

Erinnerung:

- Eine **Bewegung** im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\|\phi(v) - \phi(w)\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.
- Ist ϕ eine Bewegung, dann gibt es eindeutig bestimmte $u \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{O}(n)$, so dass $\phi(v) = u + Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.
- Ist $\det(A) = +1$, dann spricht man von einer **orientierungserhaltenden**, im Fall $\det(A) = -1$ von einer **orientierungsumkehrenden** Bewegung.

Definition (1.5)

Die Menge der Bewegungen im $\mathbb{R}^n$ bildet zusammen mit der Komposition eine Gruppe, die wir mit $\mathcal{B}_n$ bezeichnen. Die orientierungserhaltenden Bewegungen bilden ebenso eine Gruppe; diese bezeichnen wir mit $\mathcal{B}_n^+$.

Die Symmetriegruppe einer Menge $T \subseteq \mathbb{R}^n$

Definition (1.5)

Die Menge der Bewegungen im $\mathbb{R}^n$ bildet zusammen mit der Komposition eine Gruppe, die wir mit $\mathcal{B}_n$ bezeichnen. Die orientierungserhaltenden Bewegungen bilden ebenso eine Gruppe; diese bezeichnen wir mit $\mathcal{B}_n^+$.

Definition (1.6)

Ist $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge, dann bezeichnet man

$$\text{Sym}(T) = \{\phi \in \mathcal{B}_n \mid \phi(T) = T\}$$

als **Symmetriegruppe** von T . Die Elemente von $\text{Sym}^+(T) = \text{Sym}(T) \cap \mathcal{B}_n^+$ bezeichnet man als **orientierungserhaltende Symmetrien** der Menge T .

Definition (1.7)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, und für $0 \leq k < n$ sei der Punkt $P_{n,k} \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$P_{n,k} = \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right).$$

Dann bezeichnen wir die konvexe Hülle der endlichen Punktmenge

$$\{P_{n,k} \mid 0 \leq k < n\}$$

als das **regelmäßiges Standard- n -Eck** Δ_n . Die Symmetriegruppe $D_n = \text{Sym}(\Delta_n)$ wird die n -te **Diedergruppe** genannt.

Elemente der Diedergruppen

Drehmatrix $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

(Drehung um $(0,0)$ mit Winkel α , gegen den Uhrzeigersinn)

Spiegelung an der x -Achse $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

Die Diedergruppe D_n ($n \geq 3$) ist geg. durch

$$D_n = \underbrace{\{ \rho^k \mid 0 \leq k < n \}}_{\text{Drehungen}} \cup \underbrace{\{ \rho^k \circ \tau \mid 0 \leq k < n \}}_{\text{Spiegelungen}}$$

wobei $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, v \mapsto \rho_{2\pi/n} v$

Die Diedergruppe D_n ($n \geq 3$) ist geg. durch

$$D_n = \underbrace{\{ \rho^k \mid 0 \leq k < n \}}_{\text{Drehungen}} \cup \underbrace{\{ \rho^k \circ \tau \mid 0 \leq k < n \}}_{\text{Spiegelungen}}$$

$$\text{und } \tau: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, v \mapsto Sv$$

- D_n ist nicht kommutativ, denn

$$SR_\alpha S = R_{-\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \tau \circ \rho^k \circ \tau = \rho^{-k} \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$\Rightarrow \tau \circ \rho^k = \rho^{-k} \circ \tau^{-1} \quad \begin{matrix} \tau^2 = \text{id} \\ \tau = \tau^{-1} \end{matrix} \Rightarrow \tau \circ \rho^k = \rho^{-k} \circ \tau$$

$$\text{insb. } \tau \circ \rho = \rho^{-1} \circ \tau$$

Wegen $\rho \neq \rho^{-1}$ gilt $\rho^{-1} \circ \tau \neq \rho \circ \tau$

$$\Rightarrow \tau \circ \rho \neq \rho \circ \tau \Rightarrow \text{Beh.}$$

- Frage. Warum beschreiben die Elemente $P^k \circ T$ ($0 \leq k < n$) Spiegelungen?

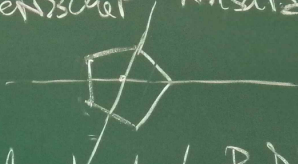
1. Mögl.: Wegen $\det(R_{2\pi/n}^k S) =$

$$\det(R_{2\pi/n})^k \det(S) = (+1)^k (-1) = -1$$

Wird $P^k \circ T$ beschrieben durch eine orthogonale Matrix mit Determinante -1 .

