Über den Beweis der Bloch-Kato-Vermutung

Abschlussarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Master of Science

des Fachbereichs Physik, Mathematik und Informatik
der Johannes Gutenberg-Universität Mainz

vorgelegt von
Christoph Spies

betreut von
Jun.-Prof. Dr. Nikita Semenov

Mainz, 15. Mai 2012

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Desweiteren wurde diese Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt.

Mainz, 15. Mai 2012

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit skizziert den Beweis der Milnor-/ Bloch-Kato-Vermutung nach Voevodsky und Rost. Es wird vor allem die Strukturierung und Logik an der Oberfläche des Beweises erläutert, sowie eine Einführung in die zugrundeliegenden algebraischen Strukturen gegeben. Die Arbeit richtet sich an Neulinge und soll einen Einstieg ins Studium des Beweisprogramms Voevodskys geben.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Mit den Worten „*I do not know of any examples for which the homomorphism […] fails to be bijective*“ äußerte John Milnor [**Mil70**, S. 340] in seinem Artikel „Algebraic K-Theory and Quadratic Forms“ die nach ihm benannte *Milnor-Vermutung*. Diese besagt die Bijektivität des Normresthomomorphismus zwischen Milnor'schen K-Gruppen und Galoiskohomologiegruppen mit $\mathbb{Z}/2$-Koeffizienten,

$$K_n^M(k)/2 \longrightarrow H^n(k, \mathbb{Z}/2),$$

für alle ganzen Zahlen $n \geq 0$ und Körper k der Charakteristik ungleich zwei besagt. Kazuya Kato [**Kat80**, Vermutung 1] verallgemeinerte diese Vermutung und stellte die Frage, ob der Normresthomomorphismus $K_n^M(k)/m$ bijektiv abbildet auf $H^n(k, \mu_m^{\otimes n})$ für allgemeine natürliche Zahlen $m \geq 2$, die kein Vielfaches der Körpercharakteristik sind. Unabhängig davon vermutete dies zudem Spencer Bloch [**Blo80**] im Spezialfall von Funktionenkörpern k über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Infolgedessen wurde diese Vermutung unter dem Namen *Bloch-Kato-Vermutung* berühmt. Deren Gültigkeit bedeutet einerseits, dass die für allgemeine Körper k eher schlecht intuitiv begreifbare Gruppe $H^n(k, \mu_m^{\otimes n})$ eine einfache Präsentation bezüglich Erzeuger und Relationen besitzt. Andererseits erlaubt die Bijektivität des Normresthomomorphismus, für konkrete Körper bekannte Berechnungen der Galoiskohomologiegruppe auf die Milnor'schen K-Gruppen zu übertragen.

Für bestimmte Klassen von Körpern lieferte Milnor [**Mil70**] (mit Berechnungen von Hyman Bass und John Tate [**BT73**]) bereits Nachweise über die Bijektivität vom Normresthomomorphismus. So war die Gültigkeit der Milnor-Vermutung frühzeitig klar für den Fall von endlichen, lokalen, globalen und reell-abgeschlossenen Körpern. Weiter ist im Falle der allgemeinen Bloch-Kato-Vermutung der Fall $n = 0$ trivial und der Fall $n = 1$ lediglich eine Umformulierung von Hilberts berühmtem Satz 90 in der galoiskohomologischen Fassung $H^1(k, \mathbb{G}_\mathrm{m}) = 0$. Der erste große Durchbruch für allgemeine Körper gelang Alexander Merkurjev [**Mer81**], wo er die Milnor-Vermutung im Grad $n = 2$ aus einer Verallgemeinerung von Hilberts klassischem Satz 90 auf Milnor'sche K-Theorie im Grad zwei folgert. Dies ist der Ausgangspunkt von allen späteren Beweisen im Zusammenhang mit der Bloch-Kato-Vermutung. Kurz darauf vollbrachte Merkurjev zusammen mit Andrei Suslin [**MS82**] den Beweis der Bloch-Kato-Vermutung für $n = 2$ und beliebige Zahlen m. Dieses Resultat ist als Theorem von Merkurjev-Suslin bekannt und berührt einige klassische Fragestellungen in Bezug auf zentral einfache k-Algebren. Sofern nämlich der Körper k eine primitive m-te Einheitswurzel enthält, erhalten wir aus der Bijektivität des Normresthomomorphismus einen Isomorphismus $K_2^M(k)/m \to {}_m\mathrm{Br}(k)$ von der zweiten Milnor'schen K-Gruppe in die m-Torsion der Brauergruppe. Die Surjektivität dieses Homomorphismus gibt in diesem Fall eine positive Antwort auf die alte Frage, ob jede zentral einfache k-Algebra vom Exponent m Brauer-äquivalent ist zu einem Produkt von Normrestalgebren (a, b, ζ), wobei a, b Elemente aus $k^\times$ sind und ζ eine primitive m-Einheitswurzel in k bezeichnet. Speziell für $m = 2$ bedeutet dies, dass Elemente der Ordnung zwei in $\mathrm{Br}(k)$ immer durch ein Tensorprodukt von Quaternionenalgebra repräsentiert werden können. Ebenfalls von Merkurjev und Suslin [**MS90**] liegt ein Beweis der Bloch-Kato-Vermutung im Fall $n = 3$, $m = 2$ vor, was unabhängig davon mit anderen Methoden auch von Markus Rost [**Ros86**] gezeigt wurde. Desweiteren hatte Rost einen Beweis für den Fall $n = 4$, $m = 2$ angekündigt.

In den frühen neunziger Jahren begann von Seiten Voevodskys das Beweisprogramm der Milnor-Vermutung, d.h. für den Fall $m = 2$. Dabei wird eine Induktion nach der Zahl n vorgenommen. Mit seinem Preprint [**Voe95**] erschien im Jahre 1995 ein erster Beweis der Milnor-Vermutung unter Annahme der Existenz einer höheren *algebraischen* Morava K-Theorie. Dieses zum damaligen Zeitpunkt noch nicht bekannte algebraische Analogon zu der von Jack Morava entwickelten Theorie in algebraischer Topologie sollte das gleiche Verhalten zur gewöhnlichen algebraischen K-Theorie und zur motivischen Kohomologie an den Tag legen wie die topologische Morava K-Theorie zur komplex-topologischen K-Theorie und Kohomologie. Die Konstruktion einer solchen Theorie ist unter anderem Gegenstand von [**Bor03**].In der Zwischenzeit vollendete Voevodsky [**Voe03a**, **Voe03b**, **Voe96**] einen eigenständigen Beweis der Milnor-Vermutung ohne Benutzung von algebraischer Morava K-Theorie, wofür er auf dem Internationalen Mathematikerkongress im Jahre 2002 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet wurde. Darauf aufbauend gelang wesentlich mit Methoden von Rost (dazu später mehr) der allgemeine Beweis der Bloch-Kato-Vermutung [**Voe11**].

Der Grundstein in Voevodskys Beweis (von Bloch-Kato- sowie Milnor-Vermutung) ist die Entwicklung einer geeigneten *motivischen Kohomologietheorie*, welche die Konzepte von Milnor'scher K-Theorie und Galoiskohomologie vereint und mithilfe derer der Normresthomomorphismus auf ganz natürliche Art und Weise von einem Wechsel der Topologie kommt. Die Ideen zu dieser Theorie gehen zurück auf Alexander Beilinson [**Bei87**] und Stephen Lichtenbaum [**Lic84**] und wurden maßgeblich von Voevodsky, Suslin und Friedlander [**VSF00**,**SV99**] ausgearbeitet. Im Zuge dessen gelang auch die Konstruktion einer *triangulierten Kategorie von Motiven*, die eine Verallgemeinerung von (simplizialen) Schemata darstellt und einen geeigneten Rahmen für viele Berechnungen in den tieferen Ebenen des Beweises liefert. Maßgeblich für Voevodskys Beweise ist das Verschwinden einer gewissen (étale-)motivischen Kohomologiegruppe, was einem motivischen Analogon zu Hilberts Satz 90 entspricht. Dies wiederum folgert er aus der Existenz sogenannter *Normvarietäten* $X_{\underline{a}}$ für Symbole $\underline{a}$ aus $K_n^M(k)/m$. Bereits die Arbeiten von Merkurjev und Suslin benutzen solche Varietäten. Im Falle $n = 1$ sind dies Spektren von Körpererweiterungen $k(\sqrt[m]{a})/k$, und im Falle $n = 2$ die in [**MS82**] benutzten Severi-Brauer-Varietäten. Beim Beweis der Milnor-Vermutung arbeitet man mit *Normquadriken*, die einen engen Bezug zu Pfister-Quadriken haben und mit deren Untersuchung sich Rost [**Ros88**] im Zuge des Beweisprogramms beschäftigte. Unter anderem haben Normvarietäten die Eigenschaft, dass die K-Gruppen ihrer Funktionenkörper das Element $\underline{a}$ spalten, und dass die natürliche Abbildung zwischen den motivischen Kohomologiegruppen von k und $k(X_{\underline{a}})$ injektiv ist. Um letzteres Resultat zu erhalten, benötigt man das Verschwinden vom Bild einer gewissen motivischen Kohomologiegruppe des simplizialen Schemas $\check{C}(X_{\underline{a}})$ unter dem kanonischen Topologiewechsel von Nisnevich- in étale Topologie. An dieser Stelle unterscheiden sich die beiden Ansätze Voevodskys in [**Voe95**] und [**Voe96**] maßgeblich. In der ersten Arbeit folgert er dies aus den Axiomen der Morava K-Theorie, wohingegen er in der zweiten Arbeit das Verschwinden der besagten Kohomologiegruppe von $\check{C}(X_{\underline{a}})$ selbst zeigt. Letzteres geschieht durch eine Einbettung in eine „höhere“ Kohomologiegruppe von $\check{C}(X_{\underline{a}})$, deren Trivialität mithilfe von geometrischen Argumenten in Bezug auf die Varietät $X_{\underline{a}}$ gezeigt wird. Dabei spielt insbesondere das *Rostmotiv* (nach Rost [**Ros90**, **Ros98b**]) eine Rolle.

Die meisten Resultate in Voevodskys Beweis der Milnor-Vermutung sind nicht auf den Fall $m = 2$ beschränkt, sondern sie sind gültig für beliebige Primzahlen. Das Problem zum damaligen Zeitpunkt war jedoch das Fehlen geeigneter Normvarietäten. Der Nachweis der Existenz solcher Varietäten basiert auf zwei tiefen Resultaten von Rost – dem *Kettenlemma* [**Ros98a**] sowie dem *Normprinzip*. Publiziert wurden diese Ergebnisse von Suslin und Joukhovitski [**SJ06**] als Teil des Induktionsschritts im Beweis der Bloch-Kato-Vermutung. Einen unabhängigen Beweis liefern Haesemeyer und Weibel [**HW08**]. Da die Existenzbeweise von Rost letztendlich der Durchbruch im Beweis der Bloch-Kato-Vermutung (gegenüber dem der Milnor-Vermutung) waren, ist die Bijektivität von $K_n^M(k)/m \to H^n(k, \mu_m^{\otimes n})$ als *Theorem von Rost-Voevodsky* bekannt.

Struktur und Zielsetzung dieser Arbeit

Die vorliegende Arbeit soll als eine Einführung ins Studium der Bloch-Kato-Vermutung dienen. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Präsentation der Ideen und Strukturen in der äußeren Hülle des Beweises, sowie der sorgfältigen Behandlung einiger Argumente, die in den Artikeln von Voevodsky als elementar vorausgesetzt werden und für Einsteiger nicht ersichtlich sind. Im ersten Kapitel werden die zugrundeliegenden algebraischen Strukturen wie die Milnor'schen K-Gruppen und die Kohomologiegruppen von Körpern erläutert, sowie die mit der Milnor-Vermutung in Verbindung stehende Theorie der Bilinearformen über Körpern vorgestellt. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Formulierung der Bloch-Kato-Vermutung sowie mit deren Beziehung zu anderen Vermutungen, wie etwa der Beilinson-Lichtenbaum-Vermutung oder dem motivischen Hilberts Satz 90. Außerdem wird ein Überblick über die Konstruktion von motivischer Kohomologie und motivischen Kategorien gegeben. In Kapitel III wird schließlich eine Präsentation der wesentlichen Schritte im Beweis gegeben. Dabei wird insbesondere die allgemeine Beweisstrategie anhand des Falls $n = 1$ aufgezeigt (Abschnitt

III.2), sowie Merkurjevs Argument der transfinit rekursiven Konstruktion von geeigneten Körpererweiterungen (Abschnitt III.6) ausführlich erläutert.

KAPITEL I

Grundlagen

Dieses Kapitel soll einen Überblick über die wesentlichen Techniken für die Formulierung der Bloch-Kato-Vermutung geben. Bei entsprechender Vorkenntnis kann dieser Teil übersprungen werden und gegebenenfalls zu einem späteren Zeitpunkt als Ergänzung oder zum Nachschlagen einiger Resultate herangezogen werden. Im ersten Abschnitt wird die Milnor´sche K-Theorie sowie im zweiten Abschnitt die Galoiskohomologie vorgestellt, mithilfe derer der Normresthomomorphismus formuliert ist. Alternativ zu Galoiskohomologie von Körpern kann man auch die äquivalente étale Kohomologie von (Spektren von) Körpern verwenden, die in das für den Beweis der Bloch-Kato-Vermutung relevante umfangreichere Konzept von étaler Kohomologie beliebiger Schemata eingebettet ist und in Abschnitt drei besprochen wird. Im Abschnitt vier geben wir einen kurzen Überblick über die Theorie der symmetrischen Bilinearformen und deren Beziehung zu Milnor'scher K-Theorie.

1. Milnor'sche K-Theorie

Der Hintergrund zur Entwicklung der Milnor'schen K-Theorie war die Suche nach geeigneten Defintionen von höheren algebraischen K-Gruppen. Mit der von Milnor [**Mil71**] eingeführten Definition von $K_2(R)$ hat die zweite K-Gruppe für Körper eine explizite Darstellung bezüglich Erzeugern und Relationen, welche sich verallgemeinern lässt zu einer Definition von $K_n(k)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1.A. Definitionen und elementare Eigenschaften. Sei k ein beliebiger Körper. Wir setzen $K_0^M(k) = \mathbb{Z}$. Weiter sei $K_1^M(k)$ die additive abelsche Gruppe erzeugt von Elementen $\{a\}$ ($a \in k^\times$) mit der Relation $\{a\} + \{b\} = \{ab\}$. Die Abbildung $a \mapsto \{a\}$ ist dann ein Isomorphismus zwischen der multiplikativen Gruppe $k^\times$ und der additiven Gruppe $K_1^M(k)$. Offensichtlich gilt $\{1\} = 0$ und $-\{a\} = \{a^{-1}\}$ in $K_1^M(k)$. Als abelsche Gruppe trägt $K_1^M(k)$ eine $\mathbb{Z}$-Modulstruktur, sodass wir Tensorprodukte über $\mathbb{Z}$ bilden können. Wir setzen

$$K_n^M(k) \coloneqq K_1^M(k)^{\otimes n} / \langle \{a_1\} \otimes \ldots \otimes \{a_n\} \mid a_i \in k^\times,\ \exists j :\ a_j + a_{j+1} = 1 \rangle.$$

Das Bild von $(a_1, \ldots, a_n) \in (k^\times)^n$ in $K_n^M(k)$ sei mit $\{a_1, \ldots, a_n\}$ notiert. Aus der Relation von $K_1^M(k)$ und den Eigenschaften des Tensorprodukts über $\mathbb{Z}$ folgt sofort

$$\{a_1, \ldots, a_i a_i', \ldots, a_n\} = \{a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n\} + \{a_1, \ldots, a_i', \ldots, a_n\} \text{ in } K_n^M(k).$$

Durch die Multiplikation

$$\{a_1, \dots, a_m\} \cdot \{b_1, \dots, b_n\} \coloneqq \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}$$

erhält $K_*^M(k) \coloneqq \bigoplus_{n=0}^{\infty} K_n^M(k)$ die Struktur eines graduierten Ringes mit Einselement. Als Ring ist $K_*^M(k)$ erzeugt von Elementen $\{a\} \in K_1^M(k)$ mit der Relation $\{a\} \cdot \{1-a\} = 0$ für $a \neq 0, 1$ (und der Relation aus $K_1^M(k)$, $\{a\} + \{b\} = \{ab\}$).

1.1. Bemerkung. Eine weitere Möglichkeit zur Definition von $K_n^M(k)$ besteht darin, zunächst zur Tensoralgebra

$$T^*(k) = \mathbb{Z} \oplus \left(k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} k^\times\right) \oplus \left(k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} k^\times\right) \oplus \cdots = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \left(k^\times\right)^{\otimes n}$$

überzugehen (wobei wir $k^\times$ auf die übliche Art und Weise mittels $m \cdot a \coloneqq a^m$ für $m \in \mathbb{Z}$, $a \in k^\times$ als $\mathbb{Z}$-Modul interpretieren) und anschließend

$$K_*^M(k) = T^*(k) / \langle a \otimes (1-a) \mid a \in k^\times \setminus \{1\} \rangle$$

zu setzen. Mit $K_n^M(k)$ bzeichnet man dann die Untergruppe von $K_*^M(k)$ von Elementen der Länge n.

1.2. Definition & Bemerkung (Funktorialität)**.** Die Zuordnung $k \mapsto K_n^M(k)$ zwischen der Kategorie von Körpererweiterungen über einem festen Körper und der Kategorie abelscher Gruppen ist offensichtlich funktoriell. Für eine Erweiterung L/k sei $\mathrm{res}_{L/k} \colon K_n^M(k) \to K_n^M(L)$ die Abbildung $\{a_1, \dots, a_n\} \mapsto \{a_1, \dots, a_n\}$, wobei die a_i auf der rechten Seite als Elemente von L aufgefasst werden. Wir schreiben $\alpha_L = \mathrm{res}_{L/k}(\alpha)$ für Elemente $\alpha \in K_n^M(k)$. Die Abbildung $\mathrm{res}_{L/k}$ nennt man **Restriktionsabbildung** der Milnor'schen K-Theorie.

Unmittelbar aus den Definitionen können wir einige nützliche Rechenregeln ableiten.

1.3. Proposition. Für $a, b \in k^\times$ gelten in $K_2^M(k)$ und somit $K_*^M(k)$ folgende Identitäten:

1) $\{a, -a\} = 0$.
2) $\{a, a\} = \{a, -1\}$.
3) $\{a, b\} = -\{b, a\}$, folglich $\alpha\beta = (-1)^{mn}\beta\alpha$ für $\alpha \in K_m^M(k)$, $\beta \in K_n^M(k)$.

Beweis. 1) Gilt $a = 1$, so ist die Behauptung klar. Für $a \in k^\times \setminus \{1\}$ gilt die Identität $-a = (1-a)\left(1-a^{-1}\right)^{-1}$, folglich $\{-a\} = \{1-a\} - \{1-a^{-1}\}$ in $K_1^M(k)$ und somit

$$\{a, -a\} = \{a, 1-a\} - \{a, (1-a^{-1})\} = \{a^{-1}, 1-a^{-1}\} = 0.$$

2) $\{a, a\} = \{a, -1\} + \{a, -a\} \overset{1)}{=} \{a, -1\}$.

3) Es gilt $\{a, b\} = \{a, -a\} + \{a, b\} = \{a, -ab\}$, genauso $\{b, a\} = \{b, -ab\}$. Somit

$$\{a, b\} + \{b, a\} = \{a, -ab\} + \{b, -ab\} = \{ab, -ab\} \overset{1)}{=} 0. \qquad \square$$

1.4. Proposition. Wir haben $\{a_1, \dots, a_n\} = 0$ in $K_n^M(k)$ für alle Elemente $a_1, \dots, a_n$ in k wannimmer $a_1 + \ldots + a_n = 0$ oder 1 gilt.

Beweis. Für $n = 1$ und 2 folgt die Behauptung aus der Definition und der vorangegangenen Proposition. Sei also $n \geq 3$. Wir nehmen induktiv an, dass die Behauptung für $n-1$ gezeigt ist. Gilt $a_1 + a_2 = 0$, so ist bereits $\{a_1, a_2\} = 0$ in $K_2^M(k)$. Sonst gilt in k

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2} = 1$$

und folglich in $K_2^M(k)$

$$\big(\{a_1\} - \{a_1 + a_2\}\big) \cdot \big(\{a_2\} - \{a_1 + a_2\}\big) = 0.$$

Multiplikation mit $\{a_3, \dots, a_n\}$ und Ausnutzen von Antikommutativität und Induktionsvoraussetzung

$$\{a_1 + a_2, a_3, \dots, a_n\} = 0$$

liefern $\{a_1, \dots, a_n\} = 0$. $\square$

1.B. Milnor'sche K-Theorie von endlichen Körpern. Für endliche Körper liefert der folgende Satz nach Robert Steinberg eine vollständige Klassifikation der Milnor'schen K-Gruppen.

1.5. Satz (Steinberg)**.** Sei $\mathbb{F}_q$ endlicher Körper mit $q = p^n$ Elementen, wobei p eine Primzahl ist. Dann gilt $K_2^M(\mathbb{F}_q) = 0$ und folglich $K_n^M(\mathbb{F}_q) = 0$ für alle $n \geq 2$.

Beweis. Der Körper $\mathbb{F}_q^\times$ ist zyklisch von Ordnung $q-1$. Sei x ein Erzeuger von $\mathbb{F}_q^\times$. Die Gruppe $K_2^M(\mathbb{F}_q)$ hat höchstens Ordnung zwei, denn $2\{x, x\} = 2\{x, -1\} = \{x, 1\} = 0$ und folglich ist $\{x^i, x^j\} = ij\{x, x\}$ entweder 0 oder $\{x, x\}$, abhängig davon, ob ij gerade oder ungerade ist. Wir wollen zeigen, dass stets $\{x, x\} = 0$ gilt. Ist $q-1$ ungerade, so folgt direkt

$$0 = \{x, 1\} = \{x, x^{q-1}\} = (q-1)\{x, x\} = \{x, x\}.$$

Ist $q-1$ andernfalls gerade, so existieren in $\mathbb{F}_q^\times \setminus \{1\}$ mehr Nichtquadrate als Quadrate. Da durch $a \mapsto 1-a$ eine Bijektion auf $\mathbb{F}_q^\times \setminus \{1\}$ gegeben ist, finden wir ein $a \in \mathbb{F}_q^\times \setminus \{1\}$, sodass sowohl a als auch $1-a$ Nichtquadrate sind. Somit existieren ungerade i, j mit $a = x^i$, $1 - a = x^j$, woraus folgt:

$$0 = \{a, 1-a\} = \{x^i, x^j\} = ij\{x, x\} = \{x, x\}.$$ $\square$

1.C. Milnor'sche K-Theorie der reellen Zahlen. Für den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ haben wir die folgende explizite Darstellung der Milnor'schen K-Gruppen.

1.6. Satz. $K_n^M(\mathbb{R}) = \langle\{-1\}^n\rangle \oplus \langle\{a_1, \dots, a_n\} \mid a_i > 0 \ \forall i\rangle$.

1.7. Bemerkung. Hierbei seien $C_n \coloneqq \langle\{-1\}^n\rangle$ und $D_n \coloneqq \langle\{a_1, \dots, a_n\} \mid a_i > 0 \ \forall i\rangle$ additiv erzeugte abelsche Gruppen. Die Gruppe C_n ist zyklisch von Ordnung zwei, denn es gilt $2\{-1\}^n = \{1\}\{-1\}^{n-1} = 0$. Weiter ist D_n dividierbar – für $a_1 > 0$ und $m \in \mathbb{Z}$ existiert die Wurzel $\sqrt[m]{a_1} > 0$, somit ist der Erzeuger $\{a_1, \dots, a_n\}$ von D_n durch m teilbar in D_n:

$$m\{\sqrt[m]{a_1}, a_2, \dots, a_n\} = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Beweis von Satz 1.6. Um $C_n \cap D_n = 0$ zu sehen zeigt man, dass $\{-1\}^n$ nicht durch 2 dividierbar ist. Folglich kann kein nichttriviales Element aus C_n in der dividierbaren Gruppe D_n liegen. Hierzu betrachten wir den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \phi_n\colon \mathbb{R}^\times \times \ldots \times \mathbb{R}^\times &\longrightarrow \mathbb{Z}/2 \\ (a_1, \ldots, a_n) &\longmapsto \textstyle\prod_{i=1}^n \frac{1-\operatorname{sign} a_i}{2}. \end{aligned}$$

ϕ_n ist n-linear, d.h. in jeder Komponente ein Homomorphismus von der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}^\times$ in die additive Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Weiter gilt $\phi_n(a_1, \ldots, a_n) = 0$ genau dann, wenn $a_i > 0$ für mindestens ein i. Dies ist erfüllt, wannimmer $a_i + a_j = 1$ gilt. Folglich induziert ϕ_n einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi_n\colon K_n^M(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}/2$$

mit $\Phi_n(\{-1\}^n) = 1$. Angenommen es gilt nun $\{-1\}^n = 2\{a_1, \ldots, a_n\} = \{a_1^2, a_2, \ldots, a_n\}$. Dann erhalten wir in $\mathbb{Z}/2$ den Widerspruch

$$0 = \Phi_n(0) = \Phi_n\big(\{a_1^2, a_2, \ldots, a_n\} - \{-1\}^n\big) = \underbrace{\Phi_n\big(\{a_1^2, a_2, \ldots, a_n\}\big)}_{=0,\ \text{da}\ a_1^2>0} - \underbrace{\Phi_n\big(\{-1\}^n\big)}_{=1} = 1.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $K_n^M(\mathbb{R}) = C_n + D_n$. Dazu führen wir eine Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ durch. Für $n = 1$ und $\{b\} \in K_1^M(\mathbb{R})$ gilt $\{b\} = \{1\} + \{b\}$ im Falle $b > 0$, oder $\{b\} = \{-1\} + \{-b\}$ im Falle $b < 0$. Sei nun $n \geq 2$. Wir nehmen an, die Aussage sei bewiesen für $n-1$. Sei $\{b_1, \ldots, b_n\} \in K_n^M(\mathbb{R})$ beliebig. Nach Induktionsvoraussetzung und -anfang existieren Darstellungen

$$\begin{aligned} \{b_1\} &= \gamma_1 + \delta_1 \in C_1 + D_1, \\ \{b_2, \ldots, b_n\} &= \gamma_{n-1} + \delta_{n-1} \in C_{n-1} + D_{n-1}. \end{aligned}$$

Es genügt also nachzuprüfen, dass $\gamma_1 \cdot \gamma_{n-1} \in C_n$ und $\gamma_1 \cdot \delta_{n-1}$, $\delta_1 \cdot \gamma_{n-1}$, $\delta_1 \cdot \delta_{n-1} \in D_n$ gilt. Desweiteren ist es ausreichend, Erzeuger der jeweiligen Gruppen zu betrachten. Die erste und letzte Beziehung ist sofort klar, und die anderen beiden folgen mit Proposition 1.3 2): Sind $\{-1\} \in C_1$ und $\{a_2, \ldots, a_n\} \in D_{n-1}$ Erzeuger der jeweiligen Gruppen, so gilt

$$\{-1\} \cdot \{a_2, \ldots, a_n\} = -\{a_2, -1, \ldots, a_n\} = -\{a_2, a_2, \ldots, a_n\} \in D_n,$$

und sind $\{a_1\} \in D_1$ und $\{-1\}^{n-1} \in C_{n-1}$ Erzeuger, so haben wir

$$\{a_1\} \cdot \{-1\}^{n-1} = \{a_1\}^n \in D_n.$$

□

1.D. Milnor'sche K-Theorie von diskret bewerteten Körpern. In diesem Unterabschnitt sei k ein Körper mit einer diskreten Bewertung $\nu\colon k^\times \to \mathbb{Z}$. Wir schreiben $\Lambda = \Lambda_\nu$ für den *Bewertungsring* $\{a \in k^\times \mid \nu(a) \geq 0\}$ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\nu$ für das einzige maximale Ideal $\{a \in k^\times \mid \nu(a) > 0\}$ in Λ. Mit $k(\nu)$ bezeichnen wir den Restklassenkörper gegeben durch $\Lambda/\mathfrak{m}$. Die Klasse von $a \in \Lambda$ in $k(\nu)$ notieren wir mit $\bar{a}$. Die Einheitengruppe $\Lambda^\times$ ist gegeben durch alle Elemente a mit $\nu(a) = 0$. Man spricht bei solchen Elementen auch von *Einheiten* des Körpers k *bezüglich* ν. Körperelemente $\pi \in k^\times$ mit $\nu(\pi) = 1$ nennt man außerdem *Primelemente*. Jedes Element a in $k^\times$ kann eindeutig dargestellt werden als $u\pi^i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ und $u \in \Lambda^\times$, nämlich mit $i = \nu(a)$ und $u = a\pi^{-\nu(a)}$.

