Eindeutigkeit der Fortsetzungen

Satz (16.1)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung, $S \subseteq L$ eine Teilmenge mit $L = K(S)$ und $\phi : K \to \tilde{K}$ ein Homomorphismus in einen weiteren Körper $\tilde{K}$. Sind dann $\psi_1, \psi_2 : L \to \tilde{K}$ zwei Fortsetzungen von ϕ mit $\psi_1|_S = \psi_2|_S$, dann gilt $\psi_1 = \psi_2$.

wichtiger Spezialfall:

Gilt $L = K(\alpha)$ für ein $\alpha \in L$ und ist $\beta \in \tilde{K}$, dann gibt es für jeden Homomorphismus $\phi : K \to \tilde{K}$ und jedes $\beta \in \tilde{K}$ höchstens eine Fortsetzung $\psi_\beta : K(\alpha) \to \tilde{K}$ von ϕ mit der Eigenschaft $\psi_\beta(\alpha) = \beta$.

Der Fortsetzungssatz

Satz (16.2)

- Sei $\phi : K \to \tilde{K}$ ein Isomorphismus von Körpern.
- Seien $L|K$ und $\tilde{L}|\tilde{K}$ Körpererweiterungen.
- Sei $\alpha \in L$ ein über K algebraisches Element und f das Minimalpolynom von α über K.
- Sei $\tilde{\alpha} \in \tilde{L}$ eine Nullstelle von $\tilde{f} = \phi(f) \in \tilde{K}[x]$.

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung ψ von ϕ auf $K(\alpha)$ mit $\psi(\alpha) = \tilde{\alpha}$. Dieser Homomorphismus ψ definiert einen Isomorphismus zwischen den beiden Körpern $K(\alpha)$ und $\tilde{K}(\tilde{\alpha})$.

„Nullstellen auf Nullstellen“

Satz (16.3)

Sei $\phi : K \to \tilde{K}$ ein Isomorphismus von Körpern. Seien außerdem $L|K$ und $\tilde{L}|\tilde{K}$ Körpererweiterungen, $\alpha \in L$ und $f \in K[x]$ ein Polynom mit $f(\alpha) = 0$. Ist dann $\psi : K(\alpha) \to \tilde{L}$ ein Körperhomomorphismus mit $\psi|_K = \phi$, dann ist $\tilde{\alpha} = \psi(\alpha)$ eine Nullstelle von $\tilde{f} = \phi(f)$.

Die Anzahl der Fortsetzungen eines Körperhomomorph.

Folgerung (16.4)

Sei $\phi : K \to \tilde{K}$ ein Isomorphismus von Körpern. Seien außerdem $L|K$, $\tilde{L}|\tilde{K}$ Körpererweiterungen, $\alpha \in L$ algebraisch über K und $f = \mu_{K,\alpha}$. Dann stimmt die Anzahl der Fortsetzungen $\psi : K(\alpha) \to \tilde{L}$ von ϕ überein mit der Anzahl der Nullstellen von $\tilde{f} = \phi(f)$ in $\tilde{L}$.

Folgerung (16.5)

Für jede algebraische Erweiterung $L|K$ gilt $\mathrm{Hom}_K(L, L) = \mathrm{Aut}_K(L)$.

Beweis von Folgerung 16.4:

geg: $\phi : K \to \tilde{K}$ Körperisomorphismus

$L|K$, $\tilde{L}|\tilde{K}$ Körpererweiterungen

$\alpha \in L$ algebraisch über K, $f = \mu_{\alpha,K} \in K[x]$

Bildpolynom $\tilde{f} = \phi(f) \in \tilde{K}[x]$

<u>Beh</u>: Die Anzahl der Fortsetzungen von ϕ zu einem Körperhom. $K(\alpha) \to \tilde{L}$ ist gleich der Anzahl der Nullstellen von $\tilde{f}$ in $\tilde{L}$.