Aus der Lin. Alg. ist bekannt, dass dies Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$ sind.

2. Möglichkeit: „geometrischer“ Ansatz



Spiegelung an der Achse durch den Punkt $P_{n,k}$ ist geg. durch $\rho^k \circ \tau \circ \rho^{-k}$

drehe die
Achse zu-
rück

drehe die Achse
auf die x-Achse
↑
Spiegelung
an der x-Achse

Es gilt $\rho^k \circ \tau \circ \rho^{-k} = \rho^k \circ \rho^k \circ \tau$
 $= \rho^{2k} \circ \tau$. Für $0 \leq k < n$ durchläuft
 $\rho^{2k} \circ \tau$ die Elemente $\{\rho^l \circ \tau \mid 0 \leq l < n\}$.

falls n ungerade ist

else
Achse

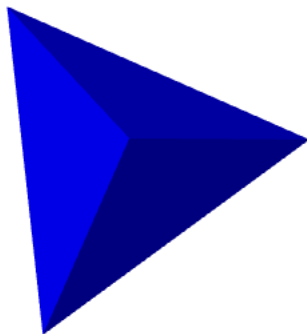
Definition der Platonischen Körper

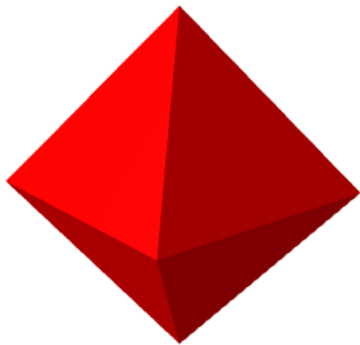
Zwei Teilmengen $S, T \subseteq \mathbb{R}^3$ werden als **kongruent** bezeichnet, wenn ein $\phi \in \mathcal{B}_n$ mit $\phi(S) = T$ existiert.

Definition (1.8)

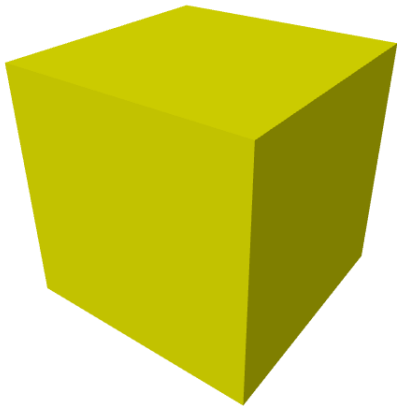
Ein nicht ausgeartetes Polytop im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet man als **regulär** oder auch als **Platonischen Körper**, wenn all seine Seiten zueinander kongruente **regelmäßige** n -Ecke sind und sich an jeder Ecke dieselbe Anzahl von Seiten treffen.

Platonische Körper - Tetraeder

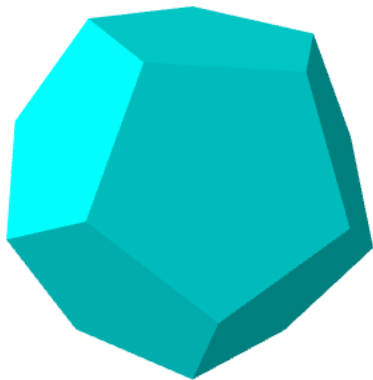




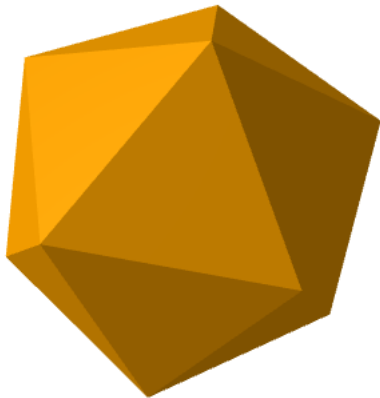
Platonische Körper - Würfel



Platonische Körper - Dodekader



Platonische Körper - Ikosaeder



Die Symmetriegruppen der platonischen Körper

Definition (1.9)

Bezeichnet $\mathbb{T}$ einen beliebigen Tetraeder, dann nennt man $\text{Sym}(\mathbb{T})$ eine **Tetraedergruppe** und $\text{Sym}^+(\mathbb{T})$ eine **eigentliche Tetraedergruppe**. Ist $\mathbb{O}$ ein Oktaeder, dann wird $\text{Sym}(\mathbb{O})$ eine **Oktaedergruppe** und $\text{Sym}^+(\mathbb{O})$ eine **eigentliche Oktaedergruppe**. Entsprechend werden (eigentliche) Würfelgruppen, Dodekaedergruppen und Ikosaedergruppen definiert.

