§ 17. Zerfällungskörper und normale Erweiterungen

Definition (17.1)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und $f \in K[x]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zerfällt f über L in Linearfaktoren, und bezeichnen $\alpha_1, ..., \alpha_r$ die Nullstellen von f in L, dann nennt man $K(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ den Zerfällungskörper von f in L über dem Grundkörper K.

Satz (17.2)

Sei K ein Körper. Dann existiert zu jedem nicht-konstanten Polynom $f \in K[x]$ ein Zerfällungskörper von f über K.

Zerfällungskörper von Polynommengen

Definition (17.3)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung, und $S \subseteq K[x]$ eine (möglicherweise unendliche) Menge von nicht-konstanten Polynomen, die über L alle in Linearfaktoren zerfallen. Weiter sei $N \subseteq L$ die Menge aller Nullstellen sämtlicher Polynome aus S in L, also

$$N \quad = \quad \{\alpha \in L \mid f(\alpha) = 0 \text{ für ein } f \in S\}.$$

Dann wird $K(N)$ als Zerfällungskörper von S über dem Grundkörper K bezeichnet.

Satz (17.4)

Ist K ein Körper und $S \subseteq K[x]$ eine Menge nicht-konstanter Polynome, dann existiert ein Zerfällungskörper von S über K.

zum Beweis von Satz 17.4: Zornsches Lemma

Definition (17.18)

Sei $(X, \preceq)$ eine Menge mit einer Halbordnung. Eine Teilmenge $T \subseteq X$ heißt Kette in X, wenn sie nichtleer ist und jeweils zwei Elemente $x, y \in T$ miteinander vergleichbar sind. Dies ist äquivalent dazu, dass die Einschränkung der Relation $\preceq$ auf T eine Totalordnung ist.

Ein Element $s \in X$ heißt obere Schranke einer Teilmenge $T \subseteq X$, wenn $s \succeq t$ für alle $t \in T$ gilt. Ein Element $x \in X$ wird maximal genannt, wenn kein $y \in X$ mit $y \succeq x$ und $y \neq x$ existiert.

Satz (Zornsches Lemma)

Sei X eine nichtleere Menge und $\preceq$ eine Halbordnung auf X mit der Eigenschaft, dass jede Kette in X eine obere Schranke in X besitzt. Dann existiert in X ein maximales Element.

zum Beweis von Satz 17.4 (Fortsetzung)

Sei K ein Körper und $S \subseteq K[x]$ eine Menge nicht-konstanter Polynome. Unser Ziel ist der Nachweis der Existenz eines Zerfällungskörpers von S über K.

- Mit Hilfe der Mengenlehre zeigt man, dass eine Menge $\Omega \supseteq K$ existiert, die so groß ist, dass für keine algebraische Erweiterung $L|K$ eine surjektive Abbildung $L \to \Omega$ existiert.
- Es sei nun $\mathcal{F}$ die Menge aller Erweiterungskörper $(L, +_L, \cdot_L)$ von K mit $L \subseteq \Omega$ und der Eigenschaft, dass L Zerfällungskörper einer Teilmenge $T \subseteq S$ ist.
- Wir definieren eine Relation $\preceq$ auf $\mathcal{F}$, indem wir fordern, dass genau dann $(L_1, +_{L_1}, \cdot_{L_1}) \preceq (L_2, +_{L_2}, \cdot_{L_2})$ erfüllt ist, wenn L_1 ein Teilkörper von L_2 ist.

zum Beweis von Satz 17.4 (Fortsetzung)

- Man überprüft nun, dass $(\mathcal{F}, \preceq)$ die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas erfüllt. Demnach existiert ein maximales Element $\tilde{L} \in \mathcal{F}$.

- Die Annahme, dass in S ein Polynom f existiert, die über dem Körper $\tilde{L}$ nicht in Linearfaktoren zerfällt, führt man zu einem Widerspruch mit der Maximalität von $\tilde{L}$, indem man einen Erweiterungskörper L_1 mit $\tilde{L} \subsetneq L_1 \subseteq \Omega$ konstruiert, über den f in Linearfaktoren zerfällt.

Zerfällungskörper als algebraische Erweiterungen

Proposition (17.5)

Sei K ein Körper und $S \subseteq K[x]$ eine beliebige Menge nichtkonstanter Polynome. Dann ist jeder Zerfällungskörper von S über K eine algebraische Erweiterung von K.

