\Rightarrow a \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$. $\square$

Folgerung (26.6)

Sei $\mathcal{P}$ eine beliebige Teilmenge mit $\mathcal{P} \supseteq \{(0,0),(1,0)\}$. Setzen wir $L = \mathbb{Q}(\mathcal{P}_{\mathbb{R}})$, dann ist $[L(a) : L]$ für jedes $a \in (\mathcal{P}_{\mathrm{con}})_{\mathbb{R}}$ eine Zweierpotenz .

Als Quadratur des Kreises bezeichnet man das Problem, zu einem gegebenen Kreis in endlich vielen Schritten ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt zu konstruieren.

Folgerung (26.7)

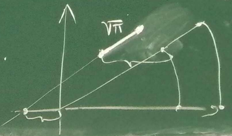
Die Quadratur des Kreises ist unmöglich.

Beweis von Folgerung 26.7

Angenommen, die Quadratur des Kreises ist möglich. Dann kann sie auf den Einheitskreis um $(0,0)$ angewendet werden. Flächeninhalt des Kreises ist π $\Rightarrow$ Ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt hat die Kantenlänge $\sqrt{\pi}$.

Annahme $\Rightarrow$ Aus $P = \{(0,0),(1,0)\}$ lassen sich zwei Punkte mit Abstand $\sqrt{\pi}$ konstruieren.

Daraus folgt $\sqrt{\pi} \in (P_{kon})_{\mathbb{R}}$.



Folgerung 26.6 $\Rightarrow$

A
m
be
de
We
cos
Zal
Die
P s

$[\mathbb{Q}(\sqrt{\pi}):\mathbb{Q}]$ ist Zweierpotenz, insb. ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{\pi})|\mathbb{Q}$ endlich und damit auch algebraisch $\Rightarrow \sqrt{\pi}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow \pi = (\sqrt{\pi})^2$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$ ↯, da π transzendent

Unter dem Delischen Problem versteht man die Aufgabe, aus der Kantenlänge a eines Würfels die Kantenlänge eines Würfels mit doppeltem Volumen zu konstruieren.

Folgerung (26.8)

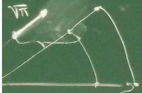
Das Delische Problem ist unlösbar.

Als Winkeldreiteilung bezeichnet man die Konstruktionsaufgabe, zu zwei Geraden, die sich in einem Winkel mit einem Bogenmaß α schneiden, jeweils zwei weitere Geraden zu konstruieren, deren Schnittwinkel im Bogemäß $\frac{1}{3}\alpha$ beträgt.

Folgerung (26.9)

Die Winkeldreiteilung ist unmöglich.

t
skreis
inhalt
damsel-
$\sqrt{\pi}$.
assen
onstruieren.



Beweis von Folgerung 26.9.

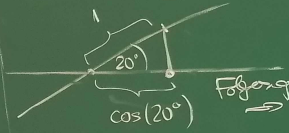
Angenommen, die Winkeldreiteilung ist möglich. Der 60°-Winkel (Bogenmaß $\frac{\pi}{3}$) ist bereits aus $\mathcal{P} = \{(0,0),(1,0)\}$ konstruierbar, denn: $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Wegen $[\mathbb{Q}(\frac{1}{2}):\mathbb{Q}] = 1$, $[\mathbb{Q}(\frac{1}{2}\sqrt{3}):\mathbb{Q}] = 2$ sind $\cos(\frac{\pi}{3})$, $\sin(\frac{\pi}{3})$ (aus $\mathcal{P}$) konstruierbare reelle Zahlen. $\Rightarrow P = (\cos(\frac{\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{3})) \in \mathcal{P}_{con}$

Die x-Achse und die Gerade durch $(0,0)$ und P schneiden sich im Winkel $\frac{\pi}{3}$.

...Zahlen. $\Rightarrow P = (\cos(\frac{\pi}{3}), \sin(\frac{\pi}{3})) \in \mathbb{P}_{con}$

Aus der Annahme folgt, dass dann auch der 20°-Winkel ($20° = \frac{\pi}{9}$) konstruierbar ist. Damit wären auch zwei Punkte mit Abstand $\cos(\frac{\pi}{9})$ konstruierbar



$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) \in (\mathbb{P}_{con})_{\mathbb{R}}$$

$\xRightarrow{\text{Folgerung 26.6}}$ $[\mathbb{Q}(\cos(\frac{\pi}{9})) : \mathbb{Q}]$ ist eine Zweierpotenz. Sei $\zeta = \zeta_{18} = e^{\pi i/9}$, eine primitive 18-te Einheitswurzel. $|\zeta| = 1 \Rightarrow$

$\zeta\bar{\zeta} = |\zeta|^2 = 1 \Rightarrow \zeta^{-1} = \bar{\zeta}$, $\zeta = \cos(\frac{\pi}{9}) + i\sin(\frac{\pi}{9})$

$\Rightarrow \zeta + \zeta^{-1} = \zeta + \bar{\zeta} = 2\cos(\frac{\pi}{9})$. $\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{9}) \in \mathbb{Q}(\zeta)$

$\zeta^2 - (\zeta + \zeta^{-1})\zeta + 1 = 0 \Rightarrow \zeta$ ist Nullstelle des Polynoms $x^2 - 2\cos(\frac{\pi}{9}) + 1 \in \mathbb{Q}(\cos(\frac{\pi}{9}))[x]$

Dies Pol. ist irred. wegen $\mathbb{Q}(\cos(\frac{\pi}{9})) \subseteq \mathbb{R}$, $\zeta \notin \mathbb{R}$ und weil das Pol. vom Grad 2 ist. $\Rightarrow [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\cos(\frac{\pi}{9}))] = 2$

außerdem: $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \varphi(18) = \varphi(2) \cdot \varphi(9) = 6$

Gradformel $\Rightarrow 6 = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\cos(\frac{\pi}{9}))] \cdot [\mathbb{Q}(\cos(\frac{\pi}{9})) : \mathbb{Q}]$

$= 2 \cdot [\mathbb{Q}(\cos(\frac{\pi}{9})) : \mathbb{Q}] \Rightarrow [\mathbb{Q}(\cos(\frac{\pi}{9})) : \mathbb{Q}] = 3$ ↯ keine Zweierpotenz

$\square$