1.8. Lemma. Sei $\pi \in k^\times$ ein fest gewähltes Primelement. Dann wird die Gruppe $K_n^M(k)$ erzeugt von Elementen der Form

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \quad \text{und} \quad \{\pi, u_2, \ldots, u_n\}$$

mit $u_i \in \Lambda^\times$.

Beweis. Sei $\{a_1, \ldots, a_n\} \in K_n^M(k)$ ein beliebiges Element mit $a_j = u_j \pi^{i_j}$. Wir können dieses Element als das Produkt

$$\prod_{j=1}^{n} \Big(\{u_j\} + i_j \{\pi\} \Big)$$

schreiben. Ausmultiplizieren liefert eine Summe, bei der jeder Summand von der Gestalt $\pm \{\pi\}^r \{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ ist für ein $0 \leq r \leq n$ und jedes v_j mit einem der u_j übereinstimmt. Im Falle $r = 0$ ist der Summand von der Gestalt des ersten Elements in der Behauptung des Lemmas. Für $r \geq 1$ können wir Eigenschaft 2) anwenden, sodass sich der Summand als $\pm \{\pi\} \{-1\}^{r-1} \{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ schreiben lässt. Da -1 in $\Lambda^\times$ liegt, haben wir also ein Element der zweiten Gestalt. $\square$

1.9. Satz (Zahmes Symbol und Spezialisierung)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann existiert genau ein Homomorphismus

$$\partial_\nu \colon K_n^M(k) \longrightarrow K_{n-1}^M(k(\nu))$$

mit der Eigenschaft

$$\{\pi, u_2, \ldots, u_n\} \longmapsto \{\bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\} \quad \text{für alle } \pi \in k^\times \text{ prim und } u_i \in \Lambda^\times. \tag{I.1.1}$$

Die Abbildung ∂_ν heißt **zahmes Symbol** oder auch **Restabbildung** (engl. *residue map*). Wählen wir ein festes Primelement $\pi \in k^\times$, so existiert ferner genau ein Homomorphismus

$$\psi_\pi \colon K_n^M(k) \longrightarrow K_n^M(k(\nu))$$

mit der Eigenschaft

$$\big\{u_1\pi^{i_1}, \ldots, u_n\pi^{i_n}\big\} \longmapsto \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\} \quad \text{für alle } u_i \in \Lambda^\times. \tag{I.1.2}$$

Die Abbildung ψ_π wird auch **Spezialisierungsabbildung** genannt.

1.10. Bemerkung. Aus Eigenschaft (I.1.1) folgt stets $\partial_\nu\big(\{u_1, \ldots, u_n\}\big) = 0$ für alle $u_i \in \Lambda^\times$, da u_1 das Produkt der Primelemente $u_1\pi$ und π^{-1} ist und folglich

$$\partial_\nu\big(\{u_1, \ldots, u_n\}\big) = \partial_\nu\big(\{u_1\pi, u_2, \ldots, u_n\}\big) - \partial_\nu\big(\{\pi, u_2, \ldots, u_n\}\big) = 0$$

gilt.

Beweis der Eindeutigkeit. Die Abbildungen ∂_ν und ψ_π sind durch die genannten Eigenschaften nach Lemma 1.8 und Bemerkung 1.10 eindeutig auf den Erzeugern von $K_n^M(k)$ festgelegt. $\square$

John Milnor verweist in [**Mil70**] auf eine von J.-P. Serre vorgeschlagene Konstruktion, die synchron die Existenz von ∂_ν und ψ_π beweist. Diese wird im Folgenden erläutert.

Beweis der Existenz. Sei $K_*^M(k)\langle\zeta\rangle = K_*^M(k) \oplus \zeta K_*^M(k)$ die additive abelsche Gruppe bestehend aus Elementen $\alpha + \zeta\beta$ mit α, $\beta \in K_*^M(k)$ und einem formalen Symbol ζ. Wir definieren auf $K_*^M(k)\langle\zeta\rangle$ eine Ringmultiplikation durch $\zeta^2 := \{-1\}\zeta$ sowie $\{a\}\zeta := -\zeta\{a\}$. Weiter sei $\pi \in \Lambda^\times$ ein fest gewähltes Primelement. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \theta = \theta_\pi \colon k^\times &\longrightarrow K_*^M(k)\langle\zeta\rangle \\ u\pi^i &\longmapsto \{\bar{u}\} + \zeta i. \end{aligned}$$

Diesen wollen wir auf natürliche Weise zu einem Homomorphismus $K_*^M(k) \to K_*^M(k)\langle\zeta\rangle$ erweitern, wozu wir die Identität

$$\theta(a)\theta(1-a) = 0 \quad \text{für alle } a \in k^\times$$

zeigen müssen. Dazu sei $a = u\pi^{\nu(a)}$.

1. Fall. Es gelte $\nu(a) = 0$. Dann ist $1-a$ ein Element in Λ, da $\nu(1-a) \geq \min\{\nu(1), \nu(a)\} = 0$.
Falls $\nu(1-a) = 0$, d.h. $1-a \in \Lambda^\times$ gilt, so ist $\theta(a)\theta(1-a) = \{\bar{u}\}\{1-\bar{u}\} = 0$.
Falls $\nu(1-a) > 0$, d.h. $1-a \in \mathfrak{m}$ gilt, so ist bereits $\theta(a) = \{\bar{a}\} = \{1\} = 0$.

2. Fall. Es gelte $\nu(a) > 0$, also $a \in \mathfrak{m}$. Folglich gilt $1-a \notin \mathfrak{m}$, da $\mathfrak{m}$ sonst das Einselement $a + (1-a)$ enthalten würde im Widerspruch zu $\nu(1) = 0$. Wir haben demnach $\nu(1-a) \leq 0$. Andererseits gilt $\nu(1-a) \geq \min\{\nu(1), \nu(a)\} = 0$, sodass $1-a$ in $\mathfrak{m}$ liegt. Wie im zweiten Teil vom ersten Fall ergibt sich $\theta(1-a) = \{1\} = 0$.

3. Fall. Es gelte $\nu(a) < 0$. In diesem Fall liegt a^{-1} in $\mathfrak{m}$ und der zweite Fall besagt, dass $\theta(a^{-1})\theta(1-a^{-1}) = 0$ gilt. Hiermit folgt

$$\begin{aligned} \theta(a)\theta(-a) &= \theta(a)\theta(-a) - \theta(a^{-1})\theta(1-a^{-1}) \\ &= \theta(a)\theta(-a) + \theta(a)\theta(1-a^{-1}) \\ &= \theta(a)\theta(-a(1-a^{-1})) \\ &= \theta(a)\theta(1-a). \end{aligned}$$

Es bleibt also $\theta(a)\theta(-a) = 0$ zu zeigen. Wir haben

$$\begin{aligned} &\theta(\pi)\theta(-\pi) = \zeta(\{-1\} + \zeta) = -\{-1\}\zeta + \{-1\}\zeta = 0 \\ &\theta(u)\theta(-u) = \{\bar{u}\}\{-\bar{u}\} = 0 \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\theta(u\pi^i)\theta(-u\pi^i) &= \big(\theta(u)+\theta(\pi)\big)\big(\theta(u)+\theta(-1)+i\theta(\pi)\big)\\ &= \underbrace{\theta(u)\theta(-u)}_{0} + \underbrace{i\theta(u)\theta(\pi)+i\theta(\pi)\theta(u)}_{0} + i^2\underbrace{\theta(\pi)\theta(-\pi)}_{0} = 0.\end{aligned}$$

Somit induziert θ einen Ringhomomorphismus $K_*^M(F) \to K_*^M(k)\langle\zeta\rangle$. Es existieren dadurch Ringhomomorphismen $\psi_\pi\colon K_*^M(k) \to K_*^M(k(\nu))$ und $\partial_\nu\colon K_*^M(k) \to K_{*-1}^M(k(\nu))$, sodass $\theta_\pi(\alpha) = \psi_\pi(\alpha) + \zeta\partial_\nu(\alpha)$ gilt. Die Einschränkungen von ∂_ν und ψ_π auf den n-ten Grad $K_n^M(k)$ erfüllen offensichtlich die Eigenschaften (I.1.1) und (I.1.2). Man beachte hierbei, dass die erste Eigenschaft für beliebige Primelemente erfüllt sein muss und nicht nur für das fest gewählte Element π. Damit ist Lemma 1.9 bewiesen. □

1.11. Bemerkung. Für $n = 1$ stimmt ∂ quasi mit ν überein und für $n = 2$ existiert ein enger Bezug zum klassischen zahmen Symbol

$$k^\times \times k^\times \longrightarrow k(\nu), \quad (a,b) \longmapsto (-1)^{\nu(a)\nu(b)}\bar{a}^{\nu(b)}\bar{b}^{-\nu(a)},$$

denn es gilt

$$\begin{aligned}\theta_\pi\Big(\{u_1\pi^{i_1}, u_2\pi^{i_2}\}\Big) &= \{\bar{u}_1,\bar{u}_2\} + \zeta\big(i_1\{\bar{u}_2\} - i_2\{\bar{u}_1\}\big) + \zeta^2 i_1 i_2\\ &= \{\bar{u}_1,\bar{u}_2\} + \zeta\{(-1)^{i_1 i_2}\bar{u}_2^{i_1}\bar{u}_1^{-i_2}\}.\end{aligned}$$

1.E. Satz von Milnor-Tate. Im Folgenden sei k wieder ein beliebiger Körper. Wir wollen Satz 1.9 nun zur Untersuchung der K-Gruppe des diskret bewerteten Körpers der rationalen Funktionen $k(T)$ anwenden. Aufgrund der Identität $\{\frac{f}{g}\} = \{f\} - \{g\}$ in $K_1^M(k(T))$ ist $K_n^M(k(T))$ erzeugt von Elementen $\{f_1,\dots,f_n\}$ mit $f_i \in k[T]$. Sei $\mathcal{P}$ die Menge der nichttrivialen normierten, irreduziblen Polynome $\pi \in F[T]$. Das Hauptideal (π) jedes dieser Polynome definiert eine (π)-adische diskrete Bewertung ν_π mit Restklassenkörper $F[T]/(\pi)$. Desweiteren haben die Gradbewertung ν_∞ gegeben durch $\nu_\infty(\frac{f}{g}) = \deg g - \deg f$. Das maximale Ideal bezüglich dieser Bewertung ist erzeugt von $\frac{1}{T} \in k(T)$, und der Restklassenkörper ist kanonisch isomorph zu k. Wir schreiben ∂_π für die Abbildung ∂_{ν_π} aus Satz 1.9, wobei $\pi \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}$.

1.12. Satz (Milnor-Tate)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Die Homomorphismen ∂_π induzieren eine exakte, spaltende Sequenz

$$0 \longrightarrow K_n^M(k) \xrightarrow{\mathrm{res}_{k(T)/k}} K_n^M(k(T)) \xrightarrow{\partial = (\partial_\pi)} \bigoplus_{\pi\in\mathcal{P}} K_{n-1}^M(k[T]/(\pi)) \longrightarrow 0.$$

Für einen ausführlichen Beweis sei dem Leser das Buch von Ina Kersten [**Ker90**, Thm. 20.5] bzw. von Philippe Gille und Tamás Szamuely [**GS06**, Abschnitt 7.2] empfohlen. Ebenfalls von Interesse sind die klassischen Quellen von J. Milnor [**Mil70**, Thm. 2.3] sowie von H. Bass und J. Tate [**BT73**, Thm. 5.1].

Überblick über den Beweis. Die Exaktheit bei $K_n^M(k)$ und die Spaltungseigenschaft folgen aus der Existenz der Abbildung ψ_π aus Satz 1.9. Für $\pi = T$ sind $k[T]/(T)$ und k kanonisch isomorph über den Einsetzhomomorphismus $f \mapsto f(0)$. Man sieht damit leicht, dass

ψ_T linksinvers ist zur Restriktion $\operatorname{res}_{k(T)/k}$. Desweiteren folgt aus der definierenden Eigenschaft von ∂_π, dass die Komposition von ∂ nach $\operatorname{res}_{k(T)/k}$ die Nullabbildung ist. Für die ausstehenden Behauptungen zeigt man, dass ∂ einen Isomorphismus

$$K_n^M\big(k(T)\big)/K_n^M(k) \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{\pi\in\mathcal{P}} K_{n-1}^M\big(k[T]/(\pi)\big) \tag{I.1.3}$$

induziert. Man verfährt hierbei mit einer Filtrierung von $K_n^M\big(k(T)\big)$. Sei $L_d \subset K_n^M\big(k(T)\big)$ die Untergruppe erzeugt von Elementen der Form $\{f_1,\dots,f_n\}$ mit Polynomen $f_i \in k[T]$ vom Grad kleiner oder gleich d. Dann gilt

$$L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \quad \text{sowie} \quad \bigcup_{d\geq 0} L_d = K_n^M\big(k(T)\big).$$

Um die Isomorphie in (I.1.3) zu zeigen, weist man zunächst nach, dass ∂ einen Isomorphismus

$$L_d/L_{d-1} \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{\pi\in\mathcal{P}_d} K_{n-1}^M\big(k[T]/(\pi)\big) \tag{I.1.4}$$

induziert, wobei $\mathcal{P}_d$ die Menge der irreduziblen normierten Polynome vom Grad d bezeichnet. Induktion nach d liefert dann einen Isomorphismus

$$L_d/L_0 \xrightarrow{\simeq} \bigoplus_{i=1}^{d} \bigoplus_{\pi\in\mathcal{P}_i} K_{n-1}^M\big(k[T]/(\pi)\big)$$

und Übergang zum direkten Limes für $d\to\infty$ zeigt uns zusammen mit $L_0 \cong K_n^M(k)$ schließlich die Isomorphie (I.1.3). Es bleibt also (I.1.4) zu zeigen. Hierfür definiert man zu jedem $\pi\in\mathcal{P}$ einen Schnitt zu $\partial_\pi\colon L_d/L_{d-1} \to K_{n-1}^M\big(k[T]/(\pi)\big)$ durch

$$\begin{aligned} h_\pi\colon K_{n-1}^M\big(F[T]/(\pi)\big) &\longrightarrow L_d/L_{d-1} \\ \{\bar g_2,\dots,\bar g_n\} &\longmapsto \{\pi, g_2,\dots,g_n\}\,. \end{aligned}$$

Die Überprüfung der Wohldefiniertheit bedarf einiger technischer Überlegungen. Desweiteren haben die Abbildungen h_π die Eigenschaft, dass $\partial_{\pi'}\circ h_\pi$ die Nullabbildung ist für verschiedene Primelemente $\pi',\pi\in\mathcal{P}$. Dadurch ist die Komposition

$$K_{n-1}^M\big(F[T]/(\pi)\big) \xrightarrow{h_\pi} L_d/L_{d-1} \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{\pi'\in\mathcal{P}_d} K_{n-1}^M\big(F[T]/(\pi')\big)$$

injektiv und ∂ ist surjektiv. Da L_d/L_{d-1} die Vereinigung der Bilder von h_π über alle $\pi\in\mathcal{P}_d$ ist, haben wir auch die Sujektivität von ∂. □

Man kann im Beweis von Satz 1.12 eine weitere Eigenschaft der Untergruppen L_d zeigen und anwenden, die für uns später von eigenem Interesse ist (vgl. [**Ker90**, S. 20 unten], [**GS06**, Prop. 7.2.8 und Lemma 7.2.9]).

1.13. Lemma. Die Untergruppe L_d von $K_n^M\big(k(T)\big)$ ist erzeugt von Symbolen der Form $\{a_1,\dots,a_{n-r},\pi_1,\dots,\pi_r\}$ mit Körperelementen $a_i\in k^\times$ und Polynomen $\pi_i\in\mathcal{P}$ mit der Eigenschaft $1\leq \deg(\pi_1) < \ldots < \deg(\pi_r) \leq d$.

1.14. Korollar. Sei $k(c)$ eine einfache Körpererweiterung von k vom Grad d. Dann ist $K^M_{n-1}(k(c))$ erzeugt von Symbolen der Form $\{a_1, \ldots, a_{n-r}, \pi_1(c), \ldots, \pi_{r-1}(c)\}$ mit einem $r \in \mathbb{N}$ und Polynomen $\pi_i \in \mathcal{P}$, welche die Eigenschaft $1 \leq \deg(\pi_1) < \ldots < \deg(\pi_{r-1}) \leq d-1$ erfüllen.

Beweis. Sei $\pi \in \mathcal{P}_d$ ein Polynom, sodass $k(c)$ gegeben ist durch $k[T]/(\pi)$ und c die Klasse von T in $k[T]/(\pi)$ ist. Der von ∂_π induzierte Homomorphismus $L_d/L_{d-1} \to K^M_{n-1}(k[T]/(\pi))$ aus dem Beweis von Satz 1.12 ist surjektiv, somit ist $K^M_{n-1}(k[T]/(\pi))$ erzeugt von den Bildern $\partial_\pi(\{a_1, \ldots, a_{n-r}, \pi_1, \ldots, \pi_r\})$ der Erzeuger von L_d. Ist eines der Elemente π_i identisch mit π, also ohne Einschränkung $\pi_r = \pi$, so gilt aufgrund der definierenden Eigenschaft von ∂_π

$$\partial_\pi(\{a_1, \ldots, a_{n-r}, \pi_1, \ldots, \pi_r\}) = \{a_1, \ldots, a_{n-r}, \pi_1(c), \ldots, \pi_{r-1}(c)\}$$

in $K^M_{n-1}(k(c)) = K^M_{n-1}(k[T]/(\pi))$. Andernfalls bildet ∂_π den Erzeuger auf null ab. □

1.15. Korollar. Sei $k(c)$ eine einfache Körpererweiterung von k vom Grad d. Dann ist $K^M_*(k(c))$ als $K^M_*(k)$-Modul erzeugt von Symbolen der Form $\{\pi_1(c), \ldots, \pi_r(c)\}$ mit einem $r \in \mathbb{N}$ und Polynomen $\pi_i \in \mathcal{P}$, welche die Eigenschaft $1 \leq \deg(\pi_1) < \ldots < \deg(\pi_r) \leq d-1$ erfüllen. □

1.F. Normabbildung. Dieser Unterabschnitt erläutert die Konstruktion und die wichtigsten Eigenschaften einer Normabbildung für endliche Körpererweiterungen in der Milnor'schen K-Theorie.

1.16. Theorem. Für jede endliche Erweiterung E/k und jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{cor}_{E/k} \colon K^M_n(E) \longrightarrow K^M_n(k)$$

mit den Eigenschaften

1) Für $n = 0$ ist $\mathrm{cor}_{E/k} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die Multiplikation mit $[E : k]$.
2) Für $n = 1$ ist $\mathrm{cor}_{E/k} \colon K^M_1(E) \to K^M_1(k)$ gegeben durch $\{b\} \mapsto \{N_{E/k}(b)\}$.
3) *Projektionsformel*: Für $\alpha \in K^M_n(k)$ und $\beta \in K^M_m(E)$ gilt

$$\mathrm{cor}_{E/k}(\alpha_E \cdot \beta) = \alpha \cdot \mathrm{cor}_{E/k}(\beta).$$

   Insbesondere gilt $\mathrm{cor}_{E/k}(\alpha_E) = [E : k]\alpha$, d.h. die Komposition $\mathrm{cor}_{E/k} \circ \mathrm{res}_{E/k}$ ist Multiplikation mit $[E : k]$.
4) *Funktorialität*: Es gilt $\mathrm{cor}_{k/k} = \mathrm{Id}_{K^M_n(k)}$ und für einen Turm $k \subset E \subset L$ von endlichen Körpererweiterungen gilt

$$\mathrm{cor}_{L/k} = \mathrm{cor}_{E/k} \circ \mathrm{cor}_{L/E}.$$

5) *Reziprozität*: Für $\beta \in K^M_n(k(T))$ gilt

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}} \mathrm{cor}_{k(\nu_\pi)/k}(\partial_\pi(\beta)) = 0.$$

Man nennt die Abbildung $\mathrm{cor}_{E/k}$ **Normabbildung**, **Transfer** oder **Korestriktion** der Milnor'schen K-Theorie. Tatsächlich ist $\mathrm{cor}_{E/k}$ bereits durch die Eigenschaft $\mathrm{cor}_{k/k} = \mathrm{Id}_{K_n^M(k)}$ zusammen mit Reziprozität eindeutig festgelegt. Die Konstruktion von $\mathrm{cor}_{E/k}$ ist technisch sehr aufwendig und würde hier in voller Ausführlichkeit den Rahmen sprengen. Wir erläutern daher nur die wesentlichen Idee. Der Startpunkt der Konstruktion ist die exakte Sequenz von Milnor-Tate aus Satz 1.12

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_{n+1}^M(k) \arrow[r] & K_{n+1}^M\big(k(T)\big) \arrow[r, "\partial"] & \bigoplus_{\pi\in\mathcal{P}} K_n^M\big(k[T]/(\pi)\big) \arrow[l, bend right, dotted, "\exists\rho"'] \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Aufgrund der Spaltungseigenschaft existiert ein zu ∂ rechtsinverser Homomorphismus ρ. Die Verknüpfung ρ_π von ρ nach der kanonischen Einbettung ι_π der Gruppe $K_n^M\big(k[T]/(\pi)\big)$ in $\bigoplus_{\pi\in\mathcal{P}} K_n^M\big(k[T]/(\pi)\big)$ hat die Eigenschaft

$$\partial_{\pi'} \circ \rho_\pi = \begin{cases} \mathrm{Id}_{K_n^M(k(\nu_\pi))} & : \ \pi' = \pi \\ 0 & : \ \pi' \neq \pi. \end{cases} \tag{I.1.5}$$

Für $\pi \in \mathcal{P}$ sei $\mathrm{cor}_{\pi/k} = \mathrm{cor}_{k(\nu_\pi)/k}$ die Komposition $-\partial_\infty \circ \rho_\pi \colon K_n^M\big(k(\nu_\pi)\big) \to K_n^M(k)$. Wir zeigen die oben formulierte Reziprozitätsformel für diese Abbildungen.

1.17. Lemma. Es gilt $\displaystyle\sum_{\pi\in\mathcal{P}\cup\{\infty\}} \mathrm{cor}_{\pi/k} \circ \partial_\pi = 0.$

Beweis. Für jedes Element $\beta \in K_n^M\big(k(T)\big)$ gilt aufgrund der Eigenschaft (I.1.5) für alle $\pi' \in \mathcal{P}$

$$\partial_{\pi'}\Big(\beta - \sum_{\pi\in\mathcal{P}} \rho_\pi\big(\partial_\pi(\beta)\big)\Big) = \partial_{\pi'}(\beta) - \partial_{\pi'}(\beta) = 0.$$

Somit liegt das Element $\beta - \sum_{\pi\in\mathcal{P}} \rho_\pi k\big(\partial_\pi(\beta)\big)$ im Kern von ∂ und kommt daher wegen der exakten Sequenz von Milnor-Tate von einem Element $\alpha \in K_n^M(k)$. Da Elemente von $k \subset k(T)$ Einheiten bezüglich der Gradbewertung ν_∞ sind, bildet ∂_∞ das Element $\alpha_{k(T)}$ auf null ab. Folglich

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\infty\Big(\beta - \sum_{\pi\in\mathcal{P}} \rho_\pi\big(\partial_\pi(\beta)\big)\Big) \\ &= \partial_\infty(\beta) + \sum_{\pi\in\mathcal{P}} \big(-\partial_\infty \circ \rho_\pi\big)\big(\partial_\pi(\beta)\big) \\ &= \mathrm{cor}_{\infty/k}\big(\partial_\infty(\beta)\big) + \sum_{\pi\in\mathcal{P}} \mathrm{cor}_{\pi/k}\big(\partial_\pi(\beta)\big) \end{aligned}$$

□

Für eine einfache Körpererweiterung $k(c)$ können wir nun $\mathrm{cor}_{c/k} = \mathrm{cor}_{\pi_c/k}$ setzen, wobei $\pi_c \in \mathcal{P}$ das Minimalpolynom zu c ist. Sei $E = k(c_1, \ldots, c_m)$ eine beliebige endliche Erweiterung von k. Die Normabbildung kann dann definiert werden als

$$\mathrm{cor}_{E/k} = \mathrm{cor}_{c_1/k} \circ \mathrm{cor}_{c_2/k(c_1)} \circ \cdots \circ \mathrm{cor}_{c_{m-1}/k(c_1,\ldots,c_{m-2})} \circ \mathrm{cor}_{c_m/k(c_1,\ldots,c_{m-1})}.$$

Dass diese Definitionen nicht von der Wahl der erzeugenden Elemente, sondern nur von der Körpererweiterung abhängen, ist alles andere als offensichtlich. Obwohl diese Konstruktion von H. Bass und J. Tate [**BT73**] stammt, gelang der Nachweis der Wohldefiniertheit erst K. Kato in [**Kat80**].

2. Galoiskohomologie

Dieser Abschnitt ist allgemein gehalten und dient im Wesentlichen als kurze Einführung zum Thema und als Überblick über für die Bloch-Kato-Vermutung relevante Konstruktionen. Einige oft benutzte Resultate wie die lange exakte Kohomologiesequenz werden elementar bewiesen.

2.A. Proendliche Gruppen und diskrete *G*-Moduln. Eine **proendliche Gruppe** ist eine topologische Gruppe G, welche projektiver Limes endlicher, mit diskreter Topologie versehener Gruppen ist. Abgeschlossene Untergruppen von proendlichen Gruppen sind ebenfalls proendlich, ebenso ist die Faktorgruppe G/N proendlich für jeden Normalteiler N einer proendlichen Gruppe G. Proendliche Gruppen sind ein Spezialfall des Konzepts der Pro-$\mathcal{C}$-Gruppen, wo $\mathcal{C}$ eine unter Isomorphie abgeschlosse Klasse von endlichen, diskreten Gruppen ist. Eine Pro-$\mathcal{C}$-Gruppe G ist dann ein projektiver Limes von Gruppen G_i aus $\mathcal{C}$, wobei wir G als topologische Gruppe mit der durch $\prod G_i$ induzierten Topologie auffassen. Für eine ausführliche Einführung zu diesem Thema, siehe z.B. das Buch von Ribes und Zalesskii [**RZ10**].

Da jede endliche Gruppe versehen mit diskreter Topologie trivialerweise proendlich ist, stellt das Konzept der proendlichen Gruppen eine natürliche Verallgemeinerung von endlichen Gruppen dar, mit deren Hilfe wir die elementare Definition von Gruppenkohomologie endlicher Gruppen auf proendliche Gruppen ausdehnen. Konkret kann man so die Galoiskohomologie für unendliche Galoiserweiterungen definieren.

2.1. Beispiel. Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/k)$ einer Galoiserweiterung (versehen mit der Krull-Topologie) ist projektiver Limes aller Galoisgruppen $\mathrm{Gal}(F/k)$ endlicher Galoiserweiterungen mit $k \subset F \subset L$.

Denn die Menge aller endlichen Galoiserweiterungen ist zusammen mit der Inklusion eine gerichtete Menge. Für zwei solche Erweiterungen F_1/k, F_2/k sind F_1, F_2 Teilkörper vom Kompositum $F_1 \cdot F_2$, welches wiederum eine endliche Galoiserweiterung von k darstellt. Zusammen mit den Restriktionsabbildungen $\rho_{F_1}^{F_2}\colon \mathrm{Gal}(F_2/k) \to \mathrm{Gal}(F_1/k)$ für $k \subset F_1 \subset F_2 \subset L$ bilden die endlichen Galoiserweiterungen also ein projektives System. Weiter existieren Restriktionen $\rho_F^L\colon \mathrm{Gal}(L/k) \to \mathrm{Gal}(F/k)$, und die universelle Eigenschaft des projektiven Limes sagt nun $\mathrm{Gal}(L/k) = \varprojlim_{F/k} \mathrm{Gal}(F/k)$.

