§ 26. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Definition (26.1)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige Teilmenge. Wir bezeichnen einen Punkt $q \in \mathbb{R}^2$ als elementar konstruierbar aus $\mathcal{P}$, wenn Punkte $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{P}$ mit $p_1 \neq p_2$ und $p_3 \neq p_4$ existieren, so dass auf q eine der folgenden Aussagen zutrifft.

(1) Der Punkt q ist Schnittpunkt der Geraden durch p_1 und p_2 mit der Geraden durch p_3 und p_4, wobei die beiden Geraden aber nicht zusammenfallen.

(2) Der Punkt q ist ein Schnittpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt p_1 durch den Punkt p_2 mit der Geraden durch die Punkte p_3 und p_4.

(3) Der Punkt q ist ein Schnittpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt p_1 durch den Punkt p_2 mit dem Mittelpunkt p_3 durch den Punkt p_4.

Mehrschrittige Konstruktionen

Definition (26.2)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir definieren rekursiv eine Folge $(\mathcal{P}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Teilmengen $\mathcal{P}_n \subseteq \mathbb{R}^2$ durch folgende Vorschrift: Zunächst setzen wir $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$. Ist nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{P}_n$ bereits definiert, dann bezeichen wir mit $\mathcal{Q}$ die Menge der Punkte, die aus $\mathcal{P}_n$ elementar konstruierbar sind, und setzen $\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \cup \mathcal{Q}$. Die Punkte der Menge

$$\mathcal{P}_{\mathrm{con}} \quad = \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$$

bezeichnen wir dann als die Menge der aus $\mathcal{P}$ konstruierbaren Punkte.

Es ist $\mathcal{P}_{\mathrm{con}}$ die kleinste Obermenge von $\mathcal{P}$, die abgeschlossen unter der elementaren Konstruktion von Punkten ist.

Wichtige geometrische Basiskonstruktionen

I. Konstruktion einer Orthogonalen
durch einen Punkt p_0 einer Geraden g

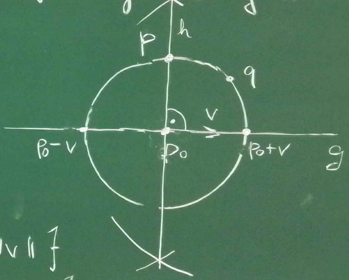
II. Konstruktion einer Parallelen
zu einer Geraden g durch einen Punkt $p_0 \notin g$

- Enthält eine Punktmenge $\mathcal{P}$ die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 0)$, so erhält man die x-Achse, indem man die beiden Punkte verbindet.
- Die Orthogonale zur x-Achse durch den Punkt $(0, 0)$ ist dann die y-Achse.

$\Leftrightarrow \langle r-2v, p \rangle + 4 \langle v, p_0 \rangle =$

Basiskonstruktionen

I Errichtung der Senkrechten auf der Geraden g durch einen geg. Punkt $p_0 \in g$



Für die Konstruktion von h werden die folgenden beiden Kreise miteinander geschnitten.

$$K_+ = \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid \| p - (p_0 + v) \| = 2 \|v\| \}$$

$$K_- = \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid \| p - (p_0 - v) \| = 2 \|v\| \}$$

Für alle $p \in \mathbb{R}^2$ gilt: $p \in K_+ \cap K_- \iff$

$\|p-(p_0+v)\| = 2\|v\| \,,\, \|p-(p_0-v)\| = 2\|v\| \iff$

$\|p-(p_0+v)\|^2 = 4\|v\|^2 \,,\, \|p-(p_0-v)\|^2 = 4\|v\|^2 \iff$

$\langle p-(p_0+v), p-(p_0+v)\rangle = 4\langle v,v\rangle \,,\, \langle p-(p_0-v), p-(p_0-v)\rangle =$
$4\langle v,v\rangle \iff \langle p,p\rangle - 2\langle p_0+v, p\rangle + \langle p_0+v, p_0+v\rangle$
$= 4\cancel{\langle v,v\rangle} \,,\, \cancel{\langle p,p\rangle} - 2\langle p_0-v, p\rangle + \langle p_0-v, p_0-v\rangle = 4\cancel{\langle v,v\rangle}$

