geg: Körper K , $\text{char}(K) \neq 2, 3$

Ziel: Bestimmung der Lösungen von

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

in einem algebraischen Abschluss K^{alg} von K , wobei $a, b, c \in K$ bel. vorgeg. sind.

Setze $f = x^3 + ax^2 + bx + c$, $g = f(x - \frac{1}{3}a)$

$$\Rightarrow g = (x - \frac{1}{3}a)^3 + a(x - \frac{1}{3}a)^2 + b(x - \frac{1}{3}a) + c =$$

$$x^3 - ax^2 + \frac{1}{3}a^2x - \frac{1}{27}a^3 + ax^2 - \frac{2}{3}ax + \frac{1}{9}a^3 + bx - \frac{1}{3}ab$$

$$+ c = x^3 + (b - \frac{1}{3}a^2)x + (\frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c)$$

$$= x^3 + px + q \text{ mit } p = b - \frac{1}{3}a^2, q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$$

Bem. Es ist x genau dann eine Nullstelle von g ,
wenn $x - \frac{1}{3}a$ eine Nullstelle von f ist

neues Ziel. Bestimme die Nullstellen von $f = x^3 + px + q \in K[x]$,
wobei $p, q \in K$ bel. vorgeg. sind.

Überlegung. Sei $x \in K^{\text{alg}}$, schreibe $x = \beta + \gamma$ mit
noch zu bestimmenden $\beta, \gamma \in K^{\text{alg}}$ $\Rightarrow (\beta + \gamma)^3 =$

$$\beta^3 + 3\beta^2\gamma + 3\beta\gamma^2 + \gamma^3 \rightarrow$$

$$(\beta + \gamma)^3 - 3\beta\gamma(\beta + \gamma) - (\beta^3 + \gamma^3) = 0$$

Beob. $\beta + \gamma$ ist eine Nullstelle von f , wenn
die Gleichungen $-3\beta\gamma = p$ und $-(\beta^3 + \gamma^3) = q$ erfüllt sind.

Ang., diese beiden Gleichungen gelten.

Dann sind β^3, γ^3 die Nullstellen von

$$h = (x - \beta^3)(x - \gamma^3) = x^2 - (\beta^3 + \gamma^3)x + \beta^3\gamma^3$$
$$= x^2 + qx + (\beta\gamma)^3 = x^2 + qx - \frac{1}{27}p^3$$

Man nennt h die quadratische Resolvente
von $x^3 + px + q = 0$.

Lösungsansatz

- Bestimme die Nullstellen

$$-\frac{1}{2}q \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Delta(h)} = -\frac{1}{2}q \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}$$

$\Delta(h)$ $\triangleq$ Diskriminante
des Polynoms h .

fall

=

$\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$

zweite
fall

• Ziehe aus einer der Nullstellen die dritte Wurzel, bezeichne diese mit β

• Falls $\beta \neq 0$ ist, setze $\gamma = -\frac{1}{3}\beta^{-1}$

Dann ist $\alpha_1 = \beta + \gamma$ eine Lösung von $f = 0$.

• Sei $\rho = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, eine primitive 3-te Einheitswurzel. Es gilt $\rho^2 + \rho + 1 = 0$ und damit auch $\rho^3 = 1$. Man kann jetzt überprüfen, dass auch $\alpha_2 = \rho\beta + \rho^2\gamma$, $\alpha_3 = \rho^2\beta + \rho\gamma$ Lösungen der Gleichung sind.

na
 q^2
Nur
and
→
nach
Wie
 $S\beta$
den
wo
zeigt
Ausw
hina

Satz (21.1)

Seien K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 2, 3$ und $p, q \in K$, L ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper, $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und außerdem

$$\beta = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}, \gamma = \begin{cases} \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} & \text{falls } \beta = 0 \\ -\frac{1}{3}p\beta^{-1} & \text{falls } \beta \neq 0. \end{cases}$$

Dann sind die drei Nullstellen des Polynoms $f = x^3 + px + q \in K[x]$, eventuell mit Vielfachheiten, geben durch

$$\alpha_1 = \beta + \gamma \quad , \quad \alpha_2 = \zeta\beta + \zeta^2\gamma \quad \text{und} \quad \alpha_3 = \zeta^2\beta + \zeta\gamma.$$