2.2. Definition. Sei G eine beliebige Gruppe. Ein ***G*-Linksmodul** oder einfach ***G*-Modul** ist eine abelsche (multiplikative) Gruppe A mit einer G-Operation $G \times A \to A$, $(g, a) \mapsto ga$, die das Distributivgesetz $g(a \cdot b) = ga \cdot gb$ für $g \in G$, $a, b \in A$ erfüllt. G-Moduln sind Moduln im üblichen Sinne über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$. Ein ***G*-Modulhomomorphismus** ist ein

Gruppenhomomorphismus $f\colon A \to B$ zwischen G-Moduln, für den $f(ga) = gf(a)$ für alle $g \in G$, $a \in A$ erfüllt ist. Sei nun G eine proendliche Gruppe. Ein **diskreter G-Modul** ist ein G-Modul mit diskreter Gruppe A und stetiger Multiplikation $G \times A \to A$. Die Klasse der G-Moduln zusammen mit G-Modulhomomorphismen ist eine Kategorie G-Mod, in der diskrete G-Moduln eine volle Unterkategorie G-Mod$^\delta$ darstellen.

Im Falle von endlichen Gruppen G mit diskreter Topologie fallen die Begriffe „G-Modul" und „diskreter G-Modul" zusammen.

Bemerkung (zur Notation)**.** Im Hinblick auf die spätere Anwendung schreiben wir die Gruppe A entgegen formalen Konventionen meist multiplikativ und benutzen den Multiplikationspunkt „$\cdot$" für die Gruppenverknüpfung in A, während die Gruppenverknüpfung von G sowie auch die Gruppenoperation von G auf A ohne ein Verknüpfungszeichen geschrieben werden.

2.3. Beispiel (Trivialer G-Modul)**.** Sei G eine beliebige Gruppe und A eine beliebige abelsche Gruppe. Dann ist A mit der trivialen G-Operation $(g, a) \mapsto a$ ein G-Modul. Ist G proendlich und betrachten wir A als diskrete abelsche Gruppe, so ist A ein diskreter G-Modul. Wannimmer wir die Restklassengruppe $\mathbb{Z}/m$ anstelle von A verwenden, betrachten wir diese als trivialen G-Modul.

2.4. Beispiel. Sei $\mathrm{Gal}(L/k)$ die Galoisgruppe einer Körpererweiterung L/k. Dann ist $L^\times$ ein diskreter $\mathrm{Gal}(L/k)$-Modul mit Multiplikation

$$(\sigma, a) \mapsto \sigma a \coloneqq \sigma(a)$$

2.B. Gruppenkohomologie. Wir geben zunächst eine elementare Konstruktion der Gruppenkohomologie über inhomogene Koketten. Anschließend erläutern wir kurz die Motivation zur Gruppenkohomologie aus Sicht der homologischen Algebra und die Darstellung der Gruppenkohomologie als Ext-Funktor. Es sei im Folgenden G stets eine proendliche Gruppe und A ein diskreter G-Modul. Wir notieren mit $G^{\times n}$ das n-fache kartesische Produkt $G \times \ldots \times G$ versehen mit Produkttopologie.

2.5. Definition (Inhomogene Koketten)**.** Es sei

$$\begin{aligned} C^0(G, A) &\coloneqq A, \\ C^n(G, A) &\coloneqq \{f \mid f\colon G^{\times n} \to A \text{ stetig}\} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Durch $(f \cdot g)(x) \coloneqq f(x) \cdot g(x)$ erhält $C^n(G, A)$ die Struktur einer abelschen Gruppe. Weiter seien für $n \in \mathbb{N}$ Gruppenhomomorphismen $d^n\colon C^n(G, A) \to C^{n+1}(G, A)$ auf folgende Weise definiert: $d^n(f)$ sei der Homomorphismus $G^{\times(n+1)} \to A$ gegeben durch

$$d^n(f)(\sigma_1, ..., \sigma_{n+1}) \coloneqq \sigma_1 f(\sigma_2, ..., \sigma_{n+1}) \cdot \prod_{i=1}^{n} f(\sigma_1, ..., \underbrace{\sigma_i\sigma_{i+1}}_{i\text{-te Stelle}}, ..., \sigma_{n+1})^{(-1)^i} \cdot f(\sigma_1, ..., \sigma_n)^{(-1)^{n+1}}.$$

Desweiteren sei $d^0\colon A \to C^1(G, A)$ definiert durch $d^0(x)(\sigma) \coloneqq \sigma x \cdot x^{-1}$.

Eine einfache, jedoch unbequeme Rechnung zeigt, dass durch $\big(C^\bullet(G,A), d^\bullet\big)$:

2.6. Proposition. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $d^{n+1} \circ d^n = 1$.

2.7. Definition. Die Gruppen der ***n*-Kozykel** und ***n*-Koränder** sind gegeben durch

$$\begin{aligned} Z^n(G,A) &:= \ker d^n \subset C^n(G,A) \quad \text{und} \\ B^n(G,A) &:= \operatorname{im} d^{n-1} \subset C^n(G,A). \end{aligned}$$

Vorangegangene Proposition besagt $B^n(G,A) \subset Z^n(G,A)$. Die ***n*-te Kohomologiegruppe** ist die Quotientengruppe

$$H^n(G,A) := \frac{Z^n(G,A)}{B^n(G,A)}.$$

2.8. Beispiel. Im Falle $n = 0$ haben wir $H^0(G,A) \cong Z^0(G,A) = A^G$, wobei A^G die Menge der G-invarianten Elemente $\{a \in G \mid ga = a \text{ für alle } g \in G\}$ ist. Für $n = 1$ ist

$$\begin{aligned} Z^1(G,A) &= \Big\{ f \in C^1(G,A) \mid f(\sigma\tau) = \sigma f(\tau) \cdot f(\sigma) \Big\} \\ B^1(G,A) &= \Big\{ f \in C^1(G,A) \mid \exists a \in A \colon f(\sigma) = \sigma x \cdot x^{-1} \Big\}. \end{aligned}$$

Für triviale G-Moduln A ergibt sich insbesondere $H^0(G,A) \cong A$, $H^1(G,A) \cong \operatorname{Hom}_{\mathrm{cts}}(G,A)$. (Hier sei $\operatorname{Hom}_{\mathrm{cts}}(G,A)$ die Gruppe der stetigen Gruppenhomomorphismen von G nach A.)

2.9. Bemerkung (H^n als rechtsderivierte Funktoren)**.** Die Idee hinter der Defintion von Gruppenkohomologie ist es, eine Art Erweiterung des Funktors $A \mapsto A^G$ in „höheren Dimensionen“ zu konstruieren. Dieser Funktor ist linksexakt, d.h. für eine kurze exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ von $\mathbb{Z}[G]$-Moduln ist $0 \to A^G \to B^G \to C^G$ exakt. Wir können $H^n(G,-)$ als den rechtsderivierten Funktor $\mathbb{R}^n\big((-)^G\big)$ definieren. Per Konstruktion solcher Funktoren gilt dann $H^0(G,A) = A^G$ und es existiert eine lange exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A^G \longrightarrow B^G \longrightarrow C^G \longrightarrow H^1(G,A) \longrightarrow H^1(G,B) \longrightarrow \dots$$

Wenn $H^1(G,A) = 0$ gilt, so ist der Funktor $(-)^G$ exakt. Daher kann man sich die Kohomologiefunktoren $H^n(G,-)$ als ein Maß für die Abweichung von der Exaktheit von $(-)^G$ vorstellen. Die Definition über rechtsderivierte Funktoren ist topologiefrei – G kann eine beliebige Gruppe und A ein beliebiger (nicht notwendigerweise diskreter) G-Modul sein.

2.10. Bemerkung (H^n und Ext^n)**.** Im Hinblick auf die vorangegangene Bemerkung besteht eine weitere Möglichkeit zur Charakterisierung von Gruppenkohomologie in der Beschreibung durch sogenannte Ext-Funktoren. Für eine beliebige abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ und $n \geq 0$ ist der Funktor $\operatorname{Ext}^n_{\mathcal{A}}(A,-)$ definiert als der n-te rechtsderivierte Funktor des linksexakten Hom-Funktors $B \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A,B)$. Für G-Moduln A gilt nun $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A) = \operatorname{Hom}_G(\mathbb{Z},A) \cong A^G$ via $\alpha \mapsto \alpha(1)$, wobei $\mathbb{Z}$ als trivialer G-Modul betrachtet wird. Folglich haben wir

$$H^n(G,-) \cong \operatorname{Ext}^n_{Z[G]\text{-Mod}}(\mathbb{Z},-).$$

2.C. Funktorielle Eigenschaften. Im Folgenden seien G, G' zwei proendliche Gruppen, A ein diskreter G-Modul, A' ein diskreter G'-Modul. Zwei Gruppenhomomorphismen $\gamma\colon G' \to G$, $\alpha\colon A \to A'$ heißen **kompatibel**, falls $\alpha(\gamma(g')a) = g'\alpha(a)$ für alle $g' \in G'$, $a \in A$ gilt. Dies bedeutet gerade, dass α ein G'-Modulhomomorphismus bezüglich der durch $g'a \coloneqq \gamma(g')a$ definierten G'-Modulstruktur auf A ist. Solche kompatiblen Homomorphismen induzieren eine Abbildung

$$C^n(G,A) \longrightarrow C^n(G',A'), \quad \phi \longmapsto \alpha \circ \phi \circ \gamma^{\times n}. \tag{I.2.1}$$

Diese Abbildung kommutiert in natürlicher Weise mit den Differentialen, d.h. folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d^{n-1}"] & C^n(G,A) \arrow[r, "d^n"] \arrow[d] & C^{n+1}(G,A) \arrow[r, "d^{n+1}"] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "d^{n-1}"] & C^n(G',A') \arrow[r, "d^n"] & C^{n+1}(G',A') \arrow[r, "d^{n+1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Somit werden Koränder auf Koränder und Kozykel auf Kozykel abgebildet, und (I.2.1) induziert für alle $n \geq 0$ einen Gruppenhomomorphismus

$$H^n(G,A) \longrightarrow H^n(G',A'). \tag{I.2.2}$$

Die Klasse der Paare (G,A) bildet zusammen mit Paaren kompatibler Homomorphismen (γ,α) als Morphismen $(G,A) \to (G',A')$ eine Kategorie. $H^n(-,-)$ ist dann ein (kovarianter) Funktor von dieser Kategorie in die Kategorie der abelschen Gruppen. Wir notieren die Abbildung in (I.2.2) daher auch mit $H^n(\gamma,\alpha)$ und die Abbildung aus (I.2.1) analog mit $C^n(\gamma,\alpha)$. Im Spezialfall $G = G'$ induziert jeder G-Modulhomomorphismus $\alpha\colon A \to A'$ einen Gruppenhomomorphismus $H^n(G,\alpha)\colon H^n(G,A) \to H^n(G,A')$, den wir meist kurz α^* oder α^*_n notieren. Insbesondere ist $H^n(G,-)$ ein (kovarianter) Funktor $G\text{-Mod}^\delta \to \mathbf{Ab}$.

2.11. Beispiel (Restriktion)**.** Sei $H < G$ eine Untergruppe. Wenden wir die eben erwähnte Kontruktion an für $\gamma = \iota\colon H \hookrightarrow G$ und $A' = A$ aufgefasst als G-Modul (und somit auch H-Modul), so erhalten wir die sogenannte **Restriktionsabbildung**

$$\operatorname{res}^G_H\colon H^n(G,A) \longrightarrow H^n(H,A), \quad [\phi] = \alpha \mapsto \alpha_H \coloneqq [\phi \circ \iota^{\times n}]. \tag{I.2.3}$$

für alle natürlichen Zahlen n.

Die nachfolgende Proposition erklärt das Verhalten der Kohomologiegruppen unter Limites.

2.12. Proposition. Sei (G_i) ein projektives System proendlicher Gruppen und sei (A_i) ein induktives System bestehend aus diskreten G_i-Moduln A_i, sodass die Homomorphismen $\gamma_{ij}\colon G_j \to G_i$ mit den Homomorphismen und $\alpha_{ij}\colon A_i \to A_j$ kompatibel sind. Weiter seien $G \coloneqq \varprojlim G_i$ und $A \coloneqq \varinjlim A_i$. Dann gilt für alle $n \geq 0$

$$H^n(G,A) \cong \varinjlim H^n(G_i,A_i).$$

Beweisskizze. Die Kokettengruppen $C^n(G_i, A_i)$ bilden ein induktives System mit Homomorphismen $c_{ij} = C^n(\gamma_{ij}, \alpha_{ij})$

$$\begin{aligned} C^n(G_i, A_i) &\longrightarrow C^n(G_j, A_j) \\ \phi &\longmapsto \alpha_{ij} \circ \phi \circ \gamma_{ij}^{\times n}. \end{aligned}$$

Weiter sei $c_i \colon C^n(G_i, A_i) \to C^n(G, A)$ die Abbildung gegeben durch

$$c_i(\phi)((g_1^{(j)})_j, \ldots, (g_n^{(j)})_j) = [\phi(g_1^{(i)}, \ldots, g_n^{(i)})]_A,$$

wobei $(g^{(j)})_j$ ein Element von $G = \varprojlim G_j \subset \prod_j G_j$ ist und $[a_i]_A$ die Klasse von $a_i \in A_i$ in $A = \varinjlim A_j$ bezeichne. Eine Rechnung zeigt, dass der Homomorphismus

$$\varinjlim C^n(G_j, A_j) \longrightarrow C^n(G, A)$$

gegeben durch $[\phi_j]_{\varinjlim C^n(G_j, A_j)} \mapsto c_j(\phi_j)$ wohldefiniert und bereits ein Isomorphismus ist, woraus die Behauptung folgt. □

Angewendet auf $G = \varprojlim G/N$ und $A = \varinjlim A^N$, wobei $N \triangleleft G$ alle Normalteiler von G durchläuft, ergibt sich:

2.13. Korollar. $H^n(G, A) = \varinjlim H^n(G/N, A^N)$ für alle $n \geq 0$. □

2.D. Induzierte Moduln, Restriktion & Korestriktion. Eine weitere Möglichkeit der Verwendung von Homomorphismen der Form (I.2.2) besteht bei der Definition der induzierten Moduln. Diese liefern uns eine Abbildung $H^n(G, M_H^G(A)) \to H^n(H, A)$, mit deren Hilfe wir die Restriktion (I.2.3) rekonstruieren können. Wir erhalten aber noch mehr, denn dieser Homomorphismus ist bijektiv und seine Umkehrabbildung ermöglicht uns die Definition einer Korestriktion $H^n(H, A) \to H^n(G, A)$.

2.14. Definition & Bemerkung (Induzierte Moduln)**.** Sei $H < G$ eine Untergruppe, A ein diskreter G-Modul und $A^* = M_H^G(A)$ die Menge aller stetigen, H-linearen Abbildungen $a^* \colon G \to A$. Auf $M_H^G(A)$ ist eine G-Modulstruktur gegeben durch $(ga^*)(x) := a^*(xg)$ für alle $g, x \in G$. Wir nennen $M_H^G(A)$ den **bezüglich *H* induzierten Modul** von A und $M^G(A) := M_{\{1\}}^G(A)$ einfach nur den **induzierten Modul** von A.

Es ist durch $a^* \mapsto a^*(1)$ ein Monomorphismus $\sigma \colon M_H^G(A) \to A$ gegeben, welcher kompatibel ist mit der Inklusionsabbildung $\iota \colon H \hookrightarrow G$. Somit haben wir eine Abbildung

$$\sigma^* = H^n(\iota, \sigma) \colon H^n(G, M_H^G(A)) \longrightarrow H^n(H, A).$$

Das nachfolgende Resultat ist auch als Shapiros Lemma bekannt.

2.15. Satz (Shapiro & Faddeev)**.** Durch die Abbildung σ^* ist ein Isomorphismus

$$H^n(G, M_H^G(A)) \cong H^n(H, A)$$

gegeben.

Beweis. Siehe z.B. C. Weibel [**Wei94**, Satz 6.3.2].

Wir finden die Restriktion (I.2.3) nun über den Isomorphismus aus Satz 2.15 wieder, indem wir den G-Modulhomomorphismus $\lambda\colon A \to M_H^G(A)$ gegeben durch $\lambda(a)(g) = ga$ betrachten. Die Restriktion ist dann gerade die Komposition von σ^* nach $\lambda^* = H^n(\iota, \lambda)$:

$$\operatorname{res}_H^G\colon H^n(G, A) \longrightarrow H^n(G, M_H^G(A)) \xrightarrow{\simeq} H^n(H, A). \tag{I.2.4}$$

Für die Definition der für uns wichtigen Korestriktion wollen wir ebenfalls den Isomorphismus aus Satz 2.15 heranziehen. Dies liefert uns einen besseren Zugang als die stattdessen oft benutzte Konstruktion über einen Limesprozess. Für den Rest dieses Unterabschnitts sei $H < G$ eine abgeschlossene Untergruppe mit endlichem Index $(G : H)$ und A ein diskreter G-Modul.

2.16. Lemma & Definition (Korestriktion)**.** Sei $\pi\colon M_H^G(A) \to A$ der durch

$$a^* \mapsto \sum_{x \in G/H} x a^*(x^{-1})$$

wohldefinierte G-Modulhomomorphismus. Die Summe ist hierbei endlich, da $(G : H) < \infty$ vorausgesetzt war. Hierbei sei G/H aufgefasst als ein beliebiges System von Repräsentanten der Linksnebenklassen von H. Wir definieren die Korestriktion $\operatorname{cor}_H^G\colon H^n(H, A) \to H^n(G, A)$ als die Komposition von $\pi^* = H^n(\iota, \pi)$ nach dem Isomorphismus $(\sigma^*)^{-1}$:

$$\operatorname{cor}_H^G\colon H^n(H, A) \xrightarrow{\simeq} H^n(G, M_H^G(A)) \xrightarrow{\pi^*} H^n(G, A). \tag{I.2.5}$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass π wohldefiniert und ein G-Modulhomomorphismus ist. Wählen wir mit $\tilde{x}$ einen anderen Repräsentanten der Nebenklasse von xH, so folgt aus der H-Linearität von a^* sofort

$$\tilde{x} a^*(\tilde{x}^{-1}) = xha^*(h^{-1}x^{-1}) = xa^*(x^{-1}).$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \pi(ga^*) &= \sum_{x \in G/H} x(ga^*)(x^{-1}) \\ &= \sum_{x \in G/H} xa^*(x^{-1}g) \\ &= \sum_{x \in G/H} gxa^*(x^{-1}) \qquad \text{(substituiere } x \mapsto gx) \\ &= g\pi(a^*). \end{aligned}$$

□

2.17. Beispiel. Im Fall $n = 0$ ist $\sigma^* = H^0(\iota, \sigma)$ eine Abbildung $M_H^G(A)^G \to A^H$. Der Modul $M_H^G(A)^G$ besteht gerade aus allen H-linearen konstanten Funktionen $G \to A$, da für dessen Elemente a^* gilt

$$a^*(g) = a^*(1 \cdot g) = (ga^*)(1) = a^*(1) \quad \text{für alle } g \in G.$$

Die Umkehrabbildung $(\sigma^*)^{-1}\colon A^H \to M_H^G(A)^G$ von σ^* bildet a auf die konstante Abbildung $c_a(g) \equiv a$ ab. Die Komposition (I.2.5) ist daher gegeben durch $a \mapsto c_a \mapsto \sum_{x\in G/H} xa$, d.h. die Korestriktion ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\operatorname{cor}_H^G\colon A^H &\longrightarrow A^G\\ a &\longmapsto \sum_{x\in G/H} xa\end{aligned}$$

Ist A zusätzlich trivialer G-Modul, so gilt $\operatorname{cor}_H^G(a) = (G:H)\cdot a$. Allgemein gilt:

2.18. Proposition. Die Komposition $\operatorname{cor}_H^G \circ \operatorname{res}_H^G$ ist der Endomorphismus auf $H^n(G,A)$ gegeben durch Multiplikation mit $(G:H)$.

Beweis. Nach (I.2.4) und Definition 2.16 ist $\operatorname{cor}_H^G \circ \operatorname{res}_H^G = \pi^* \circ (\sigma^*)^{-1} \circ \sigma^* \circ \lambda^* = \pi^* \circ \lambda^*$. Ist $[\phi]$ eine Klasse von Koketten in $H^n(G,A)$, so wird diese von $\pi^* \circ \lambda^*$ abgebildet auf die Klasse der Abbildung $\pi\circ\lambda\circ\phi$ in $H^n(G,A)$. Die Komposition $\pi\circ\lambda$ ist dabei gerade Multiplikation mit $(G:H)$:

$$\begin{aligned}\pi(\lambda(a)) &= \sum_{x\in G/H} x\lambda(a)(x^{-1})\\ &= \sum_{x\in G/H} xx^{-1}a\\ &= (G:H)\cdot a.\end{aligned}$$

□

2.E. Lange exakte Sequenz. Eine der wichtigsten Anwendungen von Gruppenkohomologie sind die von kurzen exakten Koeffizientensequenzen induzierten langen Sequenzen, mit deren Hilfe man oft Abbildungen konstruiert oder Isomorphieaussagen trifft.

2.19. Satz (Lange exakte Kohomologiesequenz)**.**

Sei $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von diskreten G-Moduln. Dann existiert für alle $n \geq 0$ ein Gruppenhomomorphismus

$$\delta^n\colon H^n(G,C) \to H^{n+1}(G,A),$$

sodass durch

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(G,A) \xrightarrow{\alpha^*} H^n(G,B) \xrightarrow{\beta^*} H^n(G,C) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(G,A) \xrightarrow{\alpha^*} \dots$$

eine lange exakte Sequenz von Gruppen gegeben ist.

Beweisskizze. Wir skizzieren den Beweis auf Grundlage von [**Neu11**] und schreiben kurz α_q und β_q für die Abbildungen $C^q(G,\alpha)$ und $C^q(G,\beta)$. Betrachte das folgende kommutative

Diagramm mit exakten Zeilen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^n(G,A) \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "d^n"] & C^n(G,B) \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[d, "d^n"] & C^n(G,C) \arrow[r] \arrow[d, "d^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{n+1}(G,A) \arrow[r, "\alpha_{n+1}"] \arrow[d, "d^{n+1}"] & C^{n+1}(G,B) \arrow[r, "\beta_{n+1}"] \arrow[d, "d^{n+1}"] & C^{n+1}(G,C) \arrow[r] \arrow[d, "d^{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{n+2}(G,A) \arrow[r, "\alpha_{n+2}"] & C^{n+2}(G,B) \arrow[r, "\beta_{n+2}"] & C^{n+2}(G,C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sei $[c] \in H^n(G,C)$ eine Kohomologieklasse. Wähle ein $b \in C^n(G,B)$ mit $\beta_n b = c$. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt $\beta_{n+1} d^n b = d^n \beta_n(b) = d^n c = 0$, da c ein Kozykel ist. Also gilt $d^n b \in \ker \beta_{n+1} = \operatorname{im} \alpha_{n+1}$. Sei $a \in C^{n+1}(G,A)$ eine Kokette mit $\alpha_{n+1} a = d^n b$. Es gilt dann $\alpha_{n+2} d^{n+1} a = d^{n+1} \alpha_{n+1} a = d^{n+1} d^n b = 0$. Die Injektivität von α_{n+2} sagt uns schließlich $d^{n+1} a = 0$, also ist a ein $(n+1)$-Kozykel. Wir setzen $\delta\big([c]\big) \coloneqq [a]$. Eine kurze Rechnung zeigt die Wohldefiniertheit.

Bezüglich der Exaktheit der Sequenz

$$H^n(G,A) \xrightarrow{\alpha_n^*} H^n(G,B) \xrightarrow{\beta_n^*} H^n(G,C) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(G,A) \xrightarrow{\alpha_{n+1}^*} H^{n+1}(G,B)$$

sind die Inklusionen $\operatorname{im} \alpha_n^* \subset \ker \beta_n^*$, $\operatorname{im} \beta_n^* \subset \ker \delta^n$ und $\operatorname{im} \delta^n \subset \ker \alpha_{n+1}^*$ klar. Sei nun $[b] \in \ker \beta_n^*$. Wir können $\beta_n b = 0$ annehmen, da wir sonst ein $c \in C^{n-1}(G,C)$ mit $\beta_n b = d^{n-1} c$ und b_{n-1} mit $\beta_{n-1} b_{n-1} = c$ wählen können und folglich gilt

$$\beta_n\big(b - d^{n-1} b_{n-1}\big) = \beta_n b - \beta_n d^{n-1} b_{n-1} = \beta_n b - d^{n-1} \beta_{n-1} n b_{n-1} = \beta_n b - d^{n-1} c = 0$$

und $[b] = [b - d^{n-1} b_{n-1}]$. Sei also $b \in \ker \beta_n = \operatorname{im} \alpha_n$, wähle a mit $b = \alpha_n a$. Es gilt dann $\alpha_{n+1} d^n a = d^n \alpha_n a = d^n b = 0$, folglich ist a ein Kozykel mit $[b] = \alpha_n^*[a]$.

Die anderen beiden Inklusionen zeigt man auf ähnliche Art und Weise. □

2.F. Cup-Produkt. Zu zwei diskreten G-Moduln A, B sei $A \otimes B = A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ das Tensorprodukt über $\mathbb{Z}$. Dieses wird zu einem diskreten G-Modul, indem wir $g(a \otimes b) = ga \otimes gb$ setzen.

2.20. Definition (Cup-Produkt)**.** Für Koketten $\phi \in C^n(G,A)$, $\psi \in C^m(G,B)$ sei $\phi \otimes \psi$ die Kokette in $C^{n+m}(G, A \otimes B)$ gegeben durch

$$(\phi \otimes \psi)(g_1, \ldots, g_n,) = \phi(g_1, \ldots, g_n) \otimes g_1 \cdots g_n \psi(h_1, \ldots, h_m).$$

Diese Abbildung ist wie auch die durch sie induzierte Abbildung bezüglich den Kohomologiegruppen $\mathbb{Z}$-bilinear und induziert somit eine Abbildung

$$\cup \colon H^n(G,A) \otimes_{\mathbb{Z}} H^m(G,B) \longrightarrow H^{n+m}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B),$$

das sogenannte **Cup-Produkt**.

2.21. Satz (Projektionsformel)**.** Für eine abgeschlossene Untergruppe $H < G$ von endlichem Index und $\alpha \in H^n(G, A)$, $\beta \in H^m(G, B)$ gilt die Formel

$$\operatorname{cor}_H^G(\alpha \cup \operatorname{res}_H^G(\beta)) = \operatorname{cor}_H^G(\alpha) \cup \beta \quad \text{in } H^{n+m}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B).$$

Beweis. Mit dem Prinzip der Dimensionsverschiebung (siehe [**Neu11**, Satz 3.15]) genügt es, den Fall $n = m = 0$ zu betrachten. Wir wählen also Elemente $\alpha \in H^0(H, A) = A^H$ und $\beta \in H^0(G, B) = B^G$. In diesem Fall ist res_H^G die Inklusion $B^G \hookrightarrow B^H$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \operatorname{cor}_H^G(\alpha \cup \operatorname{res}_H^G(\beta)) &= \operatorname{cor}_H^G(\alpha \otimes \beta) \\ &= \sum_{x \in G/H} x(\alpha \otimes \beta) \\ &= \sum_{x \in G/H} x\alpha \otimes \beta \quad (\text{da } \beta \in B^G) \\ &= \Big(\sum x\alpha\Big) \otimes \beta \\ &= \operatorname{cor}_H^G(\alpha) \cup \beta. \end{aligned}$$

□

2.G. Galoiskohomologie. Im Folgenden sei L/k eine galoissche Körpererweiterung mit Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(L/k)$. Die Kohomologiegruppen $H^n(L/k, A) \coloneqq H^n(\operatorname{Gal}(L/k), A)$ werden **Galoiskohomologiegruppen von L/k** mit Koeffizienten in A genannt, wobei A ein diskreter G-Modul ist. Solche Moduln heißen nennt man auch **Galoismodul bzgl. L/k**. Für den separablen Abschluss k_{sep}/k und die absolute Galoisgruppe $\Gamma_k = \operatorname{Gal}(k_{sep}/k)$ schreibt man kurz $H^n(k, A) \coloneqq H^n(\Gamma_k, A)$.