Definition des algebraischen Abschlusses

Definition (17.6)

Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[x]$ in K eine Nullstelle besitzt.

Definition (17.7)

Sei K ein Körper. Ein Erweiterungskörper L von K wird algebraischer Abschluss von K genannt, wenn $L|K$ algebraisch und L algebraisch abgeschlossen ist.

Charakterisierung des algebraischen Abschlusses

Proposition (17.8)

Für jede Erweiterung $L|K$ sind die folgende Aussagen äquivalent.

(i) Der Körper L ist ein algebraischer Abschluss von K.

(ii) Die Erweiterung $L|K$ ist algebraisch, und jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[x]$ zerfällt über L in Linearfaktoren.

(iii) Die Erweiterung $L|K$ ist minimal mit der Eigenschaft, dass jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[x]$ über L in Linearfaktoren zerfällt. Es gibt also abgesehen von L selbst keinen Zwischenkörper von $L|K$ mit dieser Eigenschaft.

Beweis von Proposition 17. 8

geg: Körpererweiterung $L|K$, z.zg:

Äquivalenz der Aussagen

(i) L ist algebraischer Abschluss von K
(d.h. $L|K$ ist algebraisch und L alg. abg.)

(ii) $L|K$ ist algebraisch, und jedes $f \in K[x] \setminus K$ zerfällt über L in Linearfaktoren

(iii) Die Erw. $L|K$ ist minimal mit der Eig., dass jedes $f \in K[x] \setminus K$ über L in Linearfaktoren zerfällt.

(iii) Die Erw. $L|K$ ist minimal mit der Eig., dass jedes $f \in K[x] \setminus K$ über L in Linearfaktoren

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" offensichtlich

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Sei L_1 ein bel. Zwischenkörper von $L|K$ mit der Eigenschaft, dass jedes $f \in K[x] \setminus K$ in Linearfaktoren zerfällt. z.zg.: $L_1 = L$ genügt: $L \subseteq L_1$

Sei $\alpha \in L$. $\Rightarrow$ α ist algebraisch über K. Sei $f = \mu_{\alpha,K} \in K[x] \setminus K$. Vor. (ii) $\Rightarrow$ f zerfällt über L_1 in Linearfaktoren. $\Rightarrow \alpha \in L_1$

„(iii) $\Rightarrow$ (i)" z.zg.: (1) $L|K$ ist algebraisch (2) L ist alg. abgeschl.

__zu (1)__ Sei $T = \{\alpha \in L \mid \alpha \text{ ist algebraisch über } K\}$ bereits bekannt: T ist Zwischenkörper von L über K.

__Beh.__ Bereits über T zerfällt jedes $f \in K[x] \setminus K$ in Linearfaktoren.

denn: Sei $f \in K[x] \setminus K$. Vor (iii) $\Rightarrow$ f zerfällt über L in Linearfaktoren. Alle Nullstellen sind algebraisch über K, liegen also in T. $\Rightarrow$ f zerfällt bereits über T. ($\Rightarrow$ Beh)

Aus der Beh. und der Minimalität von L folgt $L = T$.

Offenbar ist $T|K$ eine algebraische Erweiterung.

<u>zu (2)</u> Sei $f \in L[x] \setminus L$. z.zg.: Das Polynom f hat in L eine Nullstelle. Aus der Existenz der Zerfällungskörper ergibt sich die Existenz eines Erweiterungskörpers $L_1 | L$ mit einer Nullstelle $\alpha \in L_1$ des Polynoms f. Die Erweiterungen

$L|K$ und $L(\alpha)|L$ sind beide algebraisch.
$\Rightarrow L(\alpha)|K$ ist algebraisch $\Rightarrow \alpha$ ist algebraisch über K $\Rightarrow$ Sei $g = \mu_{\alpha,K}$. $g \in L[x]$. $g(\alpha) = 0$
Sei $f_1 = \mu_{\alpha,L}$. $\Rightarrow f_1 | f$ und $f_1 | g$
Nach Vor. zerfällt g über L in Linearfaktoren.
$\overset{f_1|g}{\Longrightarrow}$ f_1 zerfällt über L in Linearfaktoren $\Rightarrow \alpha \in L$.
Also hat f_1 in L eine Nullstelle, und somit auch f.
$\square$

Charakterisierung des algebraischen Abschlusses

Folgerung (17.9)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und $S_K \subseteq K[x]$ die Menge aller nicht-konstanten Polynome über K. Genau dann ist L ein algebraischer Abschluss von K, wenn L ein Zerfällungskörper von S_K ist.

