

§ 1. Definition der Gruppen, Beispiele

Definition (1.1)

Eine **Gruppe** ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge G und einer Verknüpfung $*$ auf G (also einer Abbildung $G \times G \rightarrow G$), so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- (i) Die Verknüpfung ist assoziativ, d.h. es gilt $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle $a, b, c \in G$.
- (ii) Es gibt ein ausgezeichnetes Element $e \in G$, genannt das **Neutralelement** der Gruppe, mit der Eigenschaft, dass $e * a = a * e = a$ für alle $a \in G$ gilt.
- (iii) Für jedes Element $a \in G$ gibt es ein Element $a^{-1} \in G$, genannt das zu a **inverse Element**, mit $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Gilt darüber hinaus $a * b = b * a$ für alle $a, b \in G$, dann spricht man von einer **abelschen** oder auch einer **kommutativen** Gruppe.

Moodle: uc99355ALK

Beispiele für abelsche Gruppen.

- (1) Ist R ein Ring, dann ist $(R, +)$ eine abelsche Gruppe (0_R Neutralelement, $-a$ Inverses von a , für jedes $a \in R$).

Bsp: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ sind abelsche Gruppen

- (2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ eine endliche abelsche Gruppe.

jedes $a \in R$.

Bsp. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ sind abelsche Gruppen

(3) Ist K ein Körper, dann ist $(K^\times, \cdot)$ eine abelsche Gruppe, wobei $K^\times = K \setminus \{0_K\}$.

(Neutralelement 1_K , $a^{-1} = \frac{1}{a}$ Inverses von $a \forall a \in K^\times$)

(4) Ist V ein K -Vektorraum, dann ist $(V, +)$ eine abelsche Gruppe. (Neutralelement = Nullvektor 0_V ,
 $-v = (-1_K) \cdot v$ Inverses von v für alle $v \in V$)

Bsp. $(\mathbb{R}^2, +)$ ist abelsche Gruppe

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

Definition der Permutationsgruppen

Definition (1.2)

Sei X eine Menge. Dann ist das Paar $(\text{Per}(X), \circ)$ bestehend aus der Teilmenge $\text{Per}(X) \subseteq \text{Abb}(X)$ der **bijektiven** Abbildungen $X \rightarrow X$ und der Komposition $\circ$ von Abbildungen eine Gruppe, die man als **Permutationsgruppe** der Menge X bezeichnet. Die Elemente von $\text{Per}(X)$ nennt man auch **Permutationen** von X .

Definition (1.3)

Ist $r \in \mathbb{N}$ und sind $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ mit $k_1 \geq \dots \geq k_r \geq 2$, dann bezeichnet man das Tupel $(k_1, \dots, k_r)$ als **Zerlegungstyp** eines Elements $\sigma \in S_n$, wenn σ als Produkt disjunkter Zyklen der Längen $(k_1, \dots, k_r)$ dargestellt werden kann.

Satz (1.4)

Die Gruppe S_n ist für $n \leq 2$ abelsch und für $n \geq 3$ **nicht abelsch**.

Nachweis, dass $\text{Per}(X)$ eine Gruppe ist
(für eine beliebige Menge X):

- Die Verknüpfung auf $\text{Per}(X)$ ist die Komposition
(= Hintereinanderausführung) von Abbildungen, definiert
durch $(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x)) \quad \forall \sigma, \tau \in \text{Per}(X), x \in X$
- bekannt: $\circ$ ist assoziativ (denn: Für alle ρ, σ, τ
 $\in \text{Per}(X)$ und $x \in X$ gilt $((\rho \circ \sigma) \circ \tau)(x) =$
 $\rho(\sigma(\tau(x))) = (\rho \circ (\sigma \circ \tau))(x)$, also
 $(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau)$)
- Neutralelement: Für jede $\sigma \in \text{Per}(X)$ gilt

- Neutralelement: Für jede $\sigma \in \text{Per}(X)$ gilt

$\sigma \circ \text{id}_X = \text{id}_X \circ \sigma = \sigma$, somit ist id_X Neutralelement in $(\text{Per}(X), \circ)$.

- Inverse: Für jedes $\sigma \in \text{Per}(X)$ ist die Umkehrabbildung σ^{-1} das zu σ inverse Element, denn nach Def. gilt $\sigma \circ \sigma^{-1} = \text{id}_X$ und $\sigma^{-1} \circ \sigma = \text{id}_X$.

wichtiger Spezialfall:

Ist $n \in \mathbb{N}$ und $X = M_n = \{1, 2, \dots, n\}$, dann nennt man $S_n = (\text{Per}(X), \circ) = (\text{Per}(M_n), \circ)$ die symmetrische Gruppe in n Elementen.

Eigenschaften: (i) $|S_n| = n!$

(ii) Darstellung der Elemente von S_n in Tabellenschreibweise

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$ steht für die Abbildung
 $1 \mapsto 4, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(Probe: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \text{id}_{M_4}$)

iii) Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k \leq n$, und seien $m_1, \dots, m_k$ k verschiedene Elemente aus M_n . Betrachte das Element $\sigma \in S_n$ geg. durch

$$\sigma(x) = \begin{cases} m_{i+1} & \text{falls } x = m_i, i < k \\ m_1 & \text{falls } x = m_k \\ x & \text{falls } x \notin \{m_1, \dots, m_k\} \end{cases}$$

Dann nennt man σ ein k -Zykel und $\{m_1, \dots, m_k\}$ den Träger des k -Zykels.

Allgemein ist der Träger eines Elements $\tau \in S_n$ durch $\text{supp}(\tau) = \{x \mid \tau(x) \neq x\}$ definiert.

Man verwendet für den k -Zykel die Schreibweise $(m_1 m_2 \dots m_k)$

(beachte: $(m_1 m_2 \dots m_k) = (m_2 m_3 \dots m_k m_1)$)

Bsp: $(2 3 5 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
 $= (3 5 4 2) = (5 4 2 3) = (4 2 3 5)$

wichtig:

- Jedes Element von S_n kann als Produkt von Zykeln mit disjunkten Trägern dargestellt werden.

Bsp

mög

(1)

(2)

$\Rightarrow$

Beispiel

möglich

(1), (2)

- Diese Darstellung ist eindeutig bis auf Reihenfolge der Faktoren.

Bsp. $(1235) \circ (67) \circ (48) \in S_8$
ist ein Element vom Zerlegungstyp $(4, 2, 2)$.

Beispiel 1: Elemente von S_3

mögliche Zerlegungstypen in S_3 :

(1) (= Produkt von null Zyklen = Identität)

(2) (= 2-Zykel) (3) (= 3-Zykel)

$$\Rightarrow S_3 = \{ \text{id}, (12), (13), (23), (123), (132) \}$$

Beispiel 2: Elemente von S_4

mögliche Zerlegungstypen:

(1), (2), (3), (4), (2, 2)

$$S_4 = \{ \text{id}, (12), (13), (14), (23), (24), (34), \\ (123), (132), (124), (142), (134), (143), \\ (234), (243), (1234), (1324), (1432), \\ (1243), (1342), (1423), (12) \circ (34), \\ (13) \circ (24), (14) \circ (23) \}$$