Wir wollen desöfteren statt einem fest gewählten Galoismodul A einen Funktor M von der Kategorie der Körper in die Kategorie der Galoismoduln angeben und schreiben hierfür $H^n(L/k, M) \coloneqq H^n(L/k, M(L))$. Für uns wichtige Beispiele solcher Funktoren sind die Gruppenschemata $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ und μ_m gegeben durch

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(k) = k^\times, \quad \mu_m(k) = \{x \in k \mid x^m = 1\}.$$

2.22. Theorem (Hilberts Satz 90)**.** Ist L/k Galoiserweiterung, so gilt $H^1(L/k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = 1$. Insbesondere gilt $H^1(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = 1$ für jeden Körper k.

Beweis. Wir zeigen den Fall, wo L/k eine endliche Galoiserweiterung ist. Der allgemeine Fall folgt dann aus Korollar 2.13 und der Definition der Galoisgruppe. Sei $G = \operatorname{Gal}(L/k)$ und $f \in Z^1(G, L^\times)$ ein 1-Kozykel. Es gilt also $f(\sigma\tau) = \sigma f(\tau) f(\sigma)$ für alle $\sigma, \tau \in G$. Der Satz von Artin (siehe [**Lan65**, VIII, §4, Thm. 7]) besagt, dass Elemente in G linear unabhängig sind über L. Da $f(\tau) \in L^\times$, also $f(\tau) \neq 0$ für alle τ gilt, ist folglich $\sum_{\tau \in G} f(\tau) \cdot \tau$ nicht das Nullelement. Es existiert also ein $c \in L$ mit

$$b \coloneqq \sum_{\tau \in G} f(\tau) \cdot \tau c \neq 0.$$

Anwenden von einem beliebig gewählten $\sigma \in G$ auf b liefert

$$\begin{aligned}\sigma b &= \sum_{\tau\in G} \sigma f(\tau)\cdot\sigma(\tau c)\\ &= \sum_{\tau\in G} f(\sigma\tau)\cdot f(\sigma)^{-1}\cdot(\sigma\tau)c\\ &= f(\sigma)^{-1}\cdot\sum_{\tau\in G} f(\sigma\tau)\cdot(\sigma\tau)c\\ &= f(\sigma)^{-1}\cdot\sum_{\tau\in G} f(\tau)\cdot\tau c\\ &= f(\sigma)^{-1}\cdot b,\end{aligned}$$

oder mit anderen Worten $f(\sigma) = (\sigma b)^{-1}\cdot b = \sigma x\cdot x^{-1}$ mit $x = b^{-1} \in L^\times$. Wir haben also $f \in B^1(G, L^\times)$, d.h. $[f] = 0 \in H^1(G, \mathbb{G}_\mathrm{m})$. □

2.23. Korollar (Hilberts Satz 90 – klassische Formulierung)**.** Sei L/k eine zyklische Galoiserweiterung und σ ein Erzeuger von $\mathrm{Gal}(L/k)$. Dann existiert für alle $x \in L^\times$ mit $N_{L/k}(x) = 1$ ein $y \in L^\times$ mit $x = \frac{y}{\sigma y}$.

Beweis. Durch $f(\sigma^i) \coloneqq x\cdot\sigma x\cdot\ldots\cdot\sigma^{i-1}x$, $f(1) \coloneqq 1$ ist ein 1-Kozykel gegeben, der aufgrund von Hilberts Satz 90 ein 1-Korand ist. Somit kommt f von einem Element $z \in L^\times$, d.h. $f(\tau) = \tau z\cdot z^{-1}$ für alle τ. Mit $y = z^{-1}$ haben wir dann

$$x = f(\sigma) = \frac{\sigma z}{z} = \frac{y}{\sigma y}.$$ □

Umgekehrt gilt auch $N_{L/k}(x) = 1$ für jedes Element x der Form $\frac{y}{\sigma y}$:

$$N_{L/k}\left(\frac{y}{\sigma y}\right) = \prod_{i=0}^{r-1}\sigma^i\left(\frac{y}{\sigma y}\right) = \prod_{i=0}^{r-1}\frac{\sigma^i y}{\sigma^{i+1}y} = \frac{y}{\sigma^r y} = 1.$$

Somit können wir die Aussage von Korollar 2.23 zusammenfassen als die Exaktheit der Sequenz

(I.2.6) $$L^\times \xrightarrow{y\mapsto\frac{y}{\sigma y}} L^\times \xrightarrow{N_{L/k}} k^\times.$$

Eine weitere wichtige Folgerung aus Hilberts Satz 90 ist die Beschreibung der Kohomologiegruppe $H^1(k, \mu_m)$.

2.24. Korollar. Sei $m \in \mathbb{N}$ nicht teilbar durch $\operatorname{char} k$. Dann gilt $H^1(k, \mu_m) \cong k^\times/k^{\times m}$.

Beweis. Wir haben eine exakte Sequenz von diskreten Γ_k-Moduln (die sogenannte *Kummersequenz*, siehe Abschnitt II.1)

(I.2.7) $$1 \longrightarrow \mu_m(k_{sep}) \longrightarrow k_{sep}^\times \xrightarrow{(-)^m} k_{sep}^\times \longrightarrow 1.$$

Die dadurch induzierte lange exakte Kohomologiesequenz beginnt mit

$$1 \longrightarrow \mu_m(k) \longrightarrow k^\times \xrightarrow{(-)^m} k^\times \longrightarrow H^1(k, \mu_m) \longrightarrow H^1(k, \mathbb{G}_\mathrm{m}).$$

Letztere Gruppe verschwindet wegen Hilberts Satz 90, somit folgt die Aussage aus dem Homomorphiesatz. □

2.25. Definition & Bemerkung (Restriktion und Korestriktion)**.** Ist L/k eine beliebige Erweiterung und A ein diskreter Γ_k-Modul, so kann man die separablen Abschlüsse k_{sep} und L_{sep} von k und L so wählen, dass $k_{sep} \subset L_{sep}$ gilt. Die übliche Restriktion von Automorphismen $\rho\colon \Gamma_L \to \Gamma_k$, $\sigma \mapsto \sigma|_{k_{sep}}$ induziert dann eine Restriktionsabbildung

$$\mathrm{res}_{L/k}\colon H^n(k,A) \to H^n(L,A), \quad [\phi] \mapsto [\phi \circ \rho^{\times n}]. \tag{I.2.8}$$

Ist die Erweiterung L/k endlich und separabel, so ist $\Gamma_L < \Gamma_k$ eine offene Untergruppe von endlichem Index. Wir haben somit die Korestriktionsabbildung aus Defintion 2.16

$$\mathrm{cor}_{L/k} := \mathrm{cor}_{\Gamma_L}^{\Gamma_k}\colon H^n(L,A) \to H^n(k,A).$$

In diesem Fall stimmt auch die Restriktion in (I.2.8) mit der Restriktion $\mathrm{res}_{\Gamma_L}^{\Gamma_k}$ aus (I.2.3) überein, und es gilt für alle $\alpha \in H^n(k,A)$

$$(\mathrm{cor}_{L/k} \circ \mathrm{res}_{L/k})(\alpha) = (\Gamma_k : \Gamma_L) \cdot \alpha = [L : k] \cdot \alpha.$$

2.26. Beispiel. Für $n = 0$ ist $\mathrm{cor}_{L/k}$ die Abbildung $A^{\Gamma_L} \to A^{\Gamma_k}$ gegeben durch $a \mapsto \sum_\sigma \sigma a$, wobei die Summe über Vertreter σ von Linksnebenklassen aus Γ_k/Γ_L läuft.

2.H. Beziehung zur Brauergruppe. Unter der Brauergruppe $\mathrm{Br}(k)$ eines Körpers k verstehen wir die Menge der Isomorphieklassen von zentral einfachen, endlich dimensionalen k-Algebren modulo Brauer-Äquivalenz versehen mit dem Tensorprodukt über k als Gruppenverknüpfung. Wir benutzen aus Gründen der Lesbarkeit keine besondere Notation für Äquivalenzklassen solcher Algebren, sondern notieren die Klasse einer Algebra mit einem ihrer Vertreter. Die relative Brauergruppe $\mathrm{Br}(L/k)$ einer Körpererweiterung L/k ist der Kern des Homomorphismus $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(L)$, $A \mapsto A \otimes_k L$. Weiter bezeichne ${}_m\mathrm{Br}(k)$ die m-Torsion der Brauergruppe.

2.27. Satz. Für Galoiserweiterungen L/k ist die Abbildung

$$\begin{aligned} H^2(L/k, L^\times) &\longrightarrow \mathrm{Br}(L/k) \\ [f] &\longmapsto (L, \mathrm{Gal}(L/k), f) \end{aligned}$$

wohldefiniert und ein Isomorphismus.

Hierbei bezeichnet (L, G, f) die k-Algebra, die über k erzeugt wird von Symbolen u_σ für jedes $\sigma \in G$ mit den Relationen $u_\sigma x = \sigma(x) u_\sigma$ für $x \in L$ und $u_\sigma u_\tau = f(\sigma,\tau) u_{\sigma\tau}$. Einen schönen und ausführlichen Überblick mitsamt einem Beweis des Satzes gibt Ina Kersten in [**Ker07**, S. 55–76].

2.28. Korollar. Es gilt $H^2(k, \mathbb{G}_\mathrm{m}) \cong \mathrm{Br}(k)$. □

2.29. Korollar. Sei $m \in \mathbb{N}$ nicht teilbar durch $\mathrm{char}\, k$. Dann gilt $H^2(k, \mu_m) \cong {}_m\mathrm{Br}(k)$.

Beweis. Wir betrachten erneut die Sequenz (I.2.7). Diese liefert uns die Exaktheit von

$$H^1(k, \mathbb{G}_\mathrm{m}) \longrightarrow H^2(k, \mu_m) \longrightarrow H^2(k, \mathbb{G}_\mathrm{m}) \xrightarrow{\cdot m} H^2(k, \mathbb{G}_\mathrm{m}).$$

Die erste Gruppe verschwindet nach Hilberts Satz 90. Folglich haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^2(k, \mu_m) \longrightarrow \mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\cdot m} \mathrm{Br}(k).$$

Also ist $H^2(k, \mu_m)$ isomorph zum Bild von $H^2(k, \mu_m) \hookrightarrow \mathrm{Br}(k)$ und folglich zum Kern ${}_m\mathrm{Br}(k) = \ker(\mathrm{Br}(k) \xrightarrow{\cdot m} \mathrm{Br}(k))$. □

Zusammengefasst haben wir also folgende Indentitäten gezeigt:

$$H^n(k, \mathbb{G}_\mathrm{m}) = \begin{cases} k^\times & : \ n = 0 \\ 0 & : \ n = 1 \\ \mathrm{Br}(k) & : \ n = 2 \end{cases}$$

$$H^n(k, \mu_m) = \begin{cases} \mu_m(k) & : \ n = 0 \\ k^\times / k^{\times m} & : \ n = 1 \\ {}_m\mathrm{Br}(k) & : \ n = 2. \end{cases}$$

3. Étale Kohomologie eines Körpers

Im Folgenden wollen wir kurz die étale Kohomologie vom Spektrum eines Körpers untersuchen und aufzeigen, dass diese äquivalent zur Galoiskohomologie von Körpern ist. In der Literatur wird der Normresthomomorphismus daher oft mit Werten in dieser Kohomologietheorie angegeben. Im allgemeineren Rahmen der étalen Kohomologie stehen zahlreiche zusätzliche Werkzeuge zur Verfügung. Für einen Überblick über étale Morphismen, étale Topologie und étale Kohomologie von allgemeinen Schemata siehe Abschnitt 2 im Anhang.

3.A. Étale Algebren. Unter einer Algebra über einem Körper verstehen wir stets eine kommutative, assoziative, unitäre Algebra.

3.1. Definition. Eine endlichdimensionale k-Algebra A heißt **étale**, falls die Menge $\mathrm{Hom}_k(A, k_{sep})$ der k-Algebrenhomomorphismen von A nach k_{sep} aus genau $n = \dim_k A$ Elementen besteht. Étale Algebren bilden eine volle Unterkategorie Et/k in der Kategorie der k-Algebren.

Weitere Charakterisierungen von étalen Algebren findet man in [**KMRT98**, Abschn. V.18.A]. So sind diese beispielsweise dadurch gekennzeichnet, dass $A \otimes_k k_{sep}$ isomorph ist zu $k_{sep}^{\oplus m}$ für ein $m \geq 0$. Man kann nun mit Methoden der kommutativen Algebra zeigen, dass für étale Morphismen $Y \to \operatorname{Spec} k$ stets eine étale k-Algebra A existiert mit $Y = \operatorname{Spec} A$. Umgekehrt induziert jede étale k-Algebra A einen étalen Morphismus $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} k$. Wir erhalten so auf natürliche Art und Weise eine Äquivalenz zwischen der Kategorie $\mathrm{Et}/\operatorname{Spec} k$ der étalen Morphismen über $\operatorname{Spec} k$ und der Kategorie Et/k der étalen k-Algebren.

3.B. Étale Algebren und endliche diskrete $\boldsymbol{\Gamma_k}$-Mengen. Offensichtlich operiert $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(k_{sep}/k)$ auf $\mathrm{Hom}_k(A, k_{sep})$ für jede k-Algebra A durch Komposition von Abbildungen. Sei nun A zusätzlich étale. Aufgrund der endlichen Dimension von A über k haben auch die Bilder $\xi(A) \subset k_{sep}$ von Elementen $\xi \in \mathrm{Hom}_k(A, k_{sep})$ endliche k-Dimension. Die Körpererweiterung $k(\xi(A))$ von k ist somit endlich, und aufgrund der Endlichkeit von $\mathrm{Hom}_k(A, k_{sep})$ finden wir eine endliche Erweiterung M, die alle Bilder $\xi(A)$ von Elementen $\xi \in \mathrm{Hom}_k(A, k_{sep})$ enthält. Die Operation von Γ_k auf $\mathrm{Hom}_k(A, k_{sep})$ faktorisiert somit über dem endlichen Quotienten $\mathrm{Gal}(M/k)$ von Γ_k und ist damit diskret.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_k \times \mathrm{Hom}_k(A, k_{sep}) \arrow[r] \arrow[dr, dotted] & \mathrm{Hom}_k(A, k_{sep}) \\
& \mathrm{Gal}(M/k) \times \mathrm{Hom}_k(A, k_{sep}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Weiter ist die Zuordnung $A \mapsto \mathrm{Hom}_k(A, k_{sep})$ zwischen étalen k-Algebren und diskreten Γ_k-Mengen (d.h. diskreten Mengen mit einer stetigen Γ_k-Operation) kontravariant funktoriell: Ein k-Algebrenhomomorphismus $f\colon A \to B$ induziert eine Γ_k-äquivariante Abbildung $\mathrm{Hom}_k(B, k_{sep}) \to \mathrm{Hom}_k(A, k_{sep})$ mittels $\xi \mapsto \xi \circ f$.

3.2. Proposition. Durch $A \mapsto \mathrm{Hom}_k(A, k_{sep})$ ist eine Anti-Äquivalenz zwischen der Kategorie étaler k-Algebren und der Kategorie diskreter Γ_k-Mengen gegeben. Der Umkehrfunktor lautet $M \mapsto \mathrm{Hom}_{\Gamma_k}(M, k_{sep})$.

3.3. Bemerkung. Die Kategorien von endlichen diskreten Γ_k-Mengen und endlichen diskreten Γ_k-Moduln sind identisch. Denn jede endliche Menge $M \cong \mathrm{Hom}_k(A, k_{sep})$ aus Γ-$\mathbf{FSet}^\delta$ trägt mit $(f+g)(a) := f(a) + g(a)$ die Struktur einer abelschen Gruppe und es gilt das Distributivgesetz $\sigma(f+g) = \sigma f + \sigma g$.

3.C. Étale Garben über $\boldsymbol{k}$ und diskrete $\boldsymbol{\Gamma_k}$-Moduln. Wir erinnern uns, dass die Kategorie $\mathrm{Et}/\operatorname{Spec} k$ zusammen mit étalen Überdeckungen (siehe Definition 2.5 im Anhang) einen Situs $(\operatorname{Spec} k)_{\mathrm{et}}$ bilden. Somit haben wir den Begriff einer étalen Garbe auf $(\operatorname{Spec} k)_{\mathrm{et}}$. Dies ist ein Funktor $\mathcal{F}\colon (\mathrm{Et}/\operatorname{Spec} k)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$, der das Garbenkriterium erfüllt. Hierunter verstehen wir die Exaktheit von

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j) \tag{I.3.1}$$

für jede étale Überdeckung $(U_i \to U)_i$ eines étalen Morphismus $U \to \operatorname{Spec} k$ (vgl. den Abschnitt 1 über Grothendieck-Topologien im Anhang). Unter der Äquivalenz der Kategorien Et/k und $(\mathrm{Et}/\operatorname{Spec} k)^{\mathrm{op}}$ können wir étale Garben auf $\operatorname{Spec} k$ auffassen als (kovariante) Funktoren $\mathcal{F}\colon \mathrm{Et}/k \to \mathbf{Ab}$. Die Exaktheit der Sequenz (I.3.1) für jede étale Überdeckung übersetzt sich so zu folgenden zwei Eigenschaften:

1) $\mathcal{F}(\prod_i A_i) \cong \bigoplus_i \mathcal{F}(A_i)$ für jedes endliche Produkt von étalen k-Algebren A_i.

2) $\mathcal{F}(K) \cong \mathcal{F}(L)^{\mathrm{Gal}(L/K)}$ für jede endliche Galoiserweiterung L/K von endlichen Körpererweiterungen K/k.

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Et}/\operatorname{Spec} k)^{\mathrm{op}} \arrow[d, dotted, shift left] \arrow[dr] & \\
& \mathbf{Ab} \\
\mathrm{Et}/k \arrow[u, dotted, shift left, "\cong"] \arrow[ur, "\mathcal{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

Die Kategorie étaler Garben $\mathrm{Et}/k \to \mathbf{Ab}$ notieren wir mit $\mathrm{Shv}(\mathrm{Et}/k)$.

3.4. Beispiel. Die étalen Garben $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ und μ_m aus Beispiel 2.6 sind über $\operatorname{Spec} k$ gegeben als die Funktoren $\mathrm{Et}/k \to \mathbf{Ab}$ mit

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(A) = A^\times, \quad \mu_m(A) = \{a \in A^\times \mid a^n = 1\}\,.$$

Die Garbe μ_m ist gerade der Kern des Garbenmorphismus $(-)^m \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$. (Unter dem *Kern* eines Morphismus $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen étalen Garben verstehen wir die étale Garbe $(\ker\phi)(A) \coloneqq \ker\big(\phi(A)\colon \mathcal{F}(A) \to \mathcal{G}(A)\big)$.)

Wir betrachten nun den Funktor $\mathrm{Shv}(\mathrm{Et}/k) \to \mathbf{Ab}$ gegeben durch $\mathcal{F} \mapsto \varinjlim \mathcal{F}(L)$, wobei der Limes über alle endlichen Erweiterungen L/k mit $k \subset L \subset k_{sep}$ läuft. Die absolute Galoisgruppe von k operiert auf $\varinjlim \mathcal{F}(L)$ durch $\sigma[f] = [\mathcal{F}(\sigma|_L)(f)]$. Hier ist $f \in \mathcal{F}(L)$ ein Repräsentant von $[f] \in \varinjlim \mathcal{F}(L)$. Durch diese Operation besitzt $\varinjlim \mathcal{F}(L)$ die Struktur eines diskreten Γ_k-Moduls. Der folgende Satz ist eine Umformulierung der Galois-Theorie.

3.5. Satz. Durch $\mathcal{F} \mapsto M_{\mathcal{F}} \coloneqq \varinjlim \mathcal{F}(L)$ ist eine Äquivalenz $\mathrm{Shv}(\mathrm{Et}/k) \xrightarrow{\simeq} \Gamma_k\text{-}\mathrm{Mod}^\delta$ von Kategorien gegeben. Der Umkehrfunktor ordnet einem diskreten Γ_k-Modul M die étale Garbe $\mathcal{F}_M$ gegeben durch $A \mapsto \mathrm{Hom}_{\Gamma_k}\big(\mathrm{Hom}_k(A, k_{sep}), M\big)$ zu. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Shv}(\mathrm{Et}/k) \arrow[r, "\mathcal{F}\mapsto\varinjlim \mathcal{F}(L)"] & \Gamma_k\text{-}\mathrm{Mod}^\delta \\
(\mathrm{Et}/k)^{\mathrm{op}} \arrow[u, "A\mapsto \mathrm{Hom}_k(A,-)"] \arrow[r, "A\mapsto \mathrm{Hom}_k(A,k_{sep})"'] & \Gamma_k\text{-}\mathrm{FMod}^\delta \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Im Hinblick auf die Bemerkungen 2.10 und 2.12 im Anhang gilt also:

3.6. Korollar. Die étale Kohomologie von $\operatorname{Spec} k$ ist äquivalent zur Galoiskohomologie von k, d.h. es gilt

$$H^n_{\mathrm{et}}(k, \mathcal{F}) \cong H^n(k, M_{\mathcal{F}}), \text{ oder mit anderen Worten}$$
$$H^n(k, M) \cong H^n_{\mathrm{et}}(k, \mathcal{F}_M).$$

Beweis. Es gilt
$$\begin{aligned} H^n_{\mathrm{et}}(k,\mathcal{F}) &\overset{2.12}{\cong} \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Shv}(\mathrm{Et}/k)}(\mathbb{Z},\mathcal{F}) \\ &\overset{3.5}{\cong} \mathrm{Ext}^n_{\Gamma_k\text{-}\mathrm{Mod}^\delta}(\mathbb{Z},M_{\mathcal{F}}) \\ &= \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}[\Gamma_k]}(\mathbb{Z},M_{\mathcal{F}}) \overset{2.10}{\cong} H^n(k,M_{\mathcal{F}}). \end{aligned}$$
□

Aufgrund dieser Identifizierung der Galoiskohomologie benutzen wir im Folgenden stets die étale Kohomologie $H^n_{\mathrm{et}}(k,\mathcal{F}_-)$ anstelle von $H^n(k,-)$, um zu verdeutlichen, dass wir uns im allgemeineren Rahmen der étalen Kohomologie von Schemata bewegen können.

4. Bilinearformen

Die Übersicht über Bilinearformen erfolgt auf Grundlage von Elman, Karpenko und Merkurjev [**EKM08**]. Im gesamten Abschnitt bezeichne k einen Körper der Charakteristik ungleich zwei. Eine **Bilinearform über** $\boldsymbol{k}$ ist eine bilineare Abbildung $\mathfrak{b}\colon V\times V\to k$ auf einem endlich dimensionalen k-Vektorraum V. Wir sind lediglich an symmetrischen, nicht ausgearteten Bilinearformen interessiert. $\mathfrak{b}$ heißt **symmetrisch**, falls $\mathfrak{b}(v,w)=\mathfrak{b}(w,v)$ für alle $v,w\in V$ gilt, und **nicht ausgeartet**, falls durch $V\to V^*$, $v\mapsto \big(w\mapsto \mathfrak{b}(v,w)\big)$ ein Isomorphismus zwischen V und seinem Dualraum gegeben ist. Man notiert auch $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_V$, bzw. $V=V_{\mathfrak{b}}$, um die Zugehörigkeit von Bilinearform und zugrundeliegendem Vektorraum zu verdeutlichen.

Nach Wahl einer Basis $(e_1,\dots,e_n)$ ist eine Bilinearform $\mathfrak{b}$ eindeutig bestimmt durch die Matrix $B=\big(\mathfrak{b}(e_i,e_j)\big)$. Es gilt dann bzgl. dieser Basis $\mathfrak{b}(v,w)=v^TBw$, wobei hier v,w als Spaltenvektoren betrachtet werden mit den Darstellungskoeffizienten bzgl. der Basis als Einträge.

Eine **Isometrie** zwischen zwei Bilinearformen $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ ist ein Isomorphismus $\phi\colon V_{\mathfrak{b}_1}\to V_{\mathfrak{b}_2}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{b}_1(v,w)=\mathfrak{b}_2\big(\phi(v),\phi(w)\big)$ für alle $v,w\in V_{\mathfrak{b}_1}$. Isometrie sei notiert mit $\mathfrak{b}_1\cong\mathfrak{b}_2$, bzw. $V_{\mathfrak{b}_1}\cong V_{\mathfrak{b}_2}$. Seien $\mathfrak{b},\mathfrak{b}'$ zwei Bilinearformen und E,E' Basen von $V_{\mathfrak{b}},V_{\mathfrak{b}'}$, sowie B,B' Matrixdarstellungen bzgl. dieser Basen. Man rechnet leicht nach, dass genau dann $\mathfrak{b}\cong\mathfrak{b}'$ gilt, wenn eine invertierbare Matrix A existiert, sodass $B=A^TB'A$ gilt. Ist ϕ eine Isometrie zwischen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}'$, so ist A gegeben durch $\big(M^B_{B'}(\phi)\big)^T$.

Für zwei Bilinearformen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ über k sind die **äußere orthogonale Summe** $\mathfrak{b}_1\oplus\mathfrak{b}_2\colon (V_{\mathfrak{b}_1}\oplus V_{\mathfrak{b}_2})^{\times 2}\to k$ sowie das **Tensorprodukt** $\mathfrak{b}_1\otimes\mathfrak{b}_2\colon\ (V_{\mathfrak{b}_1}\otimes V_{\mathfrak{b}_2})^{\times 2}\to k$ gegeben durch

$$\begin{aligned} (\mathfrak{b}_1\oplus\mathfrak{b}_2)\big((v_1,v_2),(w_1,w_2)\big) &= \mathfrak{b}_1(v_1,w_1)+\mathfrak{b}_2(v_2,w_2) \\ (\mathfrak{b}_1\otimes\mathfrak{b}_2)\big(v_1\otimes v_2,w_1\otimes w_2\big) &= \mathfrak{b}_1(v_1,w_1)\cdot\mathfrak{b}_2(v_2,w_2). \end{aligned}$$

Sind $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ symmetrisch und nicht ausgeartet, so auch $\mathfrak{b}_1\oplus\mathfrak{b}_2$ und $\mathfrak{b}_1\otimes\mathfrak{b}_2$. Die Isometrieklassen von symmetrischen, nicht ausgearteten Bilinearformen bilden einen Halbring. Dessen Grothendieck-Ring $\widehat{W}(k)$ heißt **Grothendieck-Witt-Ring**. Wir notieren die Isometrieklasse einer Bilinearform $\mathfrak{b}$ in $\widehat{W}(k)$ weiterhin mit $\mathfrak{b}$, sofern keine Missverständnisse zu erwarten sind.

Der Grothendieck-Witt-Ring besteht dann also aus Differenzen $\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_2$. Die von orthogonaler Summe und Tensorprodukt induzierten Verknüpfungen in $\widehat{W}(k)$ seien mit $+$ und $\cdot$ notiert.

Die Bilinearform $\mathbb{H}(V)$ auf $V \oplus V^*$ gegeben durch $\big((v_1, f_1), (v_2, f_2)\big) \mapsto f_1(v_2) + f_2(v_1)$ heißt **hyperbolische Bilinearform von V**. Sie ist ebenfalls symmetrisch und nicht ausgeartet. Für $\mathbb{H} := \mathbb{H}(k)$ existiert eine Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(bzgl. der Standardbasisvektoren von } k^{\oplus 2}\text{).} \tag{I.4.1}$$

Es gilt $\mathbb{H}(V) \cong \mathbb{H}^{\oplus \dim V}$. Eine zu $\mathbb{H}^{\oplus n}$ isometrische Bilinearform heißt **hyperbolisch**. Das Ideal aller hyperbolischen Bilinearformen in $\widehat{W}(k)$ ist also gerade das Hauptideal $(\mathbb{H})$. Der Quotientenring $W(k) := \widehat{W}(k)/(\mathbb{H})$ heißt **Witt-Ring von k**. Wie bereits im Grothendieck-Witt-Ring notieren wir die Klasse einer Bilinearform $\mathfrak{b}$ in $W(k)$ ebenfalls mit $\mathfrak{b}$.