- Wegen Satz 17.4 ergibt sich aus Folgerung 17.9, dass jeder Körper K einen algebraischen Abschluss besitzt.
- Ist K ein Körper und $\tilde{L}$ ein algebraisch abgeschlossener Erweiterungskörper von K, dann ist

$$\tilde{K} \quad = \quad \{\alpha \in \tilde{L} \mid \alpha \text{ algebraisch über } K\}$$

der eindeutig bestimmte algebraische Abschluss von K in $\tilde{L}$.

Ein Fortsetzungssatz für Zerfällungskörper

Proposition (17.10)

Sei $L|K$ eine algebraische Erweiterung, $\tilde{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\phi : K \to \tilde{K}$ ein Homomorphismus von Körpern. Dann gibt es eine Fortsetzung ψ von ϕ auf den Körper L, also einen Homomorphismus $\psi : L \to \tilde{K}$ mit $\psi|_K = \phi$.

Beweis von Prop. 17.10

Zeige durch vollst. Ind. über n: Ist $L|K$ eine Erw. vom Grad n, $\hat{K}$ algebraisch abg. und $\phi: K \to \hat{K}$ ein Körperhom., dann kann ϕ zu einem Hom. $\psi: L \to \hat{K}$ fortgesetzt werden. ($\forall n \in \mathbb{N}$)

Ind.-Anf.: $[L:K] = 1 \Rightarrow L = K$, setze $\psi = \phi$

Ind.-Schritt: Sei $n \in \mathbb{N}$, setze die Aussage für n voraus.

Sei $L|K$ eine Erw. vom Grad $n+1$

$[L:K] > 1 \Rightarrow L \supsetneq K \Rightarrow \exists \alpha \in L \setminus K$

$[L:K] > 1 \Rightarrow L \supsetneq K \Rightarrow \exists \alpha \in L \setminus K$

Sei $f = \mu_{\alpha,K}$ und $\tilde{f} = \phi(f) \in \tilde{K}[x]$. Da $\tilde{K}$ alg. abg. ist, existiert in $\tilde{K}$ eine Nullstelle von $\tilde{f}$. Fortsetzungssatz aus §16
$\Rightarrow \exists$ Fortsetzung $\phi_1 : K(\alpha) \to \tilde{K}$ von ϕ mit $\phi_1(\alpha) = \tilde{\alpha}$.

Gradformel $\Rightarrow$ $\underbrace{[L:K]}_{=n+1} = [L:K(\alpha)] \cdot \underbrace{[K(\alpha):K]}_{>1}$

$\Rightarrow [L:K(\alpha)] \leq n$. Nach Ind.-V. kann ϕ_1 zu einem Hom. $\psi : L \to \tilde{K}$ fortgesetzt werden. Der Hom. ψ ist eine Fortsetzung von ϕ, denn
$\psi|_K = (\psi|_{K_1})|_K = \phi_1|_K = \phi$.

$\square$

Eindeutigkeit der Zerfällungskörper

Satz (17.11)

Sei K ein Körper und $S \subseteq K[x]$ eine Menge bestehend aus nicht-konstanten Polynomen. Sei $\phi : K \to \tilde{K}$ ein Isomorphismus von Körpern und $\tilde{S} = \{\phi(f) \mid f \in S\}$. Sei L ein Zerfällungskörper von S und $\tilde{L}$ ein Zerfällungskörper von $\tilde{S}$. Dann gibt es einen Isomorphismus $\psi : L \to \tilde{L}$ mit $\psi|_K = \phi$.

Folgerung (17.12)

Sei K ein Körper, und seien L, $\tilde{L}$ algebraische Abschlüsse von K. Dann existiert ein K-Isomorphismus zwischen L und $\tilde{L}$.

Beweis von Satz 17.11:

geg.: $\phi: K \to \tilde{K}$ ein Körperisom., $S \subseteq K[x]$ Menge nicht-konstanter Polynome, $\tilde{S} = \phi(S) \subseteq \tilde{K}[x]$, außerdem

- L Zerfällungskörper von S
- $\tilde{L}$ Zerfällungskörper von $\tilde{S}$

<u>Beh.</u>: Es gibt einen Isom. $\psi: L \to \tilde{L}$, der ϕ fortsetzt (d.h. $\psi|_K = \phi$).