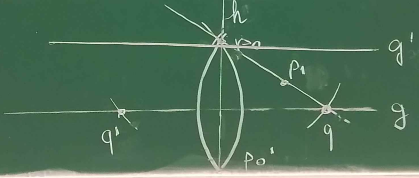
Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt

$-2\langle p_0+v, p\rangle + 2\langle p_0-v, p\rangle + \langle p_0+v, p_0+v\rangle - \langle p_0-v, p_0-v\rangle = 0$
$\iff 2\langle p_0-v-(p_0+v), p\rangle + \cancel{\langle p_0,p_0\rangle} + 2\langle v,p_0\rangle + \cancel{\langle v,v\rangle} - \cancel{\langle p_0,p_0\rangle}$
$+ 2\langle v,p_0\rangle - \cancel{\langle v,v\rangle} = 0 \iff 2\langle -2v, p\rangle + 4\langle v,p_0\rangle = 0$

$$-4\langle v, p\rangle + 4\langle v, p_0\rangle = 0 \Leftrightarrow 4\langle v, p_0 - p\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v, p_0 - p\rangle = 0$$

Ergebnis: $(p_0 - p) \perp v$, d.h. die Gerade h durch p_0 und die Schnittpunkte p, p' der beiden Kreise steht senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden g

II. Parallelenkonstruktion



(1) Sei q der Schnittpunkt von g mit der Geraden durch p_0 und p_1.
Konstruiere den Schnittpunkt q' des Kreises in q durch p_0 mit g.

(2) Konstruiere die Mittelsenkrechte h der Strecke $\overline{qq'}$.

(3) Errichte mit I die Senkrechte zur Geraden h durch den Punkt p_0. Diese Gerade g' ist dann zu g parallel.

Konstruierbare reelle Zahlen

Im weiteren Verlauf sind wir vor allem an einer algebraischen Interpretation von $\mathcal{P}_{\text{con}}$ interessiert. Dazu ordnen wir jeder Teilmenge $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Teilmenge

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} \quad = \quad \{x \mid (x, y) \in \mathcal{P}\} \cup \{y \mid (x, y) \in \mathcal{P}\}$$

der reellen Zahlen zu.

Körpereigenschaft der konstruierbaren reellen Zahlen

Satz (26.3)

(i) Ist $\mathcal{P}$ eine beliebige Teilmenge mit $\mathcal{P} \supseteq \{(0,0),(1,0)\}$, dann ist $(\mathcal{P}_{\mathrm{con}})_{\mathbb{R}}$ ein Zwischenkörper von $\mathbb{R}|\mathbb{Q}(\mathcal{P}_{\mathbb{R}})$.

(ii) Für alle $a \in \mathbb{R}^+$ mit $a \in (\mathcal{P}_{\mathrm{con}})_{\mathbb{R}}$ gilt auch $\sqrt{a} \in (\mathcal{P}_{\mathrm{con}})_{\mathbb{R}}$.

O.

…unkt der
…trecke
$\mathcal{P}_{con}$.

Beweis von Satz 26.3

zu (i) Aus $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_{con}$ folgt $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} \subseteq (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$.

Beh: $(\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$ ist Teilkörper von $\mathbb{R}$

Es genügt, zu überprüfen:

(1) $1 \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$ (2) $\forall a \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}: -a \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$

(3) $\forall a, b \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$ mit $a, b > 0$ gilt

$$a+b,\ a-b,\ ab,\ a^{-1} \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$$

Erinnerung: $(\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}} = \{x \mid (x,y) \in \mathcal{P}_{con}\} \cup \{y \mid (x,y) \in \mathcal{P}_{con}\}$

zu (1) folgt direkt aus $(1,0) \in \mathcal{P}$ und $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_{con}$.