Für $a \in k$ sei $\langle a \rangle$ die Bilinearform $k \times k \to k$, $(v, w) \mapsto avw$. $\langle a \rangle$ ist offensichtlich symmetrisch und für $a \neq 0$ nicht ausgeartet. Weiter sei $\langle a_1, \dots, a_r \rangle := \langle a_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle a_r \rangle$ für $a_1, \dots, a_r \in k$. Solche Formen heißen **diagonale Bilinearformen**. Formen isometrisch zu einer diagonalen Bilinearform heißen **diagonalisierbar**. In unserem Fall $\operatorname{char} k \neq 2$ ist jede symmetrische Bilinearform diagonalisierbar. Es gilt weiter $\langle a_1 \cdot \ldots \cdot a_r \rangle \cong \langle a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle a_r \rangle$ und somit

$$\langle a_1 \cdot \ldots \cdot a_r \rangle = \langle a_1 \rangle \cdot \ldots \cdot \langle a_r \rangle \quad \text{in } \widehat{W}(k).$$

4.1. Lemma. Es gilt $\langle a, -a \rangle = 0$ in $W(k)$ für alle $a \in k^\times$ und folglich $\langle -1 \rangle = -\langle 1 \rangle = -1$ in $W(k)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{b}$ die Bilinearform $\langle a, -a \rangle$. Wir zeigen, dass $V_\mathfrak{b}$ eine Basis besitzt, bezüglich der $\mathfrak{b}$ dargestellt werden kann durch die Matrix aus (I.4.1). Dazu sei (e_1, e_2) eine orthogonale Matrix (z.B. induziert von Standardbasisvektoren von $k^{\oplus 2}$) und

$$(e_1', e_2') := \big(e_1 + e_2, \tfrac{1}{2a}(e_1 - e_2)\big).$$

Man rechnet leicht nach, dass dann $\mathfrak{b}(e_1', e_1') = \mathfrak{b}(e_2', e_2') = 0$, $\mathfrak{b}(e_1', e_2') = 1$ gilt. □

4.A. Struktur von $\widehat{W}(k)$ und $W(k)$. Wir zitieren zwei Sätze über die Struktur des Grothendieck-Witt-Rings und des Witt-Rings im Hinblick auf Erzeuger und Relationen.

4.2. Satz. [**EKM08**, Theorem 4.7]

Der Ring $\widehat{W}(k)$ wird erzeugt von Isometrieklassen eindimensionaler diagonaler Formen $\langle a \rangle$ mit der Relation $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle a + b \rangle + \langle ab(a + b) \rangle$ für alle $a, b \in k^\times$ mit $a + b \neq 0$.

4.3. Korollar. [**EKM08**, Theorem 4.8]

Der Ring $W(k)$ wird erzeugt von Isometrieklassen eindimensionaler diagonaler Formen $\langle a \rangle$ mit den Relationen

1) $\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle = 0$.
2) $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle a + b \rangle + \langle ab(a + b) \rangle$ für alle $a, b \in k^\times$ mit $a + b \neq 0$.

4.B. $\widehat{I}(k)$ und $I(k)$. Das **Augmentationsideal** $\widehat{I}(k)$ sei das von allen $\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_2 \in \widehat{W}(k)$ mit $\dim \mathfrak{b}_1 = \dim \mathfrak{b}_2$ erzeugte Ideal. Es ist der Kern des wohldefinierten Homomorphismus $\dim\colon \widehat{W}(k) \to \mathbb{Z}$, $\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{b}_2 \mapsto \dim \mathfrak{b}_1 - \dim \mathfrak{b}_2$. Wegen

$$\langle a\rangle - \langle b\rangle = \big(\langle 1\rangle - \langle b\rangle\big) - \big(\langle 1\rangle - \langle a\rangle\big) \quad \text{in } \widehat{W}(k)$$

wird $\widehat{I}(k)$ erzeugt von Elementen $\langle 1\rangle - \langle a\rangle$ mit $a \in k^\times$. Weiter sei $I(k)$ das Bild von $\widehat{I}(k)$ unter $\widehat{W}(k) \twoheadrightarrow W(k)$. Da $\widehat{I}(k) \cap (\mathbb{H}) = 0$ gilt, induziert die kanonische Projektion einen Isomorphismus $\widehat{I}(k) \cong I(k)$ mit $\langle 1\rangle - \langle a\rangle \mapsto \langle 1\rangle - \langle a\rangle = \langle 1, -a\rangle$. Die letztere Gleichheit $\langle 1\rangle - \langle a\rangle = \langle 1, -a\rangle$ gilt dabei nur in $W(k)$ aufgrund von Lemma 4.1, in der Regel aber nicht in $\widehat{W}(k)$. Wir schreiben $\langle\langle a\rangle\rangle$ für die Bilinearform $\langle 1, -a\rangle$. Aus Korollar 4.3 folgern wir direkt:

4.4. Korollar. In $W(k)$ gelten die Identitäten

1) $\langle\langle 1\rangle\rangle = 0$.
2) $\langle\langle a\rangle\rangle + \langle\langle b\rangle\rangle = \langle\langle a+b\rangle\rangle + \langle\langle ab(a+b)\rangle\rangle$ für alle $a, b \in k^\times$ mit $a + b \neq 0$.

Außerdem wird das Ideal $I(k)$ erzeugt von Isometrieklassen zweidimensionaler Formen $\langle\langle a\rangle\rangle$ mit diesen beiden Relationen. □

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\widehat{I}^n(k) := \widehat{I}(k)^{\otimes n}$ die n-te Potenz bezüglich des Tensorprodukts, genauso sei $I^n(k) := I(k)^{\otimes n}$. Analog zum Fall $n = 1$ wird $\widehat{I}^n(k)$ (als abelsche Gruppe) erzeugt von Produkten $\prod_{i=1}^n (\langle 1\rangle - \langle a\rangle_i)$ mit $a_i \in k^\times$, und durch

$$\begin{aligned} \widehat{I}^n(k) &\longrightarrow I^n(k) \\ \textstyle\prod_{i=1}^n (\langle 1\rangle - \langle a\rangle_i) &\longmapsto \textstyle\prod_{i=1}^n \langle 1, -a_i\rangle \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus gegeben. Die Bilinearform $\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle := \langle\langle a_1\rangle\rangle \otimes \ldots \otimes \langle\langle a_n\rangle\rangle$ heißt ***n*-fache Pfisterform**. Als abelsche Gruppe wird $I^n(k)$ also erzeugt von $\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$ mit $a_i \in k^\times$.

4.5. Bemerkung. Aus den Definitionen folgt direkt $\langle\langle a\rangle\rangle + \langle\langle b\rangle\rangle = \langle\langle ab\rangle\rangle + \langle\langle a, b\rangle\rangle$ in $W(k)$. Somit haben wir

$$\langle\langle a\rangle\rangle + \langle\langle b\rangle\rangle \equiv \langle\langle ab\rangle\rangle \mod I^2(k).$$

4.6. Korollar. Es gilt $\langle\langle a, 1-a\rangle\rangle = 0$ in $W(k)$ für alle $a \in k^\times$ mit $a \neq 1$.

Beweis. Aus der ersten Gleichung in vorangegangener Bemerkung und den Relationen in Korollar 4.4 folgern wir

$$\begin{aligned} \langle\langle a, 1-a\rangle\rangle &= \langle\langle a\rangle\rangle + \langle\langle 1-a\rangle\rangle - \langle\langle a(1-a)\rangle\rangle \\ &= \langle\langle 1\rangle\rangle + \langle\langle a(1-a)\rangle\rangle - \langle\langle a(1-a)\rangle\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

4.C. Stiefel-Whitney-Invarianten von Bilinearformen. In diesem Unterabschnitt zeigen wir eine Verbindung zwischen Bilinearformen und Milnor'scher K-Theorie auf, welche durch die Formeln in Bemerkung 4.5 und Korollar 4.6 gewissermaßen angedeutet wurde. Da dies jedoch in keiner Verbindung zur Bloch-Kato- bzw. Milnor-Vermutung steht, sind die folgenden Seiten höchstens von eigenem Interesse und können daher ohne weiteres übersprungen werden.

Die Beschränkung auf den Fall $\operatorname{char} k \neq 2$ ist an dieser Stelle von Bedeutung. Wir wollen die Restklassengruppe $K_n^M(k)/2$ als $\mathbb{Z}/2$-Algebra auffassen. Weiter sei $K_\Pi^M(k)/2$ die Algebra bestehend aus formalen Summen $\xi_1 + \xi_2 + \ldots$ mit $\xi_i \in K_i^M(k)/2$, d.h. $K_\Pi^M(k)/2$ ist als abelsche Gruppe isomorph zum kartesischen Produkt der $K_i^M(k)/2$. Die **Stiefel-Whitney-Invariante** einer symmetrischen nicht-ausgearteten Bilinearform $\mathfrak{b}$ isometrisch zur diagonalen Form $\bigoplus_{i=1}^r \langle a_i \rangle$ ist definiert als

$$w(\mathfrak{b}) = \prod_{i=1}^r (1 + \{a_i\}) \in K_\Pi^M(k)/2.$$

$w(\mathfrak{b})$ kann geschrieben werden als $1 + w_1(\mathfrak{b}) + \ldots + w_r(\mathfrak{b})$. $w_i(\mathfrak{b})$ heißt dann ***i*-te Stiefel-Whitney-Invariante** und ist identisch mit der i-ten elementarsymmetrischen Funktion in den Variablen $\{a_1\}, \ldots, \{a_r\}$ aufgefasst als Element von $K_i^M(k)/2$.

4.7. Lemma. $w(\mathfrak{b})$ ist wohldefiniert und eine Einheit in $K_\Pi^M(k)/2$. Es gilt die Whitney-Summenformel:

$$w(\mathfrak{b} \oplus \mathrm{c}) = w(\mathfrak{b}) \cdot w(\mathrm{c}).$$

Beweis. Es genügt, den Fall $r = 2$ zu betrachten. Angenommen es gilt

$$\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \cong \langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle .$$

Wir zeigen

$$\begin{array}{rcll} \{a\} + \{b\} & \equiv & \{\alpha\} + \{\beta\} & \mod 2K_1^M(k) \quad \text{und} \\ \{a\}\{b\} & \equiv & \{\alpha\}\{\beta\} & \mod 2K_1^M(k), \end{array}$$

woraus offensichtlich die Identität $w(\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle) = w(\langle \alpha\rangle \oplus \langle \beta\rangle)$ folgt. Hierzu zeigen wir zunächst, dass $ab \cdot k^{\times 2} = \alpha\beta \cdot k^{\times 2}$ gilt. Seien (e_a, e_b) und (e_α, e_β) orthogonale Basen von $\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ und $\langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle$ mit der Eigenschaft $(\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle)(e_a, e_a) = a$ usw., und sei $M = (m_{ij})$ die Darstellung der Isometrie zwischen den beiden Räumen bezüglich der Basen (e_a, e_b) und (e_α, e_β). Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle)(e_a, e_b) \\ &= (\langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle)(f(e_a), f(e_b)) \\ &= m_{11}m_{21}\alpha + m_{12}m_{22}\beta \end{aligned}$$

und somit $ab = \big(\det M\big)^2\alpha\beta$, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}
ab &= \big(\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle\big)(e_a, e_a) \cdot \big(\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle\big)(e_b, e_b)\\
&= \big(\langle \alpha\rangle \oplus \langle \beta\rangle\big)\big(f(e_a), f(e_a)\big) \cdot \big(\langle \alpha\rangle \oplus \langle \beta\rangle\big)\big(f(e_a), f(e_b)\big)\\
&= (m_{11}^2\alpha + m_{12}^2\beta) \cdot (m_{21}^2\alpha + m_{22}^2\beta)\\
&= (m_{11}m_{21}\alpha)^2 + (m_{11}^2 + m_{12}^2 + m_{21}^2 + m_{22})\alpha\beta + (m_{12}m_{22}\beta)^2\\
&= \big(m_{11}m_{21}\alpha + m_{12}m_{22}\beta\big)^2 + \big(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}\big)^2\alpha\beta.
\end{aligned}$$

Damit folgt direkt die Identität

$$\{a\} + \{b\} \equiv \{\alpha\} + \{\beta\} \mod 2K_1^M(k) \tag{I.4.2}$$

in $K_1^M(k)$. Desweiteren existieren $x, y \in k$ mit $\alpha = ax^2 + by^2$: Für $N = M^{-1}$ gilt

$$\alpha = \big(\langle \alpha\rangle \oplus \langle \beta\rangle\big)(e_\alpha, e_\alpha) = \big(\langle a\rangle \oplus \langle b\rangle\big)\big(f^{-1}(e_\alpha), f^{-1}(e_\alpha)\big) = n_{11}^2 a + n_{12}^2 b.$$

Im Falle $x = 0$ (bzw. $y = 0$) folgt direkt $\{\alpha\} = \{b\}$ (bzw. $\{\alpha\} = \{a\}$) und folglich wegen (I.4.2) $\{\beta\} = \{a\}$ (bzw. $\{\beta\} = \{b\}$) in $K_1^M(k)/2K_1^M(k)$. Andernfalls gilt wegen $1 = \frac{ax^2}{\alpha} + \frac{by^2}{\alpha}$

$$\begin{aligned}
0 &= \big(\{a\} + 2\{x\} - \{\alpha\}\big)\big(\{b\} + 2\{y\} - \{\alpha\}\big)\\
&\equiv \big(\{a\} - \{\alpha\}\big)\big(\{b\} - \{\alpha\}\big)\\
&= \{a\}\{b\} - \{\alpha\}\big(\{b\} - \{a\} - \{\alpha\}\big)\\
&\equiv \{a\}\{b\} - \{\alpha\}\big(\{a\} + \{b\} - \{\alpha\}\big)\\
&\equiv \{a\}\{b\} - \{\alpha\}\big(\{\alpha\} + \{\beta\} - \{\alpha\}\big)\\
&= \{a\}\{b\} - \{\alpha\}\{\beta\} \mod 2K_2^M(k).
\end{aligned}$$

□

Die Stiefel-Whitney-Invariante w kann erweitert werden zu einem Homomorphismus zwischen der additiven Gruppe des Grothendieck-Witt-Rings $\widehat{W}(k)$ und der multiplikativen Einheitengruppe von $K_\Pi^M(k)/2$ mittels

$$w(\mathfrak{b} - \mathrm{c}) \coloneqq w(\mathfrak{b}) \cdot w(\mathrm{c})^{-1}.$$

Die Wohldefiniertheit folgt dabei aus Lemma 4.7. Das Element $w(\mathfrak{b} - \mathrm{c}) \in K_\Pi^M(k)/2$ kann weiterhin eindeutig als formale Summe $\sum w_i(\mathfrak{b} - \mathrm{c})$ mit $w_i(\mathfrak{b} - \mathrm{c}) \in K_i^M(k)/2$ geschrieben werden. Diese Summe ist allerdings nicht mehr notwendigerweise endlich.

4.8. Lemma. Sei $\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^n(\langle 1\rangle - \langle a_i\rangle)$ ein Erzeuger von $\widehat{I}^n(k)$ und sei $t = 2^{n-1}$. Dann gilt

$$w(\mathfrak{b}) = \begin{cases} 1 + \{a_1\}\ldots\{a_n\}\{-1\}^{t-n} & : \ n \text{ ungerade}\\ \Big(1 + \{a_1\}\ldots\{a_n\}\{-1\}^{t-n}\Big)^{-1} & : \ n \text{ gerade.}\end{cases}$$

Beweis. Ausmultiplizieren von $\mathfrak{b}$ liefert

$$\mathfrak{b} = \sum_{\epsilon \in (\mathbb{Z}/2)^{\times n}} (-1)^{n-|\epsilon|}\left\langle a_1^{\epsilon_1}\cdots a_n^{\epsilon_n}\right\rangle.$$

Schreibe $\pm$ für $(-1)^{n-|\epsilon|}$ und $\mp$ für $(-1)^{n+1-|\epsilon|}$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} w(\mathfrak{b}) &= \prod w(\pm \langle a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n} \rangle) \\ &= \prod w(\langle a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n} \rangle)^{\pm} \\ &= \prod \left(1 + \{a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n}\}\right)^{\pm} \\ &= \prod \left(1 + \epsilon_1 \{a_1\} + \ldots + \epsilon_n \{a_n\}\right)^{\pm} \end{aligned}$$

Sei $p \in (\mathbb{Z}/2) [\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ die formale Potenzreihe

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \prod \left(1 + \epsilon_1 x_1 + \ldots + \epsilon_n x_n\right)^{\pm} & : \ n \text{ ungerade} \\ \prod \left(1 + \epsilon_1 x_1 + \ldots + \epsilon_n x_n\right)^{\mp} & : \ n \text{ gerade.} \end{cases}$$

(Beachte, dass $1 + \epsilon_1 x_1 + \ldots + \epsilon_n x_n$ eine Einheit in $(\mathbb{Z}/2) [\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ ist, da das Absolutglied 1 eine Einheit in $\mathbb{Z}/2$ ist.)

Da sowohl für n gerade als auch n ungerade $p(x_1, \ldots, x_n) = 1$ gilt, wannimmer $x_i = 0$ gilt, existiert ein $f \in (\mathbb{Z}/2) [\![x_1, \ldots, x_n]\!]$ mit

$$p(x_1, \ldots, x_n) = 1 + x_1 \cdots x_n f(x_1, \ldots, x_n).$$

Wir möchten eine explizite Darstellung von $f(x, \ldots, x)$. Hierzu betrachten wir die Faktoren

$$1 + \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \epsilon_i\right) x$$

von $p(x, \ldots, x)$. Es gilt $\sum_{i=1}^n \epsilon_i = 0$ oder $= 1$ in $\mathbb{Z}/2$, je nachdem, ob eine gerade oder ungerade Anzahl an ϵ_i den Wert 1 hat. Also interessieren nur jene Faktoren mit $|\epsilon|$ ungerade, wovon es $\frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1} = t$ Stück gibt. Für diese ϵ ergibt sich im Falle n ungerade für das Symbol $\pm$ der Wert 1, ebenso ergibt sich im Falle n gerade für $\mp$ der Wert 1. Daher gilt in beiden Fällen gemäß der Definition von p

$$p(x, \ldots, x) = (1 + x)^t = 1 + x^t$$

und damit wegen $p(x, \ldots, x) = 1 + x^n f(x, \ldots, x)$ und $t = 2^{n-1} \geq n$ (für $n \geq 1$):

$$f(x, \ldots, x) = x^{t-n}.$$

Somit haben wir (unter Benutzung von $\{a_i\}^2 = \{a_i\}\{-1\}$)

$$\begin{aligned} p(\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}) &= 1 + \{a_1\} \ldots \{a_n\} f(\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}) \\ &= 1 + \{a_1\} \ldots \{a_n\} f(\{-1\}, \ldots, \{-1\}) \\ &= 1 + \{a_1\} \ldots \{a_n\} \{-1\}^{t-n} \end{aligned}$$

und

$$w(\mathfrak{b}) = \begin{cases} p(\{a_1\}, \ldots, \{a_n\}) & : \ n \text{ ungerade} \\ \left(p(\{a_1\}, \ldots, \{a_n\})\right)^{-1} & : \ n \text{ gerade,} \end{cases}$$

womit die Aussage bewiesen ist. $\square$

4.9. Korollar. Es gilt $w_1\big(\widehat{I}^n(k)\big) = \ldots = w_{t-1}\big(\widehat{I}^n(k)\big) = 0$. w_t induziert einen Homomorphismus

$$w_t\colon \widehat{I}^n(k)/\widehat{I}^{n+1}(k) \to K_t^M(k)/2$$

mit $\prod_{i=1}^n\big(\langle 1\rangle - \langle a_i\rangle\big) \mapsto \{a_1\}\ldots\{a_n\}\,\{-1\}^{t-n}$.

Beweis. Es gilt $\widehat{I}^{n+1}(k) \subset \ker w_t$, da auch $w_1\big(\widehat{I}^{n+1}(k)\big) = \ldots = w_{2^n-1}\big(\widehat{I}^{n+1}(k)\big) = 0$ und $t = 2^{n-1} \leq 2^n - 1$ (für $n \geq 1$). $\square$

4.10. Bemerkung. Die Stiefel-Whitney-Invarianten sind nicht unabhängig voneinander. Es gilt: Ist $n = rm$ mit $r = 2^k$ und $m \neq 1$ nicht durch 2 teilbar, so gilt $w_n(M) = w_r(M)w_{n-r}(M)$.

Beweisskizze. Es gilt die Produktformel

$$w_r w_s = \sum_{i=0}^{\min(r,s)} \frac{(r+s-i)!}{i!(r-i)!(r-s)!} w_{r+s-i}\,\{-1\}^i\,.$$

Für $r = 2^k$ und $s \equiv 0 \bmod 2r$ reduziert sich diese zu

$$w_r w_s = w_{r+s}.$$ $\square$

4.D. Die Surjektion $K_n^M/2 \to I^n/I^{n+1}$. Sei weiterhin k ein Körper der Charakteristik ungleich 2 und wie gehabt $I(k) \subset W(k)$ das Bild $\widehat{I}(k)$ unter $\widehat{W}(k) \to W(k)$.

4.11. Satz. Es existiert genau ein Homomorphismus

$$s_{n,k}\colon K_n^M(k)/2 \longrightarrow I^n(k)/I^{n+1}(k)$$

mit der Eigenschaft $\{a_1,\ldots,a_n\} \mapsto \langle\!\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\!\rangle \bmod I^{n+1}(k)$. Dabei sind $s_{1,k}$ und $s_{2,k}$ Isomorphismen und für $n \geq 3$ ist $s_{n,k}$ stets Epimorphismus.

In der Tat ist durch die Abbildung $s_{n,k}\colon K_n^M(k)/2 \to I^n(k)/I^{n+1}(k)$ für alle natürlichen Zahlen n ein Isomorphismus gegeben, was Milnor ebenfalls in [**Mil70**] vermutete. Dieses Resultat steht in Verbindung zur klassischen Milnor-Vermutung und wurde von Orlov, Vishik und Voevodsky [**OVV07**] bewiesen.

Beweis. Setze

$$\begin{aligned} k^\times \times \ldots \times k^\times &\xrightarrow{s_{n,k}} I^n(k)/I^{n+1}(k) \\ (a_1,\ldots,a_n) &\longmapsto \big(\langle 1\rangle - \langle a_1\rangle\big)\ldots\big(\langle 1\rangle - \langle a_n\rangle\big) \mod I^{n+1}(k). \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist n-linear, da aufgrund $\langle 1\rangle - \langle a\rangle - \langle b\rangle + \langle ab\rangle = \big(\langle 1\rangle - \langle a\rangle\big)\big(\langle 1\rangle - \langle b\rangle\big) \in I^2(k)$ die folgende Identität gilt:

$$\langle 1\rangle - \langle a\rangle + \langle 1\rangle - \langle b\rangle \equiv \langle 1\rangle - \langle ab\rangle \mod I^2(k).$$

Folglich wird $\big(a_1b_1, b_2, \ldots, b_n\big)$ von $s_{n,k}$ abgebildet auf

$$\begin{aligned} &\big(\langle 1\rangle - \langle a_1b_1\rangle\big) \quad \textstyle\prod_{i=2}^n\big(\langle 1\rangle - \langle a_i\rangle\big) \\ \equiv\ &\big(\langle 1\rangle - \langle a_1\rangle + \langle 1\rangle - \langle b_1\rangle\big) \quad \textstyle\prod_{i=2}^n\big(\langle 1\rangle - \langle a_i\rangle\big) \mod I^{n+1}(k), \end{aligned}$$

woraus sich die Linearität ergibt. Weiter gilt $\big(\langle 1\rangle - \langle a\rangle\big)\big(\langle 1\rangle - \langle 1-a\rangle\big) = 0$ in $W(k)$, sodass die Abbildung einen Homorphismus $K_n^M(k) \to I^n(k)/I^{n+1}(k)$ induziert. Das Bild von $2K_n^M(k)$ darunter ist 0, denn für $a \in k^\times$ sind die Formen $\langle a^2\rangle$ und $\langle 1\rangle$ isometrisch via Isometrie $v \mapsto a^2 v$, daher gilt

$$2\,\{a_1, \dots, a_n\} = \{a_1^2, a_2, \dots, a_n\} \longmapsto \underbrace{\big(\langle 1\rangle - \langle a_1^2\rangle\big)}_{0} \textstyle\prod_{i=2}^n \big(\langle 1\rangle - \langle a_i\rangle\big).$$

Wir erhalten so einen wohldefinierten Homomorphismus $s_{n,k}$. Dieser ist surjektiv, weil das Ideal $I(k)$ additiv von Elementen der Form $\langle 1\rangle - \langle a\rangle$ erzeugt wird.

Sei weiter $t = 2^{n-1}$ und $w_t\colon I^n(k)/I^{n+1}(k) \cong \widehat{I}^n(k)/\widehat{I}^{n+1}(k) \to K_t^M(k)/2$ die Abbildung aus Korollar 4.9. Offensichtlich ist $w_t \circ s_{n,k}$ die Multiplikation mit $\{-1\}^{t-n}$. Für $n = 1, 2$ gilt aber $t = n$, also ist $w_t \circ s_{n,k} = \mathrm{Id}_{K_t^M(k)/2}$, sodass $s_{n,k}$ in diesem Fall auch injektiv ist. □

4.12. Bemerkung. Das letztgenannte Argument zeigt für $n \geq 3$ Folgendes: Ist die Multiplikation mit $\{-1\}^{t-n}$ ein Monomorphismus $K_n^M(k)/2 \to K_t^M(k)/2$, so ist $s_{n,k}$ injektiv und somit bijektiv.

KAPITEL II

Bloch-Kato-Vermutung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Formulierung der Bloch-Kato-Vermutung und der Vorstellung der motivischen Kohomologietheorie, deren Entwicklung maßgeblich zusammenhängt mit dem Ziel, die Bloch-Kato-Vermutung zu beweisen. Am Ende des Kapitels werden verwandte Resultate bzw. Vermutungen erwähnt.

1. Normresthomomorphismus

In diesem Abschnitt sei $m \geq 2$ eine natürliche Zahl und k ein Körper, dessen Charakteristik die Zahl m nicht teilt. Weiter sei k_{sep} der separable Abschluss von k.

1.A. Kummer-Sequenz und Konstruktion der Normresthomomorphismus. Die sogenannte **Kummer-Sequenz**

$$1 \longrightarrow \mu_m(k_{sep}) \longrightarrow k_{sep}^\times \xrightarrow{(-)^m} k_{sep}^\times \longrightarrow 1 \tag{II.1.1}$$

von $\mathrm{Gal}(k_{sep}/k)$-Moduln ist exakt. Dies ist klar, bis auf vielleicht die Surjektivität des dritten Pfeils. Der separable Abschluss ist aber gerade dadurch charakterisiert, dass jedes nichttriviale separable Polynom $f \in k_{sep}[T]$ in Linearfaktoren zerfällt. Da die formale Ableitung von $f = T^m - a \in k_{sep}[T]$ gegeben durch mT^{n-1} aufgrund der Voraussetzung an m nicht identisch null ist, hat f eine Nullstelle in k_{sep} und es existiert somit für jedes Element $a \in k_{sep}$ eine m-te Wurzel in k_{sep}.

Allgemeiner nennt man die exakte Sequenz $1 \longrightarrow \mu_m \longrightarrow \mathbb{G}_\mathrm{m} \xrightarrow{(-)^m} \mathbb{G}_\mathrm{m} \longrightarrow 1$ von étalen Garben über beliebigen Schemata auch *Kummer-Sequenz* (siehe Beispiel 2.9 im Anhang für eine ausführlichere Diskussion). Die Sequenz (II.1.1) entspricht dann gerade der allgemeinen Kummersequenz über $\operatorname{Spec} k$.