Sei $\tilde{L}_1$ ein algebraischer Abschluss von $\tilde{L}$. Betrachte ϕ als Körperhom. $K \to \tilde{L}_1$.

Da L Zerfällungskörper einer Polynommenge in $K[x]$ ist, ist $L|K$ eine algebraische Erweiterung.

Nach Prop. 17.10 gibt es eine Fortsetzung von ϕ zu einem Hom. $\psi : L \to \tilde{L}_1$. Beh: $\psi(L) = \tilde{L}$

(Daraus folgt, dass ψ ein Körperisom zwischen L und $\tilde{L}$ ist.)

„$\subseteq$" Betrachte die Mengen $N = \{\alpha \in L \mid \exists f \in S : f(\alpha) = 0\}$ und $\tilde{N} = \{\tilde{\alpha} \in \tilde{L} \mid \exists \tilde{f} \in \tilde{S} : \tilde{f}(\tilde{\alpha}) = 0\}$.

Es gilt $\psi(N) \subseteq \tilde{L}$, denn: Sei $\alpha \in N \Rightarrow \exists f \in S$ mit $f(\alpha) = 0$. Setze $\tilde{f} = \phi(f)$. $\Rightarrow \tilde{f} \in \tilde{S}$ und $\psi(\alpha)$ ist eine Nullstelle von $\tilde{f}$ (Grund:

D

gi

ψ

ϕ

„$\supseteq$

$\tilde{f} \in$

Line

Kör

$\tilde{L} \subseteq$

(§16, Prinzip „Nullstellen auf Nullst." Satz 16.3)

$\Rightarrow \tilde{x} \in \tilde{N}$. Also gilt $\psi(N) \subseteq \tilde{N}$

Da nach Def. $L = K(N)$ und $\tilde{L} = \tilde{K}(\tilde{N})$ gilt, folgt daraus

$$\psi(L) = \psi(K(N)) \overset{§16}{=} \psi(K)(\psi(N)) \subseteq \phi(K)(\tilde{N}) = \tilde{K}(\tilde{N}) = \tilde{L}.$$

„$\supseteq$" Es genügt z.zg., dass jedes Polynom $\tilde{f} \in \tilde{K}[x]$ schon über $\psi(L) = \tilde{K}(\psi(N))$ in Linearfaktoren zerfällt, denn weil $\tilde{L}$ der kleinste Körper mit dieser Eigenschaft ist, folgt dann $\tilde{L} \subseteq \psi(L)$.

Sei $\tilde{f} \in \tilde{S}$. $\Rightarrow \exists f \in S$ mit $\phi(f) = \tilde{f}$.

f zerfällt über L in Linearfaktoren $\Rightarrow \exists c \in K^*$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ mit $f = c(x-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n)$

$\Rightarrow \tilde{f} = \phi(f) = \psi(f) = \psi(c)(x-\psi(\alpha_1)) \cdots (x-\psi(\alpha_n))$

Dabei ist $\psi(c) = \phi(c) \in \tilde{K}$ und $\psi(\alpha_j) \in \psi(L)$ für $1 \le j \le n$. Dies zeigt, dass $\tilde{f}$ schon über $\psi(L)$ in Linearfaktoren zerfällt.

$\square$

Normale Erweiterungen

Definition (17.13)

Eine algebraische Körpererweiterung $L|K$ heißt normal, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Ist $f \in K[x]$ ein irreduzibles Polynom, das in L eine Nullstelle besitzt, dann zerfällt f über L in Linearfaktoren.

Proposition (17.14)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung vom Grad 2. Dann ist $L|K$ normal.

Charakterisierung der normalen Erweiterungen

Satz (17.15)

Sei K ein Körper, und seien $\tilde{K} \supseteq L \supseteq K$ Erweiterungen von K, wobei $L|K$ endlich und $\tilde{K}$ algebraisch abgeschlossen ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $L|K$ ist normal.

(ii) Es gibt ein nicht-konstantes Polynom $f \in K[x]$, so dass L der Zerfällungskörper von f über K ist.

(iii) Es gilt $\mathrm{Hom}_K(L, \tilde{K}) = \mathrm{Aut}_K(L)$.