Aus $(a,0) \in \mathcal{P}_{con}$ folgt: $(a,0) \in \mathcal{P}_{con}$ (schneide die

$\Rightarrow$

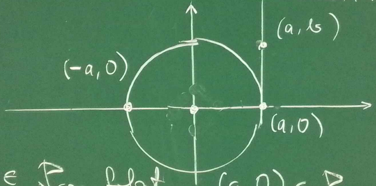
achte

$\Rightarrow$

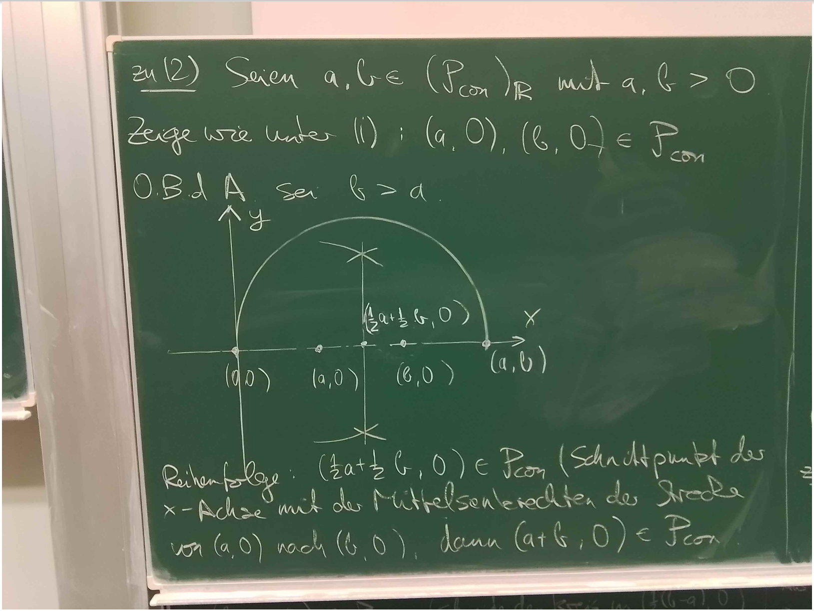
$(b-a),0)$

$\in \mathcal{P}_{con}$

<u>zu (2)</u> Sei $a \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists\, b \in \mathbb{R}$ mit $(a,b) \in \mathcal{P}_{con}$ oder $(b,a) \in \mathcal{P}_{con}$. Betrachte hier nur den Fall $(a,b) \in \mathcal{P}_{con}$.



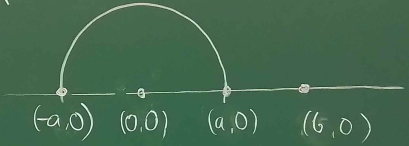
Aus $(a,b) \in \mathcal{P}_{con}$ folgt $(a,0) \in \mathcal{P}_{con}$ (schneide die Parallele zur y-Achse mit der x-Achse), und daraus wiederum $(-a,0) \in \mathcal{P}_{con}$ (schneide die x-Achse mit dem Kreis in $(0,0)$ durch $(a,0)$). $\Rightarrow -a \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$



Korrektur:

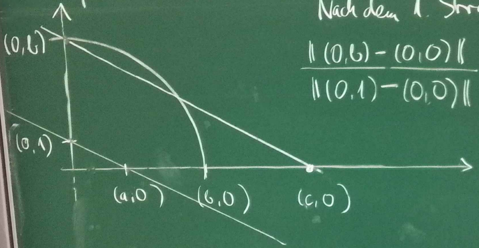
Der letzte Punkt auf der x-Achse ist $(a+b, 0)$, nicht (a, b).

Subtraktion: o.B.d.A. $b > a$



Reihenfolge: $(a,0) \in P_{con} \Rightarrow (-a,0) \in P_{con} \Rightarrow$
$\left(\frac{1}{2}(b-a), 0\right) \in P_{con}$ (durch Mittelsenkrechte der Strecke zwischen $(-a,0)$ und $(b,0)$) $\Rightarrow$
$(b-a, 0) \in P_{con}$ (schneide den Kreis um $\left(\frac{1}{2}(b-a), 0\right)$ durch $(0,0)$ mit der x-Achse) $\Rightarrow b-a \in P_{con}$

Multiplikation:



Nach dem 1. Strahlensatz gilt

$$\frac{\|(0,b)-(0,0)\|}{\|(0,1)-(0,0)\|} = \frac{\|(c,0)-(0,0)\|}{\|(a,0)-(0,0)\|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{1} = \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow c = ab$$