Definition (1.10)

Seien G und H Gruppen. Dann bildet das kartesische Produkt $G \times H$ mit der Verknüpfung $*$ gegeben durch

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

für alle $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ ebenfalls eine Gruppe. Man nennt sie das **(äußere) direkte Produkt** von G und H . Sind G und H abelsch, dann gilt dasselbe für $(G \times H, *)$.

Nachweis, dass $(G \times H, *)$ eine Gruppe ist:

Assoziativgesetz: Seien $(g_1, h_1), (g_2, h_2), (g_3, h_3) \in G \times H$ vorgeg. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((g_1, h_1) * (g_2, h_2)) * (g_3, h_3) &= \\ (g_1 g_2, h_1 h_2) * (g_3, h_3) &= (g_1 g_2 g_3, h_1 h_2 h_3) = \\ = (g_1 (g_2 g_3), h_1 (h_2 h_3)) &= (g_1, h_1) * (g_2 g_3, h_2 h_3) \quad \begin{array}{l} \text{Assoziativgesetz} \\ \text{in } (G, \cdot) \text{ und} \\ \text{in } (H, \cdot) \end{array} \\ = (g_1, h_1) * ((g_2, h_2) * (g_3, h_3)) & \end{aligned}$$

Neutralelement: Seien e_G, e_H die Neutralelemente von G bzw. H . Beh.: (e_G, e_H) ist Neutralelement in $(G \times H, *)$, d.h. es gilt $e_G \times e_H = (e_G, e_H)$

$$= (g_1(g_2g_3), h_1(h_2h_3)) = (g_1, h_1) * (g_2g_3, h_2h_3)$$

Assoziativgesetz
in $(G, \cdot)$ und
 $(H, \cdot)$

Sei $(g, h) \in G \times H$ z.z.g. $(g, h) * (e_G, e_H) = (g, h)$
und $(e_G, e_H) * (g, h) = (g, h)$

Es gilt $(g, h) * (e_G, e_H) = (ge_G, he_H) =$
 (g, h) und $(e_G, e_H) * (g, h) = (e_G g, e_H h) = (g, h)$

e_G neutralisiert in G
 e_H neutralisiert in H

Inverse: Sei $(g, h) \in G \times H$. Beh.: (g^{-1}, h^{-1}) ist Inverses von
 (g, h) , d.h. es gilt $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$. Es gilt
 $(g, h) * (g^{-1}, h^{-1}) = (gg^{-1}, hh^{-1}) = (e_G, e_H) = e_{G \times H}$
 und $(g^{-1}, h^{-1}) * (g, h) = (g^{-1}g, h^{-1}h) = (e_G, e_H) = e_{G \times H}$



Definition (1.11)

- (i) Eine **Halbgruppe** ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge G und einer assoziativen Verknüpfung $*$ auf G .
- (ii) Ein Element $e \in G$ der Halbgruppe wird als **Neutralelement** bezeichnet, wenn $e * a = a$ und $a * e = a$ für alle $a \in G$ erfüllt ist.
- (iii) Eine Halbgruppe mit mindestens einem Neutralelement bezeichnet man als **Monoid**.

Jede Halbgruppe besitzt höchstens ein Neutralelement.

Definition (1.12)

Sei $(G, *)$ ein Monoid mit dem Neutralelement e_G . Ein Element $g \in G$ wird **invertierbar** in $(G, *)$ genannt, wenn ein $h \in G$ mit $g * h = h * g = e_G$ existiert. Man nennt h in diesem Fall ein **Inverses** von g .

Proposition (1.13)

Sei $(G, *)$ ein Monoid.

- (i) Jedes Element $g \in G$ besitzt höchstens ein Inverses; sofern es existiert, wird es mit g^{-1} bezeichnet.
- (ii) Seien $g, h \in G$ invertierbare Elemente. Dann sind auch die Elemente $g * h$ und g^{-1} invertierbar, und es gilt $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$ und $(g^{-1})^{-1} = g$.
- (iii) Das Neutralelement e_G ist invertierbar, und es gilt $e_G^{-1} = e_G$.