Der Galoiskohomologie-Funktor angewendet auf diese Sequenz liefert uns eine lange exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mu_m(k) \longrightarrow k^\times \xrightarrow{(-)^m} k^\times \xrightarrow{\delta} H^1(k, \mu_m) \longrightarrow H^1(k, \mathbb{G}_\mathrm{m}) \longrightarrow \cdots \tag{II.1.2}$$

Wir schreiben $(a) = \delta(a)$ für $a \in k^\times$. Mit der Exaktheit erhalten wir so einen Homomorphismus

$$k^\times / k^{\times m} \longrightarrow H^1(k, \mu_m), \quad a \mapsto (a), \tag{II.1.3}$$

welcher sich mittels des Cup-Produkts der Kohomologiegruppen für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ fortsetzen lässt zu einem Homomorphismus

$$(k^\times / k^{\times m})^{\otimes n} \longrightarrow H^1(k, \mu_m)^{\otimes n} \longrightarrow H^n(k, \mu_m^{\otimes n})$$

Das folgende Lemma stammt ursprünglich von H. Bass und J. Tate und zeigt, dass der Homomorphismus (II.1.3) durch $K_n^M(k)/m$ faktorisiert.

1.1. Lemma. Es gilt $(a) \cup (1-a) = 0$ in $H^2(k, \mu_m^{\otimes 2})$ für jedes Element $a \neq 1$ in $k^\times$.

Beweis. Ist $a \in k^{\times m}$, so ist bereits $(a) \in H^1(k, \mu_m)$ trivial. Sei also $a \in k^\times \setminus k^{\times m}$ und $E = k(\sqrt[m]{a})$. Dann gilt $a \in E^{\times m}$ und folglich ist $(a)_E = \mathrm{res}_{E/k}((a))$ trivial in $H^1(E, \mu_m)$. Um dies auf die Berechnung des Produkts $(a) \cup (1-a)$ anwenden zu können, sei c ein primitives Element von E/k. Es gilt dann $c^m = a$. Aus der Definition der Körpernorm als Determinante der Linksmultiplikation folgt, dass $1 - c \in E^\times$ von $N_{E/k}$ abgebildet wird auf $1 - a$. Die Projektionsformel bezüglich der Korestriktion $H^2(E, \mu_m^{\otimes 2}) \to H^2(k, \mu_m^{\otimes 2})$ besagt schließlich

$$\begin{aligned} (a) \cup (1-a) &= (a) \cup (N_{E/k}(1-c)) \\ &= \mathrm{cor}_{E/k}((a)_E \cup (1-c)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

1.2. Korollar. Der Verbindungshomomorphismus $\delta\colon a \mapsto (a)$ der langen exakten Sequenz (II.1.2) induziert einen Homomorphismus zwischen abelschen Gruppen

$$\eta_{m,k}^n\colon \begin{cases} K_n^M(k)/m \longrightarrow H^n(k, \mu_m^{\otimes n}) \\ \{a_1, \ldots, a_n\} \longmapsto (a_1) \cup \ldots \cup (a_n), \end{cases} \tag{II.1.4}$$

genannt **Normresthomomorphismus** oder **Galois-Symbol**.

Im Falle $n = 0$ nennt man auch die triviale Abbildung $K_0^M(k)/m \to \mathbb{Z}/m$ den Normresthomomorphismus $\eta_{m,k}^0$. Wir bezeichnen die Eigenschaft, dass der Normresthomomorphismus $\eta_{m,k}^n$ bijektiv ist, mit $\mathrm{BK}(n, m, k)$. Unter $\mathrm{BK}(n, m)$ verstehen wir die Eigenschaft, dass $\mathrm{BK}(n, m, k)$ für alle Körper k gilt, deren Charakteristik kein Teiler von m ist.

1.3. Theorem (Normrestisomorphismus-Theorem/ Theorem von Rost-Voevodsky)**.** Für jeden Körper k und jede ganze Zahl $n \geq 0$ und $m \geq 2$ mit der Eigenschaft, dass die Charakteristik von k die Zahl m nicht teilt, ist durch den Normresthomomorphismus

$$\eta_{m,k}^n\colon K_n^M(k)/m \xrightarrow{\simeq} H^n(k, \mu_m^{\otimes n})$$

ein Isomorphismus zwischen abelschen Gruppen gegeben.

Kapitel III widmet sich vollständig der Beweisskizze dieses Theorems. Ein Spezialfall des Normrestisomorphismus-Theorems ist der Satz von Merkurjev-Suslin ($n = 2$, m beliebig). Wir formulieren dieses Resultat mithilfe der Brauergruppe für Körper k, die alle m-ten Einheitswurzeln enthalten, um klassische Aussagen über zentral einfache k-Algebren folgern zu können. Es bezeichne (a, b, ζ) die Normrestalgebra (siehe z.B. [**Ker07**, Abschnitt 14]) zu Elementen $a, b \in k^\times$ und einer primitiven m-ten Einheitswurzel ζ in k.

1.4. Korollar (Satz von Merkurjev-Suslin – Brauer-Version)**.** Sei $m \geq 2$ eine beliebige ganze Zahl und k ein Körper, der eine primitive m-te Einheitswurzel ζ (und somit alle m-ten Einheitswurzeln) enthalte. Dann ist existiert ein Isomorphismus zwischen abelschen Gruppen

$$R^2_{m,k}\colon K^M_2(k)/m \xrightarrow{\simeq} {}_m\mathrm{Br}(k).$$

Er ist gegeben durch $\{a,b\} \bmod m \mapsto (a,b,\zeta)$.

Beweis. Da $\mu_m(k_{sep}) \subset k$ gilt, operiert $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(k_{sep}/k)$ trivial auf $\mu_m(k_{sep})$. Somit ist $\mu_m(k_{sep})^{\otimes 2}$ als Γ_k-Modul isomorph zum trivialen Modul $\mathbb{Z}/m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m \cong \mathbb{Z}/m$. Es folgt

$$H^2(k, \mu_m^{\otimes n}) \cong H^2(k, \mu_m).$$

Wir haben damit das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
K^M_2(k)/m \arrow[r, "\simeq", "\eta^2_{m,k}"'] \arrow[dr, dotted, "R^2_{m,k}"'] & H^2(k, \mu_m^{\otimes 2}) \arrow[r, equal, "\exists\,\zeta \in k \text{ primitive}", "m\text{-Einheitswurzel}"'] & H^2(k, \mu_m) \arrow[dl, "\simeq", "\text{I.2.29}"'] \\
& {}_m\mathrm{Br}(k) &
\end{tikzcd}$$

□

1.5. Beispiel ($n = 1$)**.** Im Falle $n = 1$ ist die Bloch-Kato-Vermutung lediglich eine Umformulierung von Hilberts Satz 90 (Theorem I.2.22). Letzterer besagt $H^1(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = 1$, somit hat die Sequenz (II.1.2) die Gestalt

$$1 \longrightarrow \mu_m(k) \longrightarrow k^\times \xrightarrow{(-)^m} k^\times \xrightarrow{\delta} H^1(k, \mu_m) \longrightarrow 1$$

und δ induziert einen Isomorphismus $k^\times/k^{\times m} \cong H^1(k, \mu_m)$. Der Normresthomomorphismus ist dann die Komposition $K^M_1(k)/m \xrightarrow{\simeq} k^\times/k^{\times m} \cong H^1(k, \mu_m)$, $\{a\} \bmod m \mapsto (a)$.

1.B. Normresthomomorphismus und Korestriktion. An dieser Stelle wollen wir kurz erläutern, dass der Normresthomomorphismus kompatibel ist mit den Korestriktionen aus der Milnor'schen K-Theorie und der Galoiskohomologie. Dieser Unterabschnitt benutzt die Notationen der letzten drei Abschnitte aus Kapitel I. Wenn nicht anders angegeben, bezeichne weiterhin n und $m \geq 2$ natürliche Zahlen und k einen Körper, dessen Charakteristik die Zahl m nicht teilt.

1.6. Satz. Sei E/k eine endliche separable Körpererweiterungen. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K^M_n(E) \arrow[r, "\mathrm{cor}_{E/k}"] \arrow[d, "\eta^n_{m,E}"'] & K^M_n(k) \arrow[d, "\eta^n_{m,k}"] \\
H^n(E, \mu_m^{\otimes n}) \arrow[r, "\mathrm{cor}_{E/k}"'] & H^n(k, \mu_m^{\otimes n}).
\end{tikzcd}$$

Für den Beweis hiervon benötigt man die Existenz von Restabbildungen und Spezialisierungsabbildungen bezüglich $H^n(-,\mu_m^{\otimes n})$ analog zu denen der Milnor'schen K-Theorie aus Abschnitt I.1.D, sowie eine zu Satz I.1.12 analoge exakte Sequenz von Kohomologiegruppen. Für mehr zu diesem Thema siehe [**GS06**, Abschnitt 6.8 & 6.9]. Der Normresthomomorphismus kommutiert dann mit den Restabbildungen.

1.7. Lemma. Sei k ein mit ν diskret bewerteter Körper, sodass die Charakteristik von k und $k(\nu)$ übereinstimmen. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
K_{n+1}^M(k) \arrow[r, "\partial_\nu"] \arrow[d, "\eta_{m,k}^{n+1}"'] & K_n^M(k(\nu)) \arrow[d, "\eta_{m,k(\nu)}^n"] \\
H^{n+1}(k,\mu_m^{\otimes(n+1)}) \arrow[r, "\partial_\nu"'] & H^n(k(\nu),\mu_m^{\otimes n}).
\end{tikzcd}$$

Beweis. Siehe [**GS06**, Prop. 7.5.1].

Hieraus folgert man für den Körper $k(T)$ mit seinen diskreten Bewertungen ν_π sofort, dass die exakte Sequenz von Milnor-Tate und die analoge Sequenz bezüglich Galoiskohomologie verträglich sind mit dem Normresthomomorphismus, d.h. wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_{n+1}^M(k) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{m,k}^{n+1}"'] & K_{n+1}^M(k(T)) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\eta_{m,k(T)}^{n+1}"'] & \bigoplus_{\pi\in\mathcal{P}} K_n^M(k(\nu_\pi)) \arrow[r] \arrow[d, "(\eta_{m,k(\nu_\pi)}^n)"] \arrow[l, bend right, dotted, "\exists\rho"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^{n+1}(k,\mu_m^{\otimes(n+1)}) \arrow[r] & H^{n+1}(k(T),\mu_m^{\otimes(n+1)}) \arrow[r, "\partial"'] & \bigoplus_{\pi\in\mathcal{P}} H^n(k(\nu_\pi),\mu_m^{\otimes n}) \arrow[r] \arrow[l, bend left, dotted, "\exists\rho"] & 0.
\end{tikzcd}$$

Beweis von Satz 1.6. Aufgrund der Funktorialität der Korestriktionen genügt es, den Fall einer einfachen Körpererweiterung E/k zu betrachten. In diesem Fall gilt $E = k(\nu_\pi)$ für ein irreduzibles normiertes Polynom $\pi \in k[T]$ (vgl. Abschnitt 1.F, S. 10). Zu zeigen ist die Identität $\eta_{m,k}^n \circ \mathrm{cor}_{E/k} = \mathrm{cor}_{E/k} \circ \eta_{m,E}^n$. Mit ρ bezeichnen wir die Schnitte der vorletzten horizontalen Pfeile im obigen Diagramm und mit ρ_π die Komposition von ρ nach der offensichtlichen Inklusion von $K_n^M(k(\nu_\pi))$ bzw. $H^n(k(\nu_\pi),\mu_m^{\otimes n})$. Per Definition ist die Korestriktion $\mathrm{cor}_{E/k}$ der Milnor'schen K-Theorie gegeben durch $-\partial_\infty \circ \rho_\pi$. Die gleiche Formel gilt auch für die Korestriktion $H^n(E,\mu_m^{\otimes n}) \to H^n(k,\mu_m^{\otimes n})$ (siehe [**GS06**, Kor. 6.9.4]). Lemma 1.7 besagt für den mit ∂_∞ diskret bewerteten Körper $k(T)$ wegen $k(\nu_\infty) = k$, dass $\eta_{m,k}^n \circ \partial_\infty$ und $\partial_\infty \circ \eta_{m,k(T)}^{n+1}$ identisch sind. Weiter sagt die Kommutativität des Diagramms

$\eta^{n+1}_{m,k(T)} \circ \rho_\pi = \rho_\pi \circ \eta^n_{m,E}$. Folglich

$$\begin{aligned}\eta^n_{m,k} \circ \operatorname{cor}_{E/k} &= -\eta^n_{m,k} \circ \partial_\infty \circ \rho_\pi \\ &= -\partial_\infty \circ \eta^{n+1}_{m,k(T)} \circ \rho_\pi \\ &= -\partial_\infty \circ \rho_\pi \circ \eta^n_{m,E} \\ &= \operatorname{cor}_{E/k} \circ \eta^n_{m,E}.\end{aligned} \qquad \square$$

Im Folgenden zeigen wir anhand eines Beispiels, wie man diese Kommutativität zusammen mit einem Transferargument anwenden kann, um Reduktionsaussagen zu erhalten.

1.8. Satz. Sei E/k eine Körpererweiterung mit zu m teilerfremdem Grad. Dann impliziert $\mathrm{BK}(n,m,E)$ die Eigenschaft $\mathrm{BK}(n,m,k)$.

Beweis. Sei $d = [E:k]$ der Grad der Erweiterung. Aufgrund der Voraussetzung können wir ganze Zahlen p und q wählen mit $pd + qm = 1$. Die modulo m-Version der Korestriktion, $K^M_n(L)/m \to K^M_n(k)/m$, ist wohldefiniert, da nach der Projektionsformel (siehe Theorem I.1.16) $\operatorname{cor}_{L/k}(m \cdot \alpha) = dm \cdot \operatorname{cor}_{L/k}(\alpha)$ gilt. Weiter ist klar, dass die modulo m-Version der Restriktion wohldefiniert ist. Die Komposition

$$K^M_n(k)/m \xrightarrow{\operatorname{res}_{L/k}} K^M_n(L)/m \xrightarrow{\operatorname{cor}_{L/k}} K^M_n(k)/m$$

ist gegeben durch Multiplikation mit d (siehe Theorem I.1.16) und ein Isomorphismus, da durch die Multiplikation mit p eine inverse Abbildungen gegeben ist:

$$pd \cdot \alpha = (1 - qm) \cdot \alpha = \alpha \quad \text{in } K^M_n(k)/m.$$

Genauso ist die Komposition $H^n(k, \mu_\ell^{\otimes n}) \to H^n(L, \mu_\ell^{\otimes n}) \to H^n(k, \mu_\ell^{\otimes n})$ von Korestriktion nach Restriktion gegeben durch Multiplikation mit d (siehe Bemerkung I.2.25) ein Isomorphismus mit Umkehrfunktion gegeben durch Multiplikation mit p, da für Elemente ξ von $\mu_\ell(k_{sep})$ die Identität $\xi^{pd} = \xi^{1-qm} = \xi$ gilt. Somit haben wir mit Satz 1.6 das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
K^M_n(k)/m \arrow[r, "\operatorname{res}_{L/k}"] \arrow[d, "\eta^n_{m,k}"'] \arrow[rr, bend left, dotted, "\simeq"] & K^M_n(L)/m \arrow[r, "\operatorname{cor}_{L/k}"] \arrow[d, "\eta^n_{m,L}"', "\wr"] & K^M_n(k)/m \arrow[d, "\eta^n_{m,k}"] \\
H^n(k, \mu_m^{\otimes n}) \arrow[r, "\operatorname{res}_{L/k}"'] \arrow[rr, bend right, dotted, "\simeq"'] & H^n(L, \mu_m^{\otimes n}) \arrow[r, "\operatorname{cor}_{L/k}"'] & H^n(k, \mu_m^{\otimes n}).
\end{tikzcd}$$

Die Restriktionen sind injektiv und die Korestriktionen surjektiv wegen der Bijektivität der Komposition. Weiter ist der mittlere vertikale Pfeil ein Isomorphismus nach unserer Voraussetzung. Die Kommutativität des linken Quadrats sagt uns dann, dass $\operatorname{res}_{L/k} \circ \eta^n_{m,k} = \eta^n_{m,L} \circ \operatorname{res}_{L/k}$ und somit $\eta^n_{m,k}$ injektiv ist. Genauso besagt die Kommuativität des rechten Quadrats, dass $\operatorname{cor}_{L/k} \circ \eta^n_{m,k} = \operatorname{cor}_{L/k} \circ \eta^n_{m,L}$ und damit $\eta^n_{m,k}$ surjektiv ist. $\square$

1.9. Korollar. Sei n eine natürliche Zahl und $\ell > 2$ eine Primzahl. Angenommen die Bloch-Kato-Vermutung $\mathrm{BK}(n, \ell, k)$ gilt für alle Körper mit der Eigenschaft $\mu_\ell(k_{sep}) \subset k$ (und mit Charakteristik ungleich ℓ). Dann gilt die $\mathrm{BK}(n, \ell, k)$ für alle Körper k (mit Charakteristik ungleich ℓ).

Beweis. Wir wählen einen Körper k, der die Gruppe $\mu_\ell(k_{sep})$ nicht enthält. Sei $L = k(\mu_l)$ die Adjunktion mit einer primitiven Einheitswurzel. Dann ist der Grad $d = [L : k]$ kleiner oder gleich $\ell - 1$ und somit teilerfremd zu ℓ. Die Aussage folgt aus dem vorigem Satz. □

2. Motivische Kohomologie und Kategorien von Motiven

Ein wesentliches Werkzeug im Beweis der Bloch-Kato-Vermutung ist die maßgeblich von V. Voevodsky und A. Suslin entwickelte motivische Kohomologie-Theorie. Die Idee hierzu geht zurück auf Arbeiten von Alexander Beilinson [**Bei87**, **BMS87**, **BGSV90**], Pierre Deligne und Stephen Lichtenbaum [**Lic84**, **Lic90**]. Eine frühe Erwähnung geht zurück auf einen Brief von Beilinson an Soulé [**Bei82**], wo der Verfasser ein Analogon in der algebraischen Geometrie zur Kohomologietheorie topologischer Räume vermutet und bereits einige der später bewiesenen Eigenschaften prognostiziert. Die endgültige Konstruktion, zusammen mit einer sorgfältigen Untersuchung algebraischer Zykel, befindet sich in der Kollektion [**VSF00**] von Arbeiten Voevodskys, Suslins und Friedlanders. Eine weitere nützliche Quelle sind die auf einer Vorlesung Voevodskys basierenden Notizen [**MVW06**]. Hier liegt ein besonderes Augenmerk auf gründlichen Beweisen von Eigenschaften, die die motivische Kohomologietheorie mit klassischen Invarianten aus Algebra und algebraischer Geometrie verknüpfen und damit neue Resultate über jene Invarianten ermöglichen. Ebenfalls empfehlenswert ist der Überblick [**Wei04**] von Weibel. Wie immer sei in diesem Abschnitt k ein Körper. Unter Schemata verstehen wir stets separierte Schemata.

2.A. Übersicht. Ein erster wesentlicher Schritt in Voevodskys Beweis der Bloch-Kato-Vermutung ist eine Neuinterpretation des Normresthomomorphismus als Vergleich zweier sogenannter *motivischer Kohomologiegruppen*. Diese Kohomologietheorie kann man sich zunächst vorstellen als bigraduierten Funktor $H^{*,*}(-, A)$ von der Kategorie der glatten Schemata über k in die Kategorie abelscher Gruppen, wobei A ebenfalls eine abelsche Gruppe bezeichnet. Man benötigt allerdings motivische Kohomologie für allgemeinere Objekte als glatte Schemata. Eine erste Verallgemeinerung ist der Übergang zur additiven Kategorie der *Korrespondenzen* über k, bei dem die Menge der Morphismen vergrößert wird. Wir bezeichnen diese Kategorie mit Cor/k. Anschließend betrachtet man die Kategorie $\mathrm{PST}(k)$ von *Prägarben mit Transfers* über k, welche die Funktorkategorie von Funktoren der Form $(\mathrm{Cor}/k)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ ist und eine natürliche Erweiterung von Cor/k darstellt. Die Kategorie $\mathrm{PST}(k)$ ist abelsch und hat genug injektive Objekte. Wir sind besonders interessiert an Garben in Nisnevich-Topologie. Die Vergarbung $\mathrm{PST}(k) \to \mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$ von Prägarben mit Transfers zu Nisnevich-Garben mit Transfers ist linksadjungiert zur Inklusion $\mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k) \to \mathrm{PST}(k)$ und exakt. Die Kategorie $\mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$ ist ebenfalls abelsch und hat genug injektive Objekte. Somit können wir die derivierte Kategorie von nach oben beschränkten Komplexen von Nisnevich-Garben bilden, die wir mit mit $D^{-}\mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$ bezeichnen. Motivische Kohomologiefunktoren sind dann im Wesentlichen Hyperkohomologiefunktoren bezüglich speziellen Komplexen $A(n)$ in $D^{-}\mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$. Desweiteren haben wir auf $D^{-}\mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$ einen Homotopiebegriff. Mit $\mathrm{DM}^{-}_{\mathrm{eff}}(k)$ bezeichnen wir die volle Unterkategorie von $D^{-}\mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$ bestehend aus Komplexen mit homotopie-invarianten Kohomologiegarben. Alternativ kann man $\mathrm{DM}^{-}_{\mathrm{eff}}(k)$ als Lokalisierung von $D^{-}\mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$ nach sogenannten $\mathbb{A}^1$-schwachen Äquivalenzen gewinnen, worauf wir aber nicht weiter eingehen. Man nennt $\mathrm{DM}^{-}_{\mathrm{eff}}(k)$ auch *Kategorie effektiver Motive*. Genauso wie $D^{-}\mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$ existiert auf $\mathrm{DM}^{-}_{\mathrm{eff}}(k)$ ein Tensorprodukt, sodass diese Kategorien die Struktur einer *tensortriangulierten Kategorie* besitzen.

Wie schon angedeutet, wollen wir die Kategorien Cor/k, $\mathrm{PST}(k)$, $D^{-}\mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$ und $\mathrm{DM}^{-}_{\mathrm{eff}}(k)$ als Erweiterungen von Sm/k ansehen. Der klassische Begriff vom Graph einer Funktion sowie die darstellbaren Funktoren in Cor/k führen uns zu einem Funktor $\mathrm{Sm}/k \to \mathrm{PST}(k)$, $X \mapsto \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$. Desweiteren ist $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ eine Nisnevich-Garbe mit Transfers. Man schreibt $M(X)$ für das Bild von $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ (aufgefasst als trivialer Komplex in $D^{-}\mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$, d.h. konzentriert in Grad null) in $\mathrm{DM}^{-}_{\mathrm{eff}}(k)$ unter der $\mathbb{A}^1$-Lokalisierung und nennt es das *Motiv* von X. Die motivischen Kohomologiefunktoren $H^{*,*}(-,A)\colon \mathrm{Sm}/k \to \mathbf{Ab}$ sind dann darstellbar in $\mathrm{DM}^{-}_{\mathrm{eff}}(k)$:

$$H^{p,q}(X,A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{-}_{\mathrm{eff}}(k)}\big(M(X), A(q)[p]\big).$$

Daher können wir motivische Kohomologie auf beliebige Motive $M \in \mathrm{DM}^{-}_{\mathrm{eff}}(k)$ erweitern, indem wir $H^{p,q}(M,A)$ als $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^{-}_{\mathrm{eff}}(k)}(M, A(q)[p])$ definieren. Eine weitere Variante, die im Beweis der Bloch-Kato-Vermutung benötigt wird, ist die formale Erweiterung von motivischer Kohomologie auf *simpliziale Schemata*.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sm}/k \arrow[r, "X \mapsto X"] \arrow[d, dotted, "X \mapsto M(X)"'] & \mathrm{Cor}/k \arrow[r, "X \mapsto \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)"] & \mathrm{PST}(k) \arrow[d, shift right, "\text{Vergarbung}"'] \\
\mathrm{DM}^{-}_{\mathrm{eff}}(k) \arrow[r, hook, shift right, "\substack{\text{Komplexe mit}\\ \text{homotopie-invarianter}\\ \text{Kohomologiegarbe}}"'] & D^{-}\mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k) \arrow[l, shift right, "\substack{\text{Lokalisierung nach}\\ \mathbb{A}^1\text{-schwachen}\\ \text{Äquivalenzen}}"'] & \mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k) \arrow[l] \arrow[u, hook, shift right]
\end{tikzcd}$$

2.B. Kategorie der endlichen Korrespondenzen. In diesem Unterabschnitt erweitern die Kategorie Sm/k der glatten Schemata über k zur Kategorie der endlichen Korrespondenzen über k, indem wir die Klasse der Morphismen „vergrößern“. Eine grobe Veranschaulichung dieses Vorgangs ist der Übergang von Abbildungen $M \to N$ zwischen Mengen hin zu allgemeinen Relationen $\subset M \times N$.

2.1. Definition. Eine **elementare Korrespondenz** zwischen glatten Schemata X und Y ist ein reduziertes irreduzibles abgeschlossenes Unterschema $Z \subset X \times_k Y$, sodass die Projektion von Z auf X ein endlicher Morphismus ist, der surjektiv auf eine Zusammenhangskomponente von X abbildet. Eine **endliche Korrespondenz** zwischen X und Y ist eine formale Linearkombination über $\mathbb{Z}$ von elementaren Korrespondenzen zwischen X und Y. Die Gruppe der endlichen Korrespondenzen zwischen X und Y bezeichnen wir von $\mathrm{Cor}(X, Y)$ – sie ist also die freie abelsche Gruppe erzeugt von elementaren Korrespondenzen.

Das nachfolgende Beispiel verdeutlicht die Rolle von endlichen Korrespondenzen als Verallgemeinerung von Morphismen zwischen Schemata.

2.2. Beispiel & Bemerkung (Graph eines Morphismus zwischen Schemata)**.** Ist $f\colon X \to Y$ ein Morphismus zwischen glatten Schemata und ist X zusammenhängend, so ist das assoziierte Unterschema zu $\Gamma_f = \Gamma_f^X = \{(x, f(x) \mid x \in X\} \subset X \times_k Y$ eine elementare Korrespondenz. Ist X ein allgemeines Schema und $X = \coprod X_i$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten, so ist Γ_f definiert als die Summe $\sum \Gamma_{f|_{X_i}}^{X_i}$ über Graphen der Komponenten.

2.3. Definition & Satz (Kategorie Cor/k)**.** Die **Komposition von endlichen Korresponendenzen** $\mathrm{Cor}(Y, Z) \times \mathrm{Cor}(X, Y) \to \mathrm{Cor}(X, Z)$ ist folgendermaßen definiert: Für elementare Korrespondenzen $V \in \mathrm{Cor}(X, Y)$ und $W \in \mathrm{Cor}(Y, Z)$ sei $W \circ V$ der Pushforward der Projektion $X \times_k Y \times_k Z \to X \times_k Z$ (bzgl. algebraischer Zykel) vom Schnittprodukt $(V \times_k Z) \cdot (X \times_k W)$ (siehe [**Ful98**] für eine ausführliche Darstellung der Schnitttheorie und der Theorie algebraischer Zykel). Damit ist $W \circ V$ eine endliche Korrespondenz zwischen X und Z (siehe [**MVW06**, Lemma 1.4]). Der Graph $\Gamma_{\mathrm{Id}_X} \in \mathrm{Cor}(X, X)$ ist bzgl. der Komposition von Korrespondenzen die Identität. Es folgt, dass durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\,\mathrm{Cor}/k &= \mathrm{Ob}\,\mathrm{Sm}/k \\ \mathrm{Mor}_{\mathrm{Cor}/k}(X, Y) &= \mathrm{Cor}(X, Y) \end{aligned}$$

eine Kategorie gegeben ist. Sie ist additiv mit dem Coprodukt $X \oplus Y = X \amalg Y$ und Nullobjekt $0 = \emptyset$. Weiter ist Cor/k eine symmetrische monodiale Kategorie bezüglich des Produkts $X \otimes Y = X \times_k Y$. Durch

$$\mathrm{Sm}/k \longrightarrow \mathrm{Cor}/k, \quad X \longmapsto X, \quad \left(X \xrightarrow{f} Y\right) \longmapsto \Gamma_f$$

ist ein treuer Funktor gegeben.