Beweis von Satz 21.1

Überprüfe, dass $x_1 = \beta + \gamma$ Nullstelle von f ist.
genügt z.z. (s.o.) $-3\beta\gamma - p, \beta^3 + \gamma^3 = -q$

erste Gleichung, im Fall $\beta \neq 0$ offensichtlich

fall $\beta = 0$ $\beta^3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$

$$= 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} = \frac{1}{2}q \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2 \Rightarrow \frac{1}{27}p^3 = 0 \Rightarrow p = 0$$

$$\Rightarrow p = -3 \cdot 0 \cdot \gamma = -3\beta\gamma$$

zweite Gleichung:

fall $\beta \neq 0$ $\beta^3 = -\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta(w)}$ $\Delta(w) =$

$$+ \beta^3 \gamma^3$$

$$\frac{1}{27} p^3$$

erste

$$\frac{1}{2} \sqrt{q^2 + \frac{4}{27} p^3}$$

$q^2 + \frac{4}{27}p^3 \Rightarrow \beta^3 \gamma^3 = -\left(\frac{1}{3}p\right)^3$ (Produkt der Nullstellen von $h \Rightarrow \gamma^3$ stimmt überein mit der anderen Nullst. von h (neben β^3), nämlich $-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta(h)}$)
 $\rightarrow \beta^3 + \gamma^3 = -q$ Im Fall $\beta=0$ ist die Gleichung nach Def. von f erfüllt. ($\Rightarrow f(x_1) = 0$ gezeigt)

Wie man leicht überprüft, erfüllen auch β^3, γ^3 bzw. β, γ an Stelle von β, γ die beiden Gleichungen, somit sind auch x_2, x_3 Nullst. von f .

zeige noch: $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = f = x^3 + px + q$

Ausmultiplizieren der linken Seite zeigt. Die Gleichung ist äquivalent zu

$$-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = p, \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -9$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (\beta + \gamma) + (s\beta + \gamma^2 \gamma) + (s^2\beta + s\gamma) =$$

$$(1 + s + s^2)\beta + (1 + s + s^2)\gamma = 0 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma = 0$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = (\beta + \gamma)(s\beta + s^2\gamma) = s\beta^2 + (s + s^2)\beta\gamma + s\gamma^2 =$$

$$-\beta\gamma + s\beta^2 + s^2\gamma^2, \quad \text{debenso } \alpha_1 \alpha_3 = -\beta\gamma + s^2\beta^2$$

$$+ s\gamma^2, \quad \alpha_2 \alpha_3 = -\beta\gamma + \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3$$

$$= -3\beta\gamma + 0 \cdot \beta^2 + 0 \cdot \gamma^2 = -3\beta\gamma = p$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = (-\beta\gamma + s\beta^2 + s^2\gamma^2)(s^2\beta + s\gamma) =$$

$$-s^2\beta^2\gamma + \beta^3 + s^4\beta\gamma^2 - s\beta\gamma^2 + s^2\beta^2\gamma + \gamma^3 = \beta^3 + \gamma^3 = -9 \quad \square$$

Ziel: Lösung von Gleichungen der Form

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

wobei $a_0, a_1, a_2, a_3 \in K$, K Körper, $\text{char}(K) \neq 2, 3$

$f(x - \frac{1}{4}a_3)$ hat keinen x^3 -Term $\Rightarrow$ können uns beschränken auf Gleichungen der Form

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \quad (p, q, r \in K)$$

Sei also $f = x^4 + px^2 + qx + r$

Lösungsverfahren nach Ferrari.

Seien $\alpha, \theta \in K^{\text{alg}}$ Es gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^4 + px^2 + qx + r = 0 \Leftrightarrow \\
 x^4 &= -px^2 - qx - r \Leftrightarrow x^4 + x^2\theta + \frac{1}{4}\theta^2 = \\
 x^2\theta + \frac{1}{4}\theta^2 - px^2 - qx - r &\Leftrightarrow \\
 (x^2 + \frac{1}{2}\theta)^2 &= (\sqrt{\theta - p}x)^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 - 4r})^2 - qx
 \end{aligned}$$

Wähle θ und $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ so, dass

$-q \stackrel{(*)}{=} \varepsilon \sqrt{\theta - p} \sqrt{\theta^2 - 4r}$. Erhalte dann