Sei $\beta_1, \dots, \beta_s \in \tilde{L}$ die Nullstellen von $\tilde{f}$ in $\tilde{L}$ $(s \in \mathbb{N}_0)$.

Nach Satz 16.2 gibt es für jedes $i \in \{1, \dots, s\}$ eine

Bem. Die Anzahl der Fortsetzungen von ϕ zu einem Körperhom $K(\alpha) \to \tilde{L}$ ist gleich der Anzahl der Nullstellen von $\tilde{f}$ in $\tilde{L}$.

eindeutig bestimmte Fortsetzung $\psi_i : K(\alpha) \to \tilde{L}$ von ϕ mit $\psi(\alpha) = \beta_i$. Sei nun $\psi : K(\alpha) \to \tilde{L}$ eine beliebige Fortsetzung von ϕ. Satz 16.3 („Nullstellen auf Nullstellen") $\Rightarrow$ $\psi(\alpha)$ ist Nullstelle von $\tilde{f}$ $\Rightarrow$ $\psi(\alpha) = \beta_i$ für ein i.
Auf Grund der Eindeutigkeit in Satz 16.2 folgt $\psi = \psi_i$. $\square$

<u>Beispiel</u>: Anwendung von Folg. 16.4 auf $\phi = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$
Sei $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ ist $f = x^3 - 2$.
Es gibt genau

- drei Fortsetzungen von ϕ zu einem Körperhom. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{C}$ (Grund: Das Polynom f besitzt in $\mathbb{C}$ drei verschiedene Nullst., nämlich $\sqrt[3]{2}$ und ein konj.-komplexes Paar nichtreeller Nullst.)
- eine Fortsetzung zu einem Hom. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{R}$ (einzige Nullst. in $\mathbb{R}$: $\sqrt[3]{2}$)
- keine Fortsetzung zu einem Hom. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}$ (f hat keine rationale Nst.)

Ergänzung: Die nichtreellen Nullst. von $f = x^3 - 2$ in $\mathbb{C}$ sind $\zeta\sqrt[3]{2}$, $\zeta^2\sqrt[3]{2}$ mit $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3} = e^{2\pi i/3}$. (Es gilt $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow e^{2\pi i/3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.) Probe: $f(\zeta\sqrt[3]{2}) = (\zeta\sqrt[3]{2})^3 - 2 = \zeta^3 \cdot (\sqrt[3]{2})^3 - 2 = (e^{2\pi i/3})^3 \cdot 2 - 2 = e^{2\pi i}\, 2 - 2 = 1 \cdot 2 - 2 = 0$. Überprüfe ebenso $f(\zeta^2\sqrt[3]{2}) = 0$

Die Fortsetzungen ψ_1, ψ_2, die nach Folgerung 16.4 zu den Nullstellen $\beta_2 = \zeta\sqrt[3]{2}$ und $\beta_3 = \zeta^2\sqrt[3]{2}$ gehören, sind geg. durch $\psi_2(\sqrt[3]{2}) = \zeta\sqrt[3]{2}$ bzw. $\psi_3(\sqrt[3]{2}) = \zeta^2\sqrt[3]{2}$.

Da das Minimalpol. f von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$ vom Grad 3 ist, hat jedes Element in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ die Form $a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$, und es gilt $\psi_2(a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2) =$

$$= \psi_2(a) + \psi_2(b)\psi_2(\sqrt[3]{2}) + \psi_2(c)\psi_2(\sqrt[3]{2})^2 =$$

$$= a + b\zeta\sqrt[3]{2} + c\zeta^2(\sqrt[3]{2})^2$$

Beweis von Folgerung 16.5

geg.: algebraische Erweiterung $L|K$

Beh.: $\mathrm{Hom}_K(L,L) = \mathrm{Aut}_K(L)$

„$\supseteq$" gilt nach Definition „$\subseteq$" Sei $\phi \in \mathrm{Hom}_K(L,L)$.

z.zg.: ϕ ist bijektiv bereits bekannt: Körper-homomorphismen sind stets injektiv

Zum Nachweis der Surjektivität sei $\beta \in L$ vorgeg.

z.zg. Es gibt ein $\alpha \in L$ mit $\phi(\alpha) = \beta$.