2.C. Kategorie der Prägarben mit Transfers. Eine nächste Erweiterung ist der Übergang zu additiven Prägarben auf Cor/k, also additiven Funktoren $(\mathrm{Cor}/k)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$. Diese sind Prägarben über der Kategorie der glatten Schemata über k mit zusätzlichen Homomorphismen von abelschen Gruppen, den sogenannten Transferabbildungen $F(Y) \to F(X)$ für jede endliche Korrespondenz in $\mathrm{Cor}(X, Y)$ und für alle glatten Schemata X, Y.

2.4. Definition. Die Funktorkategorie $\mathrm{PST}(k)$ bestehend aus additiven Prägarben auf Cor/k als Objekten und natürlichen Transformationen als Morphismen heißt **Kategorie der Prägarben mit Transfers**. Sie ist abelsch und hat genug injektive und projektive Objekte (siehe [**Wei94**, Aufgabe 2.3.7 & 2.3.8]).

Eine besondere Rolle spielen die in der Kategorie Cor/k von glatten Schemata X dargestellten Funktoren $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cor}/k}(-, X)$, d.h. gegeben durch $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)(U) = \mathrm{Cor}(U, X)$ und

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)(\psi)\colon \mathrm{Cor}(U,X) &\longrightarrow \mathrm{Cor}(V,X) \\ \phi &\longmapsto \phi \circ \psi \end{aligned}$$

für $\psi \in \mathrm{Cor}(V, U)$. Der Funktor $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ ist ein Objekt von $\mathrm{PST}(k)$. Mit dem Yoneda-Lemma folgt sofort, dass für Prägarben mit Tranfers F die Formel $\mathrm{Hom}_{\mathrm{PST}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X), F) \cong F(X)$ für alle $X \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Sm}/k$ gilt. Für $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathrm{Spec}\, k)$ schreiben wir kurz $\mathbb{Z}$. Diese Prägarbe ist die konstante Zariski-Garbe auf Sm/k mit Transferabbildungen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \mapsto \deg(W) \cdot a$ für elementare Korrespondenzen $W \in \mathrm{Cor}(V, U)$, wobei $\deg(W)$ der Grad von W in V ist. Wir können $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(-)$ als Funktor $\mathrm{Cor}/k \to \mathrm{PST}(k)$ betrachten. Wie üblich für Hom-Bifunktoren ist $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\psi)$ für eine Korrespondenz $\psi \in \mathrm{Cor}(X, Y)$ die natürliche Transformation $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)(U) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y)(U)$, $\phi \mapsto \psi \circ \phi$. Wir haben also Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Sm}/k & \xrightarrow{\Gamma} & \mathrm{Cor}/k & \xrightarrow{\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}} & \mathrm{PST}(k) \\ X & \longmapsto & X & \longmapsto & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \end{array}$$

2.5. Definition. Sei $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\, k[x]$ und $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Die kanonischen Inklusionen

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\times(n-1)} &\xrightarrow{\iota_i} \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\times n} \\ (x_1, \ldots, x_{n-1}) &\longmapsto (x_1, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

induzieren natürliche Transformationen

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\times(n-1)}) \xrightarrow{\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\iota_i)} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\times n}) \,.$$

Sei Φ die Abbildung $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\iota_i)$ von $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\times(n-1)})$ nach $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\times n})$. Wir definieren $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})$ als den Kokern von Φ.

2.6. Bemerkung. Der Definition von $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})$ liegt eine allgemeinere Konstruktion von Funktoren $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}((X_1, x_1) \wedge \ldots \wedge (X_n, x_n))$ für punktierte Schemata $(X_i, \mathrm{Spec}\, k \xrightarrow{x_i} X_i)$ zugrunde (siehe [**MVW06**, Def. 2.12]). Dabei ist $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}((X_1, x_1) \wedge \ldots \wedge (X_n, x_n))$ stets ein projektives Objekt in $\mathrm{PST}(k)$ ([**MVW06**, Lemma 2.13]).

2.D. Simpliziale Prägarben, Komplexe von Prägarben und Kohomologieprägarbe. In diesem Unterabschnitt wollen wir mit jeder Prägarbe (mit Transfers) F eine simpliziale Prägarbe (mit Transfers) $C_\bullet F$ und einen Kettenkomplex $C_* F$ von Prägarben (mit Transfers) assoziieren. Hierzu sei Δ die Simplexkategorie (siehe [**Wei94**, S. 254]), Δ^n das affine Schema $\operatorname{Spec} k[x_0, \dots, x_n]/\big(\sum x_i = 1\big)$ und $\Delta^\bullet \colon \Delta \to \mathrm{Sm}/k$ das kosimpliziale Schema gegeben durch $[n] \mapsto \Delta^n$ und Flächenabbildungen $\partial_i^n \colon \Delta^n \to \Delta^{n+1}$ induziert von den Inklusionen $(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, 0, \dots, x_n)$. Zu $U \in \mathrm{Sm}/k$ und $F \in \mathrm{PShv}(\mathrm{Sm}/k)$ ist $F(U \times \Delta^\bullet)$ eine simpliziale abelsche Gruppe, d.h. ein Funktor

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{\mathrm{op}} \arrow[rr, "F(U\times\Delta^\bullet)"] \arrow[dr, dotted, "U\times\Delta^\bullet"'] & & \mathbf{Ab} \\
& (\mathrm{Sm}/k)^{\mathrm{op}} \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Mit $C_\bullet F \colon (\mathrm{Sm}/k)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}_\bullet$ bezeichnen wir die Prägarbe simplizialer abelscher Gruppen gegeben durch $U \mapsto F(U \times \Delta^\bullet)$. Alternativ kann man $C_\bullet F$ auffassen als simpliziales Objekt in der Kategorie $\mathrm{PShv}(\mathrm{Sm}/k)$ (bzw. $\mathrm{PST}(k)$), d.h. als Funktor $\Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{PShv}(\mathrm{Sm}/k)$ (bzw. $\Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{PST}(k)$), $[n] \longmapsto \big(U \mapsto F(U \times \Delta^n)\big)$.

Mit $C_* F$ bezeichnen wir den nach unten beschränkten Kettenkomplex $(C_\bullet F, d_\bullet)$ von Prägarben (mit Transfers), bei dem die Randabbildungen $d_n \colon C_n F \to C_{n-1} F$ die natürlichen Transformationen sind, welche sich durch alternierende Summen induziert von Flächenabbildungen ergeben:

$$\begin{aligned} d_n(U) \colon F(U \times \Delta^n) &\longrightarrow F(U \times \Delta^{n-1}) \\ a &\longmapsto \sum_{i=0}^{n} F(\mathrm{Id}_U \times \partial_i^{n-1})(a) \end{aligned}$$

Diese Konstruktion ist ein algebraisches Pendant zum singulären Kettenkomplex aus der Topologie. Die beiden Funktoren $F \mapsto C_* F$ und $F \mapsto C_\bullet F$ sind exakt. Weiter sei $C^* F$ der zu $C_* F$ zugehörige Kokettenkomplex, d.h. $C^n F = C_{-n} F$, $d^n = d_{-n}$. Wir schreiben $\mathrm{Kom}^- \, \mathrm{PST}(k)$ für die Kategorie der nach oben beschränkten Kokettenkomplexe von Prägarben.

Da die Kategorie $\mathrm{PST}(k)$ abelsch ist, können wir Kohomologiegruppen von Kokettenkomplexen in $\mathrm{PST}(k)$ definieren (siehe [**GM96**, Definition II.6.2]). Die **Kohomologieprägarbe** einer Prägarbe F ist definiert als $h_n(F) = \mathrm{H}^{-n}(C^* F)$. Sie ist die Prägarbe abelscher Gruppen gegeben durch

$$U \longmapsto \frac{\ker d^{-n}(U)}{\operatorname{im} d^{-n-1}} = \frac{\ker d_n(U)}{\operatorname{im} d_{n+1}} \subset F(U \times \Delta^n).$$

Ist F eine Prägarbe mit Transfers, so auch $h_n(F)$.

2.E. Zariski-, Nisnevich- und étale Topologie auf Schemata. In Abschnitt 2.B haben wir mit der étalen Topologie auf Schemata bereits ein erstes für unsere Zwecke bedeutsames Beispiel einer Grothendieck-Topologie kennengelernt. An dieser Stelle sollen kurz ein paar Worte zu Zariski- und Nisnevich-Topologie gesagt werden. Die Zariski-Topologie ist die „natürliche Topologie“, mit der affine Schemata definiert werden (siehe [**Sha94**, V.1.3]). Sie ist eine Topologie im klassischen Sinne.

2.7. Definition (Kleiner Zariski-Situs von X)**.** Der **kleine Zariski-Situs** $\boldsymbol{X_{\mathrm{Zar}}}$ eines glatten Schemas X besteht aus der Kategorie Zar/X Zariski-offener Teilmengen von X mit Inklusionen als Morphismen zusammen mit Zariski-offenen Überdeckungen von Zariski-offenen Teilmengen $U \subset X$ im Sinne klassischer topologischer Räume.

Die Zariski-Topologie ist sehr grob, d.h. es gibt „wenig“ offene Mengen. Da die Inklusionsabbildungen $U \hookrightarrow V$ Zariski-offener Teilmengen étale Morphismen sind, kann die étale Topologie als eine Verfeinerung betrachtet werden. Eine weitere Verfeinerung der Zariski-Topologie, die gröber ist als die étale Topologie, wurde von Yevsey Nisnevich [**Nis89**] unter dem Namen „komplett zerfallene Topologie“ (engl. *completely decomposed*) eingeführt.

2.8. Definition (Kleiner Nisnevich-Situs von X)**.** Ein **Nisnevich-Morphismus** ist ein étaler Morphismus $f\colon Y \to X$ zwischen Schemata, sodass für jeden Punkt $x \in X$ ein Punkt $y \in Y$ existiert, für den die zu f zugehörige Abbildung zwischen Restklassenkörpern $k(x) \to k(y)$ ein Isomorphismus ist. Der **kleine Nisnevich-Situs** $\boldsymbol{X_{\mathrm{Nis}}}$ eines glatten Schemas X besteht aus der Kategorie Nis/X von Nisnevich-Morphismen über X zusammen mit Nisnevich-Überdeckungen, d.h. Überdeckungen im Sinne von Definition 1.1 im Anhang durch Nisnevich-Morphismen.

Offensichtlich sind auf natürliche Art und Weise Morphismen zwischen Siten

$$X_{\mathrm{et}} \longrightarrow X_{\mathrm{Nis}} \longrightarrow X_{\mathrm{Zar}}$$

gegeben durch die stetigen Einbettungs-Funktoren $\mathrm{Zar}/X \to \mathrm{Nis}/X \to \mathrm{Et}/X$.

2.F. Garben mit Transfers auf glatten Schemata. Mit τ bezeichnen wir eine Grothendieck-Topologie definiert auf der Kategorie der Schemata, z.B. Zariski-, Nisnevich- oder étale Topologie. Im Kontext dieses Abschnitts verstehen wir unter einer Garbe auf Sm/k bezüglich τ einen Funktor $F\colon (\mathrm{Sm}/k)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$, sodass für jedes Schema $X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sm}/k)$ die Einschränkung $F|_{X_\tau}$ von F auf $\mathrm{Cat}\, X_\tau$ eine Garbe auf dem kleinen Situs X_τ im Sinne von Definition 1.3 im Anhang darstellt. Diese Definition ist eng verknüpft mit dem Begriff einer Garbe auf dem großen τ-Situs von $\mathrm{Spec}\, k$. Mit $\mathrm{Shv}_\tau(k)$ bezeichnen wir die volle Unterkategorie von $\mathrm{PShv}(k)$ bestehend aus solchen Garben. Weiter sei $\mathrm{ST}_\tau(k)$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{PST}(k)$ bestehend aus Prägarben mit Transfers F, die aufgefasst als Funktoren auf $(\mathrm{Sm}/k)^{\mathrm{op}}$ Objekte von $\mathrm{Shv}_\tau(k)$ sind. Anschaulich gesprochen ist also “$\mathrm{ST}_\tau(k) = \mathrm{Shv}_\tau(k) \cap \mathrm{PST}(k)$“.

2.G. Motivischer Komplex $\mathbb{Z}(n)$. Sei $n \geq 0$ eine ganze Zahl. Mit $\mathbb{Z}(n)$ bezeichnen wir den Komplex von Prägarben $C^*\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})[-n]$, d.h. $\mathbb{Z}(n)^i = C^{i-n}\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n}) = C_{n-i}\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})$. In der Literatur ist dieser Komplex oft angegeben als Kettenkomplex $C_*\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})[-n]$, wird aber in der Regel als Kokettenkomplex $\mathbb{Z}(n) = (\mathbb{Z}(n)^\bullet, d^\bullet)$ aufgefasst.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & \mathbb{Z}(n)^{-1} & \longrightarrow & \mathbb{Z}(n)^0 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathbb{Z}(n)^n & \longrightarrow 0 \\
& \| & & \| & & \| & \\
& C^{-n-1}\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n}) & & C^{-n}\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n}) & & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n}) &
\end{array}$$

Für eine abelsche Gruppe A sei $A(n)$ der Komplex $\mathbb{Z}(n) \otimes_{\mathbb{Z}} A$, den man durch eintragsweises Tensorieren über $\mathbb{Z}$ erhält. Per Konvention sei $A(n)$ der triviale Komplex für $n < 0$. Wir haben folgende Eigenschaften:

1) $A(n)^i = 0$ für alle $i > n$.
2) $A(0)$ ist der Komplex $(\cdots \xrightarrow{\mathrm{Id}} A \xrightarrow{0} A \to 0)$, wobei A die konstante Prägarbe $U \mapsto A$ ist. Die Dold-Kan-Korrespondenz ([**Wei94**, Thm. 8.4.1]) besagt, dass dieser Komplex quasiisomorph ist zum trivialen Komplex $(0 \to \underset{0}{A} \to 0)$.
3) $\mathbb{Z}(1) = C^*\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge 1})[-1]$ ist quasiisomorph zu $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}[-1]$ (siehe [**MVW06**, Thm. 4.1]). Hierbei ist $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}[-1]$ der triviale Komplex mit der Prägarbe $U \mapsto \mathcal{O}_U(U)^\times$ an der Stelle 1.

2.H. Motivische Kohomologiegruppe. Sei X ein glattes Schema. Die Komplexe $\mathbb{Z}(n)$ und $A(n)$ sind Komplexe von Garben über k in Zariski-Topologie, also Objekte in $\mathrm{Kom}^- \mathrm{Shv}_{\mathrm{Zar}}(k)$, bzw. in der derivierten Kategorie $D^-\mathrm{Shv}_{\mathrm{Zar}}(k)$ (siehe [**MVW06**, Lemma 3.2 und Kor. 3.3]). Wir möchten die motivischen Kohomologiegruppen definieren als Hyperkohomologiegruppen der Komplexe $A(n)$ in Zariski-Topologie (vergleiche Abschnitt 3.D im Anhang). Hierfür benötigen wir rechtsderivierte Funktoren auf der derivierten Kategorie von Komplexen, die nicht nach unten beschränkt sind. Nach Weibel [**Wei94**, Kor. 10.5.11] existieren rechtsderivierte Funktoren $\boldsymbol{R}F$ auf ganz $D(\mathcal{A})$, falls der Funktor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von endlicher kohomologischen Dimension ist (siehe auch [**SV99**, S. 4ff.]). Dies ist der Fall für den Funktor der globalen Schnitte $\Gamma_{X_{\mathrm{Zar}}}\colon \mathrm{Shv}_{\mathrm{Zar}}(k) \to \mathbf{Ab}$, da X endlich dimensional ist und dann nach Theorem 3.6.5 in A. Grothendiecks Tohoku-Artikel [**Gro57**] $H^n(X_{\mathrm{Zar}}, \mathcal{F}) = 0$ für alle $n > \dim X$ gilt.

2.9. Definition. Für alle abelschen Gruppen A und $p, q \in \mathbb{Z}$ sind die **motivische Kohomologiegruppen** $H^{p,q}(X, A)$ definiert als p-te Hyperkohomologiegruppe von X_{Zar} des Komplex $A(q)|_{X_{\mathrm{Zar}}}$, also

$$H^{p,q}(X, A) = \mathbb{H}^p_{\mathrm{Zar}}(X, A(q)|_{X_{\mathrm{Zar}}}).$$

Weiter schreibt man kurz $H^{p,q}(k, A)$ für $H^{p,q}(\operatorname{Spec} k, A)$.

2.10. Bemerkung. Die motivische Kohomologie $H^{p,q}(-, A)$ ist kontravariant funktoriell in der ersten Komponente (siehe [**MVW06**, Bem. 3.7]) und daraus resultierend (kovariant) funktoriell bezüglich dem zugrundeliegenden Körper: Ist L/k eine Körpererweiterung, so induziert der zur Inklusion $k \hookrightarrow L$ zugehörige Morphismus $X_L = X \times_k \operatorname{Spec} L \to X$ eine natürliche Abbildung $H^{p,q}(X, A) \longrightarrow H^{p,q}(X_L, A)$.

Desweiteren ist motivische Kohomologie in niedrigen Dimensionen p (abhängig vom Gewicht q) konzentriert.

2.11. Lemma. [**MVW06**, Thm. 3.6] Es gilt für jedes glatte Schema X und jede abelsche Gruppe A

$$H^{p,q}(X, A) = 0 \quad \text{für jede Zahl } p > q + \dim X.$$

Da $\operatorname{Spec} k$ nulldimensional ist, haben wir insbesondere $H^{p,q}(k, A) = 0$ für alle $p > q$.

Das Resultat folgt aus der Identität $H^n(X_{\mathrm{Zar}}, \mathcal{F}) = 0$ für $n > \dim X$ unter Benutzung der Spektralsequenz, die Garben- mit Hyperkohomologie verbindet.

2.I. Étale und Nisnevich-motivische Kohomologie. Es existiert auch eine étale Version von motivischer Kohomologie. Die motivischen Komplexe $A(n)$ sind nämlich auch Komplexe von Garben in étaler Kohomologie (siehe [**MVW06**, Kor. 6.4 & Lemma 6.2]). Desweiteren hat die Kategorie $\mathrm{ST}_{\mathrm{et}}(k)$ genug injektive Elemente nach [**MVW06**, Prop. 6.19].

2.12. Definition. Für alle abelschen Gruppen A und $p, q \in \mathbb{Z}$ sind die **étalen motivische Kohomologiegruppen** $H^{p,q}_{\mathrm{et}}(X, A)$ definiert als p-te Hyperkohomologiegruppe von X_{et} des Komplex $A(q)|_{X_{\mathrm{et}}}$, also

$$H^{p,q}_{\mathrm{et}}(X, A) = \mathbb{H}^p_{\mathrm{et}}(X, A(q)|_{X_{\mathrm{et}}}).$$

Desweiteren schreiben wir wieder kurz $H^{p,q}_{\mathrm{et}}(k, A)$ für $H^{p,q}_{\mathrm{et}}(\operatorname{Spec} k, A)$.

Da étale Garben insbesondere Garben in Nisnevich-Topologie sind und die Kategorie $\mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$ mit demselben Argument wie $\mathrm{ST}_{\mathrm{et}}(k)$ genug injektive Elemente enthält (vgl. [**MVW06**, Thm. 13.1]), können wir auch die Hyperkohomologiegruppen $\mathbb{H}^p_{\mathrm{Nis}}(X, A(q)|_{X_{\mathrm{Nis}}})$ bilden. Diese stimmen für Komplexe in $\mathrm{Kom}^- \mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$ mit homotopie-invarianten Kohomologiegarben mit den Zariski-Hyperkohomologiegruppen überein (siehe [**MVW06**, Prop. 13.10]). Mit [**MVW06**, Kor. 2.19] folgt insbesondere:

2.13. Satz. Es gilt $H^{p,q}(X, A) = \mathbb{H}^p_{\mathrm{Zar}}(X, A(q)|_{X_{\mathrm{Zar}}}) = \mathbb{H}^p_{\mathrm{Nis}}(X, A(q)|_{X_{\mathrm{Nis}}})$ für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und alle abelschen Gruppen A.

Nisnevich-Garben haben gegenüber Zariski-Garben einige technische Vorteile. So ist z.B. die Mayer-Vietoris-Sequenz $0 \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(U \cap V) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(U) \oplus \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(V) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \to 0$ für Zariski-offene Überdeckungen $X = U \cup V$ exakt in der Kategorie $\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(k)$ (siehe [**Fri05**, 5]). Desweiteren haben Vergarbungen in Nisnevich-Topologie (im Gegensatz zur Vergarbungen in Zariski-Topologie) von Prägarben mit Transfers auf natürliche Art und Weise die Struktur von Garben mit Transfers, d.h. ist $F \in \mathrm{PST}(k)$, so gilt $F_{\mathrm{Nis}} \in \mathrm{ST}_{\mathrm{Nis}}(k)$ (siehe [**MVW06**, Thm. 13.1]).

2.14. Lemma. Es gilt für jede glatte Varietät X über k und alle $p, q \geq 0$

$$H^{p,q}(X, \mathbb{Q}) = H^{p,q}_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Q}).$$

Beweis. Siehe [**Voe00**, Prop. 5.28] oder [**Voe03a**, Lem. 6.8].

2.15. Beispiel (Motivische Kohomologie im Gewicht $q = 0$ und $q = 1$)**.** Sei ℓ eine Primzahl ungleich der Körpercharakteristik von k und $X \in \mathrm{Sm}/k$. Dann haben wir im Gewicht null die

Identitäten

$$H^{p,0}(X,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}(X) & : \ p=0 \\ 0 & : \ \text{sonst}, \end{cases}$$

$$H^{p,0}(X,\mathbb{Z}/\ell) = \begin{cases} (\mathbb{Z}/\ell)(X) & : \ p=0 \\ 0 & : \ \text{sonst}, \end{cases}$$

und im Gewicht $q=1$ haben wir

$$H^{p,1}(X,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathcal{O}_X(X)^\times & : \ p=1 \\ \operatorname{Pic}(X) & : \ p=2 \\ 0 & : \ \text{sonst}, \end{cases}$$

$$H^{p,1}(X,\mathbb{Z}/\ell) = \begin{cases} \mu_\ell(X) & : \ p=0 \\ H^1_{\mathrm{et}}(X,\mu_\ell) & : \ p=1 \\ \operatorname{Pic}(X)/\ell & : \ p=2 \\ 0 & : \ \text{sonst}. \end{cases}$$

Man beachte, dass $\mathbb{Z}/\ell(-)$ die konstante Garbe der abelschen Gruppe $\mathbb{Z}/\ell$ bezeichne (genauso wie $\mathbb{Z}(-)$ die entsprechende konstante Garbe bezeichnet), wohingegen mit $\mu_\ell(-)$ die Garbe der Einheitswurzeln notiert ist. Mit $\operatorname{Pic}(X)$ bezeichnen wir hier die Picard-Gruppe von X. Sie kann definiert werden als die Garbenkohomologiegruppe $H^1(X,\mathbb{G}_\mathrm{m})$.

2.J. Verbindung zu *K*-Theorie und étaler Kohomologietheorie. Die folgenden Sätze sind im Beweis der Bloch-Kato-Vermutung von besonderer Wichtigkeit. Sie zeigen die Beziehung der motivischen Kohomologietheorie zur Milnor´schen K-Theorie und étalen Kohomologietheorie.

2.16. Satz. Es gilt $H^{n,n}(k,\mathbb{Z}) \cong K_n^M(k)$ für jede ganze Zahl $n \geq 0$ und jeden Körper k.

Beweisskizze. Der folgende Überblick orientiert sich an [**MVW06**, Vortrag 5]. Wir schreiben $H^n(F) = H^{n,n}(F,\mathbb{Z})$ für jeden Körper F. Der Beweis ist folgendermaßen strukturiert:

1) Nachweis der Existenz einer Restriktion $\operatorname{res}_{E/k}\colon H^n(k) \to H^n(E)$ und einer Korestriktion $\operatorname{cor}_{E/k}\colon H^n(E) \to H^n(k)$ für alle endlichen Erweiterungen E/k, welche die wichtigsten Eigenschaften der Korestriktion $K_n^M(E) \to K_n^M(k)$ erfüllt, so z.B.
   (a) Für $n=0$ ist $\operatorname{cor}_{E/k}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die Multiplikation mit $[E:k]$.
   (b) Für $n=1$ ist $\operatorname{cor}_{E/k}\colon E^\times \to k^\times$ die Körpernorm $N_{E/k}$.
   (c) $\operatorname{cor}_{E/k}(y_E \cdot x) = y \cdot \operatorname{cor}_{E/k}(x)$ und $\operatorname{cor}_{E/k}(x \cdot y_E) = \operatorname{cor}_{E/k}(x) \cdot y$ für $x \in H^n(E)$, $y \in H^n(k)$, wobei $y_E = \operatorname{res}_{E/k}(y)$. Insbesondere gilt $\operatorname{cor}_{E/k}(y_E) = [E:k] \cdot y$.
2) Definition einer (surjektiven) Abbildung $\theta\colon H^n(k) \to K_n^M(k)$.
3) Definition einer Abbildung $\lambda\colon K_n^M(k) \to H^n(k)$, die $\theta \circ \lambda = \mathrm{Id}_{K_n^M(k)}$ erfüllt und verträglich ist mit den Korestriktionen von H^n und K_n^M.

4) Nachweis der Surjektivität von λ.