Beweis von Prop. 1.13, Teil (ii)

geg. Monoid $(G, *)$, g, h invertierbare Elemente

zeige: (1) $h^{-1} * g^{-1}$ ist Inverses von $g * h$

(2) g ist Inverses von g^{-1}

zu (1) zu überprüfen: $(g * h) * (h^{-1} * g^{-1}) = e$

und $(h^{-1} * g^{-1}) * (g * h) = e$

$$\begin{aligned}(g * h) * (h^{-1} * g^{-1}) &= g * (h * h^{-1}) * g^{-1} = g * e * g^{-1} \\ &= g * g^{-1} = e \quad \text{zweite Gleichung analog}\end{aligned}$$

zu (2)

zu (2) zu überprüfen: $g^{-1} * g = e$ und $g * g^{-1} = e$
ist auf Grund der Definition von g^{-1} offensichtlich.



Unter einer Verknüpfung abgeschlossene Mengen

Definition (1.14)

Sei $(X, \circ)$ eine Menge mit einer Verknüpfung. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird **abgeschlossen** unter $\circ$ genannt, wenn für alle $x, y \in U$ auch das Element $x \circ y$ in U liegt.

Satz (1.15)

Sei $(G, *)$ ein Monoid und $G^\times \subseteq G$ die Teilmenge der invertierbaren Elemente. Dann ist $G^\times$ abgeschlossen unter der Verknüpfung $*$, und $(G^\times, *_{G^\times})$ ist eine Gruppe. Das Neutralelement e_G von G ist zugleich das Neutralelement von $(G^\times, *_{G^\times})$.

Der Isomorphiebegriff

Definition (1.16)

Man bezeichnet zwei Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ als **isomorph** und schreibt $G \cong H$, wenn eine bijektive Abbildung $\phi : G \rightarrow H$ existiert, so dass

$$\phi(g \cdot g') = \phi(g) * \phi(g')$$

für alle $g, g' \in G$ erfüllt ist.

Beispiele für Isomorphismen (Beweise folgen)

- (i) Es gilt $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
- (ii) Jede Diedergruppe D_n (mit $n \geq 3$) ist isomorph zu einer $2n$ -elementigen Untergruppe von S_n .
- (iii) Für die Symmetriegruppen des Tetraeders gilt $\text{Sym}^+(\mathbb{T}) \cong A_4$ und $\text{Sym}(\mathbb{T}) \cong S_4$.
- (iv) Es gilt $\text{Sym}^+(\mathbb{O}) \cong \text{Sym}^+(\mathbb{W}) \cong S_4$ und $\text{Sym}(\mathbb{O}) \cong \text{Sym}(\mathbb{W}) \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für die Symmetriegruppen von Würfel und Oktaeder.
- (v) Für die Symmetriegruppen von Dodekaeder und Ikosaeder gilt $\text{Sym}^+(\mathbb{D}) \cong \text{Sym}^+(\mathbb{I}) \cong A_5$ und $\text{Sym}(\mathbb{D}) \cong \text{Sym}(\mathbb{I}) \cong A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Definition (1.17)

Das **Klassifikationsproblem für endliche Gruppen** kann folgendermaßen formuliert werden: Gegeben ein $n \in \mathbb{N}$, bestimme alle Gruppen mit n Elementen bis auf Isomorphie.

Damit ist gemeint: Bestimme eine Zahl $r(n)$ und Gruppen $G_1, G_2, \dots, G_{r(n)}$ mit der Eigenschaft, dass *jede* Gruppe G mit $|G| = n$ zu **genau einer** dieser Gruppen isomorph ist.

Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir zeigen

- Ist p eine Primzahl, dann ist jede Gruppe G mit $|G| = p$ isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Es gilt also $r(p) = 1$.
- Für jede Primzahl p gilt: Jede Gruppe G mit $|G| = p^2$ ist entweder isomorph zu $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ oder isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Es gilt also $r(p^2) = 2$.
- Für jede ungerade Primzahl p gilt außerdem: Jede Gruppe der Ordnung $2p$ ist entweder isomorph zu $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ oder zur Diedergruppe D_p . Es gilt also auch $r(2p) = 2$.

Gruppen der Ordnung ≤ 15 bis auf Isomorphie

n	$r(n)$	Gruppen bis auf Isomorphie
1	1	$\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$
2	1	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
3	1	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
4	2	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
5	1	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
6	2	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, S_3$
7	1	$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
8	5	$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3, D_4, Q_8$

Gruppen der Ordnung ≤ 15 bis auf Isomorphie (Forts.)

n	$r(n)$	Gruppen bis auf Isomorphie
9	2	$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
10	2	$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, D_5$
11	1	$\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
12	5	$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, D_6, A_4, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
13	1	$\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
14	2	$\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}, D_7$
15	1	$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$