Da $L|K$ alg. ist, ist β algebraisch über K.

Sei $f = \mu_{\beta,K}$ und $N = \{\gamma \in L \mid f(\gamma) = 0_K\}$.

Satz 16.3 („Nullst. auf Nullst.") $\Rightarrow \phi(N) \subseteq N$

$\Rightarrow \phi|_N$ ist eine injektive Abb. $N \to N$

Da N endlich ist (als Nullstellenmenge eines Pol.) ist $\phi|_N$ auch eine surjektive Abb. $N \to N$. $\Rightarrow \exists \alpha \in N$ mit $\phi(\alpha) = (\phi|_N)(\alpha) = \beta$

$\square$

Körperhomomorphismen und Erzeugendensysteme

Lemma (16.6)

Sei $\phi : K \to \tilde{K}$ ein Isomorphismus von Körpern und $L|K$ und $\tilde{L}|\tilde{K}$ Körpererweiterungen. Sei $S \subseteq L$ eine Teilmenge und $\psi : L \to \tilde{L}$ eine Fortsetzung von ϕ. Dann gilt

$$\psi(K(S)) \ = \ \tilde{K}(\psi(S)).$$

Beweis von Lemma 16.6

geg: Isom. $\phi : K \to \tilde{K}$ von Körpern, Erw. $L|K$, $\tilde{L}|\tilde{K}$,
$S \subseteq L$, $\psi : L \to \tilde{L}$ Fortsetzung von ϕ. Sei $M = \psi(K(S))$.

<u>Beh</u>: $M = \tilde{K}(\psi(S))$. Überprüfe, dass M die definierenden Eigenschaften von $\tilde{K}(\psi(S))$ besitzt, d.h.

(1) M ist Zwischenkörp. von $\tilde{L}|\tilde{K}$ mit $M \supseteq \psi(S)$

(2) Ist L_1 ein bel. Zw.-krp. von $\tilde{L}|\tilde{K}$ mit $L_1 \supseteq \psi(S)$, dann folgt $L_1 \supseteq M$.

<u>zu (1)</u> Als Bild eines Körpers unter einem Körperhom. nach $\tilde{L}$ ist M ein Teilkörper von $\tilde{L}$. außerdem: $\psi(K) = \phi(K) = \tilde{K}$ ist in M enthalten $\Rightarrow$ M ist Zwischenkörper von $\tilde{L}|\tilde{K}$

M ein Teilkörper von $\tilde{L}$. außerdem: $\psi(K) = \phi(K) = \tilde{K}$ ist in M enthalten $\Rightarrow M$ ist Zwischenkörper von $\tilde{L}|\tilde{K}$

außerdem: $M = \psi(K(S)) \supseteq \psi(S)$ wg. $S \subseteq K(S)$

zu (2) Sei L_1 wie angeg. z.zg.: $\psi(K(S)) \subseteq L_1$. Es genügt z.zg., dass $K(S) \subseteq \psi^{-1}(L_1)$ gilt (nach Def. des Urbilds).

leicht zu überprüfen: $\psi^{-1}(L_1)$ ist ein Teilkörper von L

$\psi(K) = \phi(K) = \tilde{K} \subseteq L_1 \Rightarrow K \subseteq \psi^{-1}(L_1) \Rightarrow \psi^{-1}(L_1)$ ist Zwischenkörp. von $L|K$.