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2}\theta)^2 = (\sqrt{\theta - p}x)^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 - 4r})^2 +$$

$$\varepsilon \sqrt{\theta - p} \sqrt{\theta^2 - 4r} x \Leftrightarrow$$

$$(x + \frac{1}{2}\theta)^2 = (\sqrt{\theta - p}x + \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\theta^2 - 4r})^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\theta - p}\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\theta^2 - 4r} \quad \text{oder}$$

$$\alpha^2 + \frac{1}{2}\theta = -\sqrt{\theta - p}\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{\theta^2 - 4r}$$

Erhalte zwei quadratische Gleichungen für α , die mit der p-q-Formel gelöst werden können

Quadriere die Gleichung (*), erhalte

$$q^2 = (\theta - p)(\theta^2 - 4r) \quad \Leftrightarrow$$

$$\theta^3 - p\theta^2 - 4r\theta + (4pr - q^2) = 0$$

Das ist eine kubische Gleichung. Bestimme

mit den Cardanischen Formeln eine Lösung θ
Wähle dann $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ so, dass (*) erfüllt ist.

Das Polynom $x^3 - px^2 - 4rx + (4pt - q^2)$ $\square$
wird die kubische Resolvante von $f = 0$ genannt

$$\Sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

Operation von $G = S_n$ auf $X = \{x_1, \dots, x_n\}$:

$$\sigma \circ x_k = x_{\sigma(k)} \quad \text{für } \sigma \in S_n, k \in \{1, \dots, n\}$$

Bsp: $(12) \cdot x_1 = x_2, (12) \cdot x_2 = x_1, (12) \cdot x_3 = x_3$

Diese Operation kann auf $R[x_1, x_2, x_3]$ ausgedehnt
werden: $(12) \circ x_1^2 x_2 = x_1 x_2^2, (12) \cdot x_2 x_3 = x_1 x_3$

Satz (21.2)

Seien K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 2, 3$, $p, q, r \in K$ und L ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper. Es sei $\theta \in L$ eine Nullstelle der **kubischen Resolvente** von $f = x^4 + px^2 + qx + r \in K[x]$. Es sei $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ so gewählt, dass die Gleichung $-q = \varepsilon\sqrt{\theta - p} \cdot \sqrt{\theta^2 - 4r}$ erfüllt ist. Dann sind die vier Nullstellen von f , evtl. mit Vielfachheiten, gegeben durch

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{\theta - p} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\theta - p + 2\varepsilon\sqrt{\theta^2 - 4r}}$$

und

$$\alpha_{3,4} = -\frac{1}{2}\sqrt{\theta - p} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\theta - p - 2\varepsilon\sqrt{\theta^2 - 4r}}.$$

Definition (21.3)

Sei R ein Ring, $n \in \mathbb{N}$ und $R[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring über R in n Variablen. Dann bezeichnet man für $1 \leq k \leq n$ das Polynom

$$\varepsilon_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^k x_{i_j}$$

als k -tes elementarsymmetrisches Polynom in $R[x_1, \dots, x_n]$.

Satz (21.4)

Sei R ein beliebiger Ring, $n \in \mathbb{N}$ und $f \in R[x]$ ein normiertes Polynom n -ten Grades, $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Wir nehmen an, dass f über R in Linearfaktoren zerfällt, also

$$f = (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$$

mit geeigneten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$ erfüllt ist. Dann gilt $a_k = (-1)^{n-k} \varepsilon_{n-k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ für $0 \leq k < n$.

Definition (21.5)

Sei R ein beliebiger Ring und $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen ein Polynom $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ als **symmetrisch**, wenn $\sigma(f) = f$ für alle $\sigma \in S_n$ erfüllt ist.

Satz (21.6)

Sei K ein Körper. Ein Polynom $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ ist genau dann symmetrisch, wenn ein Polynom $g \in K[x_1, \dots, x_n]$ mit $f = g(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ existiert.

Definition (21.7)

Sei K ein Körper, und sei $f \in K[x]$ gegeben durch $f = c(x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n)$, mit $c \in K^\times$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Dann bezeichnet man

$$\Delta(f) = c^2 \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

als die **Diskriminante** des Polynoms.

⊕ Berechnung der Diskriminante eines quadratischen Polynom:

$$f = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 + px + q$$

$$p = -(\alpha_1 + \alpha_2), \quad q = \alpha_1 \alpha_2$$

$$\Delta(f) = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2$$

$$= \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_2$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2$$

$$= p^2 - 4q$$

...nf
 $2) \cdot x_3 = x_3$

ausgedehnt

$$x_2 x_3 = x_1 x_3$$