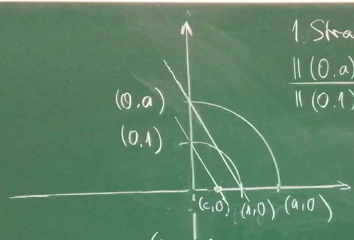
Reihenfolge: $(b,0) \in P_{con} \Rightarrow (0,b) \in P_{con}$

$(1,0) \in P_{con} \Rightarrow (0,1) \in P_{con}$

$(0,b) \in P_{con} \Rightarrow (c,0) \in P_{con}$ (schneide die Parallele zur Geraden durch $(0,1)$, $(a,0)$ mit der x-Achse) $\Rightarrow c = ab \in P_{con}$

Reihenfolge: $(b,0) \in \mathcal{P}_{con} \Rightarrow (0,b) \in \mathcal{P}_{con}$

Inverse:



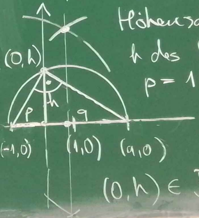
1. Strahlensatz:

$$\frac{\|(0,a)-(0,0)\|}{\|(0,1)-(0,0)\|} = \frac{\|(1,0)-(0,0)\|}{\|(c,0)-(0,0)\|}$$

$$\iff \frac{a}{1} = \frac{1}{c} \iff c = a^{-1}$$

zu (ii) zu zeigen: $a \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}},\ a > 0 \Rightarrow \sqrt{a} \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$

Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{(-1,0),(a,0)} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{2}(a-1), 0\right)$ Schlage über diesen Punkt einen Halbkreis.



Höhensatz $\Rightarrow$ Für die Höhe h des Dreiecks gilt $h^2 = pq$

$p = 1,\ q = a \Rightarrow h^2 = 1 \cdot a = a$

$\Rightarrow h = \sqrt{a}$

$(0,h) \in \mathcal{P}_{con} \Rightarrow h \in (\mathcal{P}_{con})_{\mathbb{R}}$

Proposition (26.4)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige Teilmenge und K ein Zwischenkörper von $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ mit $(\mathcal{P})_{\mathbb{R}} \subseteq K$. Sei $q = (q_x, q_y)$ aus $\mathcal{P}$ elementar konstruierbar. Dann gilt $[K(q_x) : K] \leq 2$ und ebenso auch $[K(q_y) : K] \leq 2$.

Beweis von Prop. 26.4.

geg: $P \subseteq \mathbb{R}^2$, K Zwischenkörper von $\mathbb{R} | \mathbb{Q}$ mit $P_{\mathbb{R}} \subseteq K$, $q = (q_x, q_y)$ elementar konstruierbar aus P

$\Rightarrow [K(q_x) : K] \leq 2$, $[K(q_y) : K] \leq 2$

1. Fall: q entsteht als Schnittpunkt der Geraden durch p_1, p_2 und p_3, p_4, wobei $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$ mit $p_1 \neq p_2$, $p_3 \neq p_4$

Setze die Gerade g durch p_1, p_2 an in der Form

$g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. <u>Fall</u>: q entsteht als Schnittpunkt der Geraden durch p_1, p_2 und p_3, p_4, wobei $p_1, p_2, p_3, p_4 \in P$ mit

$p_1 \neq p_2$, $p_3 \neq p_4$

und $(a,b) \neq (0,0)$ $p_1, p_2 \in g \Rightarrow (a,b,c)$ ist eine Lösung des LGS $a(p_1)_x + b(p_1)_y = c$, $a(p_2)_x + b(p_2)_y = c$

Wegen $(p_1)_x, (p_1)_y, (p_2)_x, (p_2)_y \in K$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung (a,b,c) mit $a=1$ oder $b=1$. o.B.d.A. $a=1$.

Genauso findet man eine Gerade der Form

$h = \{(x,y) \mid ux + vy = d\}$ durch p_3, p_4 mit $d, u, v \in K$

und $u = 1$ oder $v = 1$.

Der Punkt q liegt auf $g \cap h$, ist somit die eind. bestimmte Lösung des LGS $ax + by = c$, $ux + vy = d$. Wegen $a, b, c, d, u, v \in K$ liegen auch die Koordinaten der Lösung $q = (q_x, q_y)$ im Körper K. $\Rightarrow [K(q_x):K] = [K(q_y):K] = 1$ in diesem Fall.