$\psi(S) \subseteq L_1$ laut Voraussetzung $\Rightarrow S \subseteq \psi^{-1}(L_1)$

Insgesamt gilt somit $K(S) \subseteq \psi^{-1}(L_1)$

$\square$

Definition (17.1)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung und $f \in K[x]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zerfällt f über L in Linearfaktoren, und bezeichnen $\alpha_1, ..., \alpha_r$ die Nullstellen von f in L, dann nennt man $K(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ den Zerfällungskörper von f in L über dem Grundkörper K.

Satz (17.2)

Sei K ein Körper. Dann existiert zu jedem nicht-konstanten Polynom $f \in K[x]$ ein Zerfällungskörper von f über K.

Beispiele für Zerfällungskörper:

- $K = \mathbb{Q}$, $f = x^3 - 2$

  Betrachten wir f über dem Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, dann erhalten wir $f = (x - \sqrt[3]{2}) \cdot (x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$.

  Die Diskriminante des Faktors vom Grad 2 ist $(\sqrt[3]{2})^2 - 4(\sqrt[3]{4}) = -3\sqrt[3]{2} < 0$. $\Rightarrow$ Der Faktor hat keine Nullstellen, zerfällt also nicht in $\mathbb{R}[x]$, wegen $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{R}$ auch nicht in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})[x]$. $\Rightarrow$

  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ist <u>kein</u> Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$

aber (s.o.): $f = (x - \sqrt[3]{2})(x - \zeta\sqrt[3]{2})(x - \zeta^2\sqrt[3]{2})$ mit $\zeta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ $\Rightarrow$ f zerfällt über $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta)$. Dieser Körper stimmt mit $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta\sqrt[3]{2}, \zeta^2\sqrt[3]{2})$ überein. Daraus folgt insgesamt, dass $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta)$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$ ist.

- $K = \mathbb{Q}$, $f = (x^2-2)(x^2-3)(x^2-5)$
  Dann ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

Beweis von Satz 17.2:

Zeige durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage: Ist $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $f \in K[x]$ ein Polynom vom Grad n, dann existiert ein Erweiterungskörper L von K mit der Eigenschaft, dass f über in Linearfaktoren zerfällt. (Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in L$ dann die Nullstellen von f, dann ist $K(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ Zerfällungskörper von f über K.)

Ind.-Anf. $n = 1$: Sei K ein Körp., $f \in K[x]$

vom Grad 1. Dann ist f bereits ein lineares Polynom, d.h. es ist nichts zu zeigen.

Ind.-schritt: Sei $n \in \mathbb{N}$, setze die Aussage für n voraus. Sei K ein Körper und $f \in K[x]$ vom Grad $n+1$. Sei $g \in K[x]$ ein irreduzibler Faktor von f. §15 $\Rightarrow$ Es gibt eine Erw. $L_1 \supseteq K$ mit einer Nullstelle $\alpha_1 \in L_1$ von g.

$\Rightarrow f(\alpha_1) = 0 \Rightarrow \exists\, h \in L_1[x]$ mit $f = (x-\alpha_1)\, h$.

$\mathrm{grad}(h) = n \overset{\text{Ind. V.}}{\Longrightarrow} \exists$ Erweiterung $L \supseteq L_1$, über der h in Linearfaktoren zerfällt. Damit zerfällt auch f über L in Linearfaktoren. $\square$

Zerfällungskörper von Polynommengen

Definition (17.3)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung, und $S \subseteq K[x]$ eine (möglicherweise unendliche) Menge von nicht-konstanten Polynomen, die über L alle in Linearfaktoren zerfallen. Weiter sei $N \subseteq L$ die Menge aller Nullstellen sämtlicher Polynome aus S in L, also

$$N \quad = \quad \{\alpha \in L \mid f(\alpha) = 0 \text{ für ein } f \in S\}.$$

Dann wird $K(N)$ als Zerfällungskörper von S über dem Grundkörper K bezeichnet.

Satz (17.4)

Ist K ein Körper und $S \subseteq K[x]$ eine Menge nicht-konstanter Polynome, dann existiert ein Zerfällungskörper von S über K.