Die Restriktionsabbildung resultiert aus der allgemeinen funktoriellen Konstruktion von Homomorphismen zwischen motivischen Kohomologiegruppen zu Morphismen zwischen Schemata. Die Abbildung $\mathrm{res}_{E/k}\colon H^n(k) \to H^n(E)$ kommt dabei auf natürliche Weise vom Morphismus $\operatorname{Spec} E \to \operatorname{Spec} k$ induziert von $k \hookrightarrow E$. Desweiteren induziert die Inklusion von k in E mit Hilfe des eigentlichen Push-Forwards von algebraischen Zykeln (vgl. [**Ful98**, Abschn. 1.4]) die Korestriktion $H^n(E) \to H^n(k)$. Da Zariski-Hyperkohomologie auf $\operatorname{Spec} k$ mit der gewöhnlichen Kohomologie des Komplexes $C^*\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})(\operatorname{Spec} k)$ übereinstimmt, haben wir

(II.2.1)
$$H^n(k) = H^0\big(C^*\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})(\operatorname{Spec} k)\big) = \operatorname{coker}\Big(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})(\mathbb{A}^1) \xrightarrow{\partial_0^*-\partial_1^*} \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})(\operatorname{Spec} k)\Big).$$

Hierbei wurde $\mathbb{A}^1 \cong \Delta^1$ via $t \mapsto (t, 1-t)$ benutzt. Die Abbildungen ∂_0^* und ∂_1^* sind dann Restriktionen auf die Fasern mit $t = 0$ und $1 - t = 0$, also $t = 1$. Zur Definition von θ genügt es nun wegen (II.2.1), eine Abbildung $\tilde{\theta}\colon \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})(\operatorname{Spec} k) \to K_n^M(k)$ zu konstruieren, die mit $\partial_0^* - \partial_1^*$ verknüpft die Nullabbildung ergibt.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})(\mathbb{A}^1) \arrow[r, "\partial_0^*-\partial_1^*"] & \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})(\operatorname{Spec} k) \arrow[r, two heads] \arrow[dr, dotted, "\tilde{\theta}"'] & H^n(k) \arrow[d, "\theta"] \\
 & & K_n^M(k)
\end{tikzcd}$$

Die Gruppe $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})(\operatorname{Spec} k)$ ist erzeugt von Äquivalenzklassen $\bar{x}$ abgeschlossener Punkte x von $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\times n}$, die wiederum durch eine Sequenz $x_1, \ldots, x_n$ von Elementen des Restklassenkörpers $k(x)$ dargestellt werden können. Da die Restklassenkörper $k(x)$ endliche Erweiterungen von k sind, bekommt man eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}\colon \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge n})(\operatorname{Spec} k) &\longrightarrow K_n^M(k)\\ \bar{x} &\longmapsto \operatorname{cor}_{k(x)/k}\big(\{x_1, \ldots, x_n\}\big).\end{aligned}$$

Aus der Weil-Reziprozität (vgl. Theorem I.1.16) folgt, dass $\tilde{\theta} \circ (\partial_0^* - \partial_1^*) = 0$ gilt (siehe [**MVW06**, Thm. 5.4 & Kor. 5.5]). Somit haben wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\theta\colon H^n(k) \to K_n^M(k), \quad [\bar{x}] \mapsto \tilde{\theta}(\bar{x}).$$

Ist x ein k-Punkt von $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\times n}$, so kann dieser dargestellt werden durch Elemente $x_1, \ldots, x_n \in k^\times$. Man schreibt $[x_1, \ldots, x_n]$ für die Klasse von x in $H^n(k)$. Offensichtlich ist θ surjektiv, da

$$\theta\big([x_1, \ldots, x_n]\big) = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Um nun die Umkehrabbildung $\lambda\colon K_n^M(k) \to H^n(k)$ zu konstruieren, definiert man eine Abbildung

(II.2.2)
$$(k^\times)^{\otimes n} \longrightarrow H^n(k), \quad a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \longmapsto [a_1, \ldots, a_n]$$

und zeigt, dass diese über $K_n^M(k)$ faktorisiert. Hierzu benutzt man die multiplikative Struktur auf $H^*(k)$, die $[a_1,\dots,a_n]=[a_1]\cdots[a_n]$ für $a_i\in k$ besagt (bezüglich dem Produkt aus [**MVW06**, Kor. 3.12]), sowie spezielle endliche Korrespondenzen aus $\mathrm{Cor}(\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\wedge 2})$ um die Relation $[a,1-a]=0$ in $H^2(k)$ zu zeigen. Zunächst betrachten wir zu beliebigen $a,b\in k^\times$ die endliche Korrespondenz Z in $\mathrm{Cor}(\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ bestehend aus Punkten (t,x) mit

$$x^2-t(a+b)x-(1-t)(1+ab)x+ab=0.$$

Die Faser von $t=0$ entspricht dem Element $[ab]+[1]=[ab]$ in $H^1(k)$ und die Faser von $t=1$ dem Element $[a]+[b]$. Zusammen mit $\partial_0^*(Z)-\partial_1^*(Z)=0$ in $H^1(k)$ ergibt dies die Relation $[ab]=[a]+[b]$. Sei nun $a\in k^\times\setminus\{1\}$ und Z in $\mathrm{Cor}(\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ die Korrespondenz bestehend aus Punkten (t,x) mit

$$x^3-t(a^3+1)x^2+t(a^3+1)x-a^3=0.$$

Sei ω eine Nullstelle von x^2+x+1 in k_{sep}. Über $E=k(\omega)$ besteht die Faser von $t=0$ aus Punkten mit $x^3=a^3$, also $x\in\{a,\omega a,\omega^2 a\}$. Die Faser von $t=1$ besteht aus Punkten mit $(x-a^3)(x^2-x+1)=0$, also $x\in\{a^3,-\omega,-\omega^2\}$. Die Einbettung

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\setminus\{1\}\overset{\iota}{\hookrightarrow}\big(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\setminus\{1\}\big)^{\times 2},\quad x\longmapsto(x,1-x)$$

definiert eine endliche Korrespondenz $Z'=\iota(Z)$ in $\mathrm{Cor}(\mathbb{A}^1,\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\times 2})$. In $H^2(E)$ gilt nun unter Benutzung der multiplikativen Struktur

$$\begin{aligned}
3\cdot\partial_0^*(Z') &= 3\cdot\big([a,1-a]+[\omega a,1-\omega a]+[\omega^2 a,1-\omega^2 a]\big)\\
&= [a^3,1-a]+[a^3,1-\omega a]+[\omega^2 a,1-\omega^2 a] && \text{(wegen } \omega^3=1)\\
&= [a^3,(1-a)(1-\omega a)(1-\omega^2 a)]\\
&= [a^3,1-a^3],\\
3\cdot\partial_1^*(Z') &= 3\cdot\big([a^3,1-a^3]+[-\omega,1+\omega]+[-\omega^2,1+\omega^2]\big)\\
&= 3[a^3,1-a^3]+[-1,1+\omega]+[-1,1+\omega^2] && \text{(wegen } \omega^3=1)\\
&= 3[a^3,1-a^3]+[-1,(1+\omega)(1+\omega^2)]\\
&= 3[a^3,1-a^3] && \text{(wegen } (1+\omega)(1+\omega^2)=1).
\end{aligned}$$

Somit impliziert $(\partial_0^*-\partial_1^*)(Z')=0$ die Beziehung

$$2[a^3,1-a^3]=0 \text{ in } H^2(E).$$

Unter Anwendung von $\mathrm{cor}_{E/k}$ haben wir $4[a^3,1-a^3]=0$ in $H^2(k)$. Übergang zu $L=k(\sqrt[3]{a})$ und Anwenden der Korestriktion $\mathrm{cor}_{L/k}$ liefert $12[a,1-a]=0$ in $H^2(k)$. Mithilfe eines ähnlichen Transferarguments kann man hieraus folgern (siehe [**MVW06**, Lemma 5.8]), dass $[a,1-a]=0$ in $H^2(k)$ gilt. Somit induziert (II.2.2) eine Abbildung $\lambda\colon K_n^M(k)\to H^n(k)$, für die nach Konstruktion $\theta\circ\lambda=\mathrm{Id}_{K_n^M(k)}$ gilt.

Es bleibt zu zeigen, dass $\lambda=\lambda_k$ surjektiv ist. Sei $[x]\in H^n(k)$ und $E=k(x)$ der Restklassenkörper des Punktes x. Es existiert dann ein E-rationaler Punkt $\tilde{x}$ und $x_i\in E$ mit $[\tilde{x}]=\lambda_E(\{x_1,\dots,x_n\})$, sodass $[x]=\mathrm{cor}_{E/k}[\tilde{x}]$ gilt. Die Behauptung folgt dann sofort aus der

Kompatibilität der Abbildung λ mit den Korestriktionen auf K_n^M und H^n (siehe [**MVW06**, Lemma 5.11]):

$$\begin{tikzcd} K_n^M(E) \arrow[r, "\lambda_E"] \arrow[d, "\mathrm{cor}_{E/k}"'] & H^n(E) \arrow[d, "\mathrm{cor}_{E/k}"] \\ K_n^M(k) \arrow[r, "\lambda_k"'] & H^n(k) \end{tikzcd}$$

□

2.17. Korollar. Es gilt $H^{n,n}(k, \mathbb{Z}/\ell) \cong K_n^M(k)/\ell$ für jede ganze Zahl $n \geq 0$, jede Primzahl ℓ und jeden Körper k.

BEWEIS. Die kurze exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot\ell} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\ell \to 0$ induziert die lange exakte Sequenz von motivischen Kohomologiegruppen

$$H^{n,n}(k, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cdot\ell} H^{n,n}(k, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{n,n}(k, \mathbb{Z}/\ell) \longrightarrow H^{n+1,n}(k, \mathbb{Z}).$$

Die letzte Gruppe ist trivial nach Lemma 2.11, also ist der dritte Pfeil ein Epimorphismus. Aus der Exaktheit folgt mit dem Homomorphiesatz und vorangegangenem Satz schließlich die Behauptung. □

2.18. Satz. Sei k Körper, X glattes Schema über k, $n \in \mathbb{N}$ und m teilerfremd zu $\operatorname{char} k$. Dann gilt $H_{\text{et}}^{p,q}(X, \mathbb{Z}/m) \cong H_{\text{et}}^p(X, \mu_m^{\otimes q})$.

BEWEISSKIZZE NACH [**MVW06**, THEOREM 10.2]. Theorem 4.1 in [**MVW06**] besagt, dass die Komplexe $\mathbb{Z}(1)$ und der triviale Komplex $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}[-1]$ der Garbe der globalen Einheiten (d.h. $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \colon (\mathrm{Sm}/k)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$, $U \mapsto \mathcal{O}_U(U)^\times$) quasiisomorph sind, d.h. es existiert ein Quasiisomorphismus

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}(1)^0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}(1)^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Die Vergarbung von Prägarben zu étalen Garben ist exakt, sodass wir eine Quasiisomorphie $\mathbb{Z}/m(1) \cong (\mathbb{G}_{\mathrm{m}})_{\text{et}}[-1] \otimes^L \mathbb{Z}/m \cong \mu_m$, wobei $\otimes^L$ das sogenannte totale Tensorprodukt auf $\mathrm{Kom}^- \mathrm{ST}_{\text{et}}(k)$ ist. Zusammen mit der Multiplikation $\mathbb{Z}/m(r) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m(s) \to \mathbb{Z}/m(r+s)$ erhalten wir einen Morphismus

$$\mu_m^{\otimes q} \to (\mathbb{Z}/m)(1)^{\otimes q} \to \mathbb{Z}/m(q).$$

Proposition 10.6 in [**MVW06**] zeigt, dass $\mu_m^{\otimes q} \to \mathbb{Z}/m(q)$ eine sogenannte $\mathbb{A}^1$-schwache Äquivalenz ist. Diese sind nach [**MVW06**, Lemma 9.21] Quasiisomorphismen, woraus die Behauptung folgt. □

3. Verwandte Vermutungen und Resultate

In diesem Abschnitt werden mit der Beilinson-Lichtenbaum-Vermutung, dem motivischen Hilberts Satz 90 sowie der Milnor-Vermutung über Bilinearformen einige mit der Bloch-Kato-Vermutung in Verbindung stehende Aussagen dargestellt. Desweiteren impliziert die Gültigkeit der Bloch-Kato-Vermutung die Quillen-Lichtenbaum-Vermutung (siehe [**SV95**, Kor. 7.6]), worauf wir aber nicht weiter eingehen werden.

3.A. Beilinson-Lichtenbaum-Vermutung. Mithilfe von Korollar 2.17 und Satz 2.18 aus dem vorangegangenen Abschnitt wird der Normresthomomorphismus zu einem Vergleich von motivischen Kohomologiegruppen:

$$\begin{tikzcd} K_n^M(k)/\ell \arrow[r, "\eta^n_{\ell,k}"] \arrow[d, "\wr"', "2.17"] & H^n_{\mathrm{et}}(k,\mu_\ell^{\otimes n}) \arrow[d, "2.18"', "\wr"] \\ H^{n,n}(k,\mathbb{Z}/\ell) \arrow[r] & H^{n,n}_{\mathrm{et}}(k,\mathbb{Z}/\ell) \end{tikzcd}$$

Man kann zeigen, dass der untere Morphismus auf natürliche Art und Weise vom Wechsel der Topologie kommt. Sei $\pi\colon (\operatorname{Spec} k)_{\mathrm{et}} \to (\operatorname{Spec} k)_{\mathrm{Nis}}$ der triviale Morphismus zwischen kleinen Siten. Die induzierte Abbildung $\pi_*\colon \mathrm{Shv}_{\mathrm{et}}(k) \to \mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(k)$, $F \mapsto F$ ist linksexakt, somit haben wir den total rechtsderiviersten Funktor $\boldsymbol{R}\pi_*$ und einen rechtsadjungierten Funktor π^*, den wir zu einem Funktor $D^-\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(k) \longrightarrow D^-\mathrm{Shv}_{\mathrm{et}}(k)$ erweitern können.

$$\begin{tikzcd} D^-\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(k) \arrow[r, bend left, "\pi^*"] & D^-\mathrm{Shv}_{\mathrm{et}}(k) \arrow[l, bend left, "\boldsymbol{R}\pi_*"] \end{tikzcd}$$

Sei $B/\ell(n)$ der Komplex $\tau_{\leq n}\boldsymbol{R}\pi_*\pi^*(\mathbb{Z}/\ell(n))$. Die Aussage der Beilinson-Lichtenbaum-Vermutung ist dann, dass die Komplexe $\mathbb{Z}/\ell(n)$ und $B/\ell(n)$ quasiisomorph sind. Wir notieren diese Eigenschaft mit $\mathrm{BL}(n,\ell,k)$. Nach Suslin-Voevodsky [**SV95**, 5.10] ist $\mathrm{BL}(n,\ell,k)$ äquivalent dazu, dass der kanonische Homomorphismus

$$H^{p,n}(F,\mathbb{Z}/\ell) \longrightarrow H^{p,n}(F,B/\ell) \cong H^{p,n}_{\mathrm{et}}(F,\mathbb{Z}/\ell)$$

ein Isomorphismus ist für alle natürlichen Zahlen $p \leq n$ und alle endlich-erzeugten Körpererweiterungen F/k. Somit ist die Beilinson-Lichtenbaum-Vermutung formal stärker als die Bloch-Kato-Vermutung. Die Arbeit von Suslin und Voevodsky [**SV95**] zeigt, dass die Bloch-Kato-Vermutung die Beilinson-Lichtenbaum-Vermutung impliziert.

3.1. Satz. [**Voe03a**, Kor. 6.9] Angenommen es gilt $\mathrm{BL}(n,\ell,k)$. Dann gilt für jedes simpliziale Schema $\mathfrak{X}$ über k, jede natürliche Zahl ν und jede ganze Zahl $q \leq n$:

1) $H^{p,q}(\mathfrak{X},\mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H^{p,q}_{\mathrm{et}}(\mathfrak{X},\mathbb{Z}_{(\ell)})$ ist $\begin{cases} \text{Isomorphismus} & : \; p \leq q+1 \\ \text{Monomorphismus} & : \; p = q+2. \end{cases}$

2) $H^{p,q}(\mathfrak{X},\mathbb{Z}/\ell^\nu) \to H^{p,q}_{\text{et}}(\mathfrak{X},\mathbb{Z}/\ell^\nu)$ ist $\begin{cases} \text{Isomorphismus} & : \ p \leq q \\ \text{Monomorphismus} & : \ p = q+1. \end{cases}$

3.B. Motivischer Hilberts Satz 90. Man betrachtet die Eigenschaft, dass die Kohomologiegruppe $H^{n+1,n}_{\text{et}}(k,\mathbb{Z}_{(\ell)})$ verschwindet, als eine motivische Verallgemeinerung zur kohomologischen Fassung von Hilberts Satz 90. Denn für $n=1$ gilt

$$\begin{aligned} H^{2,1}_{\text{et}}(k,\mathbb{Z}) &= \mathbb{H}^2_{\text{et}}(k,\mathbb{Z}(1)) \\ &= \mathbb{H}^2_{\text{et}}(k,\mathbb{G}_{\text{m}}[-1]) \\ &= \mathbb{H}^1_{\text{et}}(k,\mathbb{G}_{\text{m}}) \\ &= H^1_{\text{et}}(k,\mathbb{G}_{\text{m}}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

und da $\mathbb{Z}_{(\ell)}$ ein flacher $\mathbb{Z}$-Modul ist, gilt folglich $H^{2,1}_{\text{et}}(k,\mathbb{Z}_{(\ell)}) = H^1_{\text{et}}(k,\mathbb{G}_{\text{m}}) \otimes \mathbb{Z}_{(\ell)} = 0$. Wir schreiben $\mathrm{H90}(n,\ell,k)$ für die Eigenschaft $H^{n+1,n}_{\text{et}}(k,\mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$, und $\mathrm{H90}(n,\ell)$ für die Eigenschaft $\{\mathrm{H90}(n,\ell,k)$ für alle Körper k mit Charakteristik ungleich $\ell\}$.

Der motivische Hilberts Satz 90 ist keine „klassische“ Vermutung, sondern als eine Art Umformulierung der Bloch-Kato-Vermutung in deren Beweisprogramm entstanden. Die Formulierung von $\mathrm{H90}(n,\ell,k)$ mit lokalisierten Koeffizienten geschieht aus technischen Gründen (vgl. Abschnitt III.4).

3.C. Milnor-Vermutung über Bilinearformen. In Abschnitt I.4.D haben wir eine surjektive Abbildung von der n-ten Milnor'schen K-Gruppe modulo zwei in die Faktorgruppe $I^n(k)/I^{n+1}(k)$ konstruiert. Zusammen mit dem Normresthomomorphismus haben wir also ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H^n(k,\mathbb{Z}/2) \\ K^M_n(k)/2 \arrow[ur, "\eta^n_{2,k}"] \arrow[dr, "s_{n,k}"'] & \\ & I^n(k)/I^{n+1}(k) \arrow[uu, dotted, "e_{n,k}"'] \end{tikzcd}$$

Die ebenfalls in [**Mil70**] geäußerte Milnor-Vermutung über Bilinearformen bezieht sich auf die Bijektivität der Abbildung $s_{n,k}$. Sie wurde wie bereits erwähnt von Orlov, Vishik und Voevodsky [**OVV07**] bewiesen. Der resultierende Isomorphismus $e_{n,k}$ hat in niedrigen Dimensionen die folgende Interpretation bezüglich klassischer Invarianten (vgl. Elman, Karpenko und Merkurjev [**EKM08**] oder Lam [**Lam05**]):

1) Die Abbildung $e_{0,k}\colon W(k)/I(k) \to H^0(k,\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$ ist induziert vom Dimensionshomomorphismus $\mathfrak{b} \mapsto \dim_k \mathfrak{b}$ modulo zwei.

2) Die Abbildung $e_{1,k}\colon I(k)/I^2(k) \to H^1(k,\mathbb{Z}/2) \cong k^\times/k^{\times 2}$ ist induziert von der Diskrimanten
$$\mathfrak{b} \longmapsto (-1)^{\frac{\dim_k \mathfrak{b}}{2}} \cdot \det \mathfrak{b}.$$
3) Die Abbildung $e_{2,k}\colon I^2(k)/I^3(k) \to H^2(k,\mathbb{Z}/2) \cong {}_2\mathrm{Br}(k)$ ist induziert von der Clifford-Invarianten, die eine Bilinearform $\mathfrak{b}$ abbildet auf die Klasse der Clifford-Algebra von $\mathfrak{b}$.

KAPITEL III

Skizze des allgemeinen Beweises

In diesem Kapitel soll die äußere Hülle im Beweis der Bloch-Kato-Vermutung dargestellt werden. Dazu liefert Abschnitt 1 einen Überblick über die einzelnen Schritte und Reduktionen, die in den Abschnitten 3–8 genauer dargestellt werden. Abschnitt 2 illustriert anhand des Beispiels $n = 1$ den grundlegenden Rahmen im Beweis.

1. Struktur des Beweises

An dieser Stelle erläutern wir grob die Struktur im Beweis der Bloch-Kato-Vermutung. In späteren Abschnitten wird dann etwas ausführlicher auf die einzelnen Schritte eingegangen. Grundlegend im Beweis ist der Übergang zur motivischen Kohomologie, die in gewissem Sinne eine universelle Kohomologietheorie ist und sowohl die Milnor'sche K-Theorie wie auch die étale Kohomologie $H^n_{\text{et}}(-, \mu_m^{\otimes n})$ verallgemeinert. Wie bereits erwähnt, benutzen wir die Kurzschreibweise $\text{BK}(n, m, k)$ für die Isomorphie des Normresthomomorphismus $\eta^n_{m,k}$ und $\text{BK}(n, m)$ für die Gültigkeit von $\text{BK}(n, m, k)$ für alle Körper k, deren Charakteristik kein Teiler von m ist. Unser Ziel ist es, $\text{BK}(n, m)$ für alle natürlichen Zahlen n und $m \geq 2$ zu zeigen. Der Beweis kann dann grob in folgende Schritte aufgeteilt werden.

1. Schritt. Man reduziert die Gültigkeit der Bloch-Kato-Vermutung modulo beliebigen natürlichen Zahlen m auf die Gültigkeit modulo Primzahlen ℓ, d.h. auf $\text{BK}(n, \ell, k)$ für alle Zahlen n, ℓ und Körper k mit Charakteristik ungleich ℓ. Dieser Schritt ist relativ elementar und folgt leicht aus Berechnungen in Milnor'scher K-Theorie und Galoistheorie.

2. Schritt. Man reduziert die Gültigkeit der Bloch-Kato-Vermutung über beliebigen Körpern auf die Gültigkeit über Körpern der Charakteristik null, d.h. auf $\text{BK}(n, \ell, k)$ für alle Zahlen n, ℓ und Körper k der Charakteristik null. Auch dieser Schritt ist eher von klassischer Natur und benutzt die Konstruktion von Witt-Vektoren über Körpern. Die Reduktion erlaubt im weiteren Verlauf u.a. die Benutzung von Resultaten, für die eine Singularitätenauflösung für k vorausgesetzt wird.

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{BK}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k})\\ \forall\, k \text{ mit } \operatorname{char} k = 0\\ \forall\, n\ \forall\, \ell \text{ prim}\end{array}} \xRightarrow{\text{Lem. 3.4}} \boxed{\begin{array}{l}\mathbf{BK}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\ell})\\ \forall\, n\ \forall\, \ell \text{ prim}\end{array}} \xRightarrow{\text{Kor. 3.3}} \boxed{\begin{array}{l}\mathbf{BK}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})\\ \forall\, n\ \forall\, m\end{array}}$$

3. Schritt. Man zeigt, dass die Bloch-Kato-Vermutung aus der motivischen Version von Hilberts Satz 90 folgt. Der Beweis ist damit reduziert auf den Nachweis von

$$\{\mathrm{H90}(n,\ell,k) \text{ für alle Körper } k \text{ mit } \operatorname{char} k = 0 \text{ und Zahlen } n,\ell \in \mathbb{N} \text{ mit } \ell \text{ prim}\}\,. \tag{III.1.1}$$

Dieser Teil benutzt wesentliche Resultate aus der motivischen Kohomologietheorie wie die Äquivalenz zwischen Bloch-Kato-Vermutung und Beilinson-Lichtenbaum-Vermutung. Der Grundstein hierfür wurde von Voevodsky und Suslin in deren Artikel [**SV99**] gelegt.

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{H90}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k})\\ \forall\, k \text{ mit } \operatorname{char} k = 0\end{array}} \xRightarrow[\text{(Voevodsky)}]{\text{Satz 4.5}} \boxed{\begin{array}{l}\mathbf{BK}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{\ell},\boldsymbol{k})\\ \forall\, k \text{ mit } \operatorname{char} k = 0\end{array}}$$

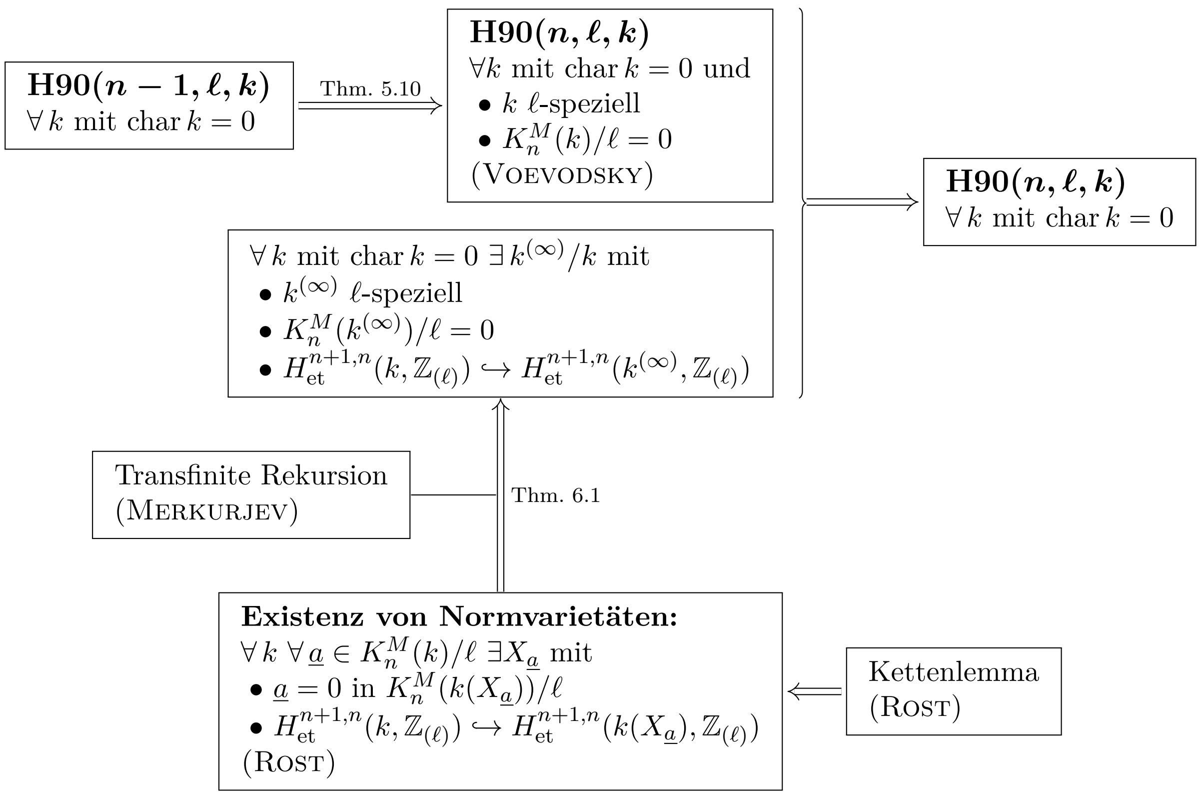
4. Schritt. Es wird zu einer festen Zahl ℓ die Eigenschaft (III.1.1) induktiv nach n bewiesen. Der Induktionsschritt sieht dabei folgendermaßen aus:

Schritt A. Es wird $\mathrm{H90}(n,\ell,k)$ für ℓ-spezielle Körper k mit der zusätzlichen Eigenschaft $K_n^M(k)/\ell = 0$ gezeigt. Aufgrund dieser starken Bedingungen an den Körper k können wir das Verschwinden von $H_{\mathrm{et}}^{n+1,n}(k,\mathbb{Z}_{(\ell)})$ fast ausschließlich mit klassischen Berechnungen in Milnor'scher K-Theorie und Galoiskohomologie nachweisen. Eine Schlüsseleigenschaft ist der sogenannte *Hilberts Satz 90 für* K_n^M.

Schritt B. Man konstruiert mittels transfiniter Rekursion zu einem allgemeinen Körper k der Charakteristik null einen Turm (den sogenannten *Merkurjev-Turm*) von Körpererweiterungen $k = k^{(0)} \subset k^{(1)} \subset k^{(2)} \subset \cdots$, sodass $k^{(\infty)}$ die Bedingungen aus Schritt A erfüllt und ferner die Kohomologiegruppe $H_{\mathrm{et}}^{n+1,n}(k,\mathbb{Z}_{(\ell)})$ in $H_{\mathrm{et}}^{n+1,n}(k^{(\infty)},\mathbb{Z}_{(\ell)})$ einbettet (und damit verschwindet). Diese Konstruktion stammt ursprünglich von Merkurjev [**Mer81**] und setzt in der hier besprochenen Variante die folgende Eigenschaft voraus, auf deren Gültigkeit die Bloch-Kato-Vermutung somit reduziert wird:

(III.1.2)

> Für jeden Körper F (mit $\operatorname{char} F = 0$) und zu jedem nichttrivialen Symbol $\underline{a} = \{a_1,\dots,a_n\} \in K_n^M(F)/\ell$ existiert ein Erweiterungskörper $F_{\underline{a}}/F$ mit den Eigenschaften:
>
> 1) Die K-Gruppe von $F_{\underline{a}}$ zerfällt $\underline{a}$, d.h. $\underline{a}_{F_{\underline{a}}} = 0$ in $K_n^M(F_{\underline{a}})/\ell$.
> 2) Die Restriktion $H_{\mathrm{et}}^{n+1,n}(F,\mathbb{Z}_{(\ell)}) \to H_{\mathrm{et}}^{n+1,n}(F_{\underline{a}},\mathbb{Z}_{(\ell)})$ ist injektiv.



5. Schritt. Es wird die Existenz von sogenannten *Normvarietäten* gezeigt. Zu jedem Körper F und jedem Symbol $\underline{a} = \{a_1, \ldots, a_n\} \in K_n^M(F)/\ell$ existiert eine Varietät $X_{\underline{a}}$ mit gewissen Eigenschaften, sodass der Quotientenkörper $F(X_{\underline{a}})$ die Bedingungen an die Körpererweiterung $F_{\underline{a}}$ in (III.1.2) erfüllt. Die Konstruktion von Normvarietäten geht wesentlich auf Arbeiten von Rost zurück und benutzt tiefliegende Resultate wie das Kettenlemma und das Normprinzip. Eine wesentliche Hürde ist nun der Nachweis der Injektivität von $H_{\text{et}}^{n+1,n}(F, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \to H_{\text{et}}^{n+1,n}(F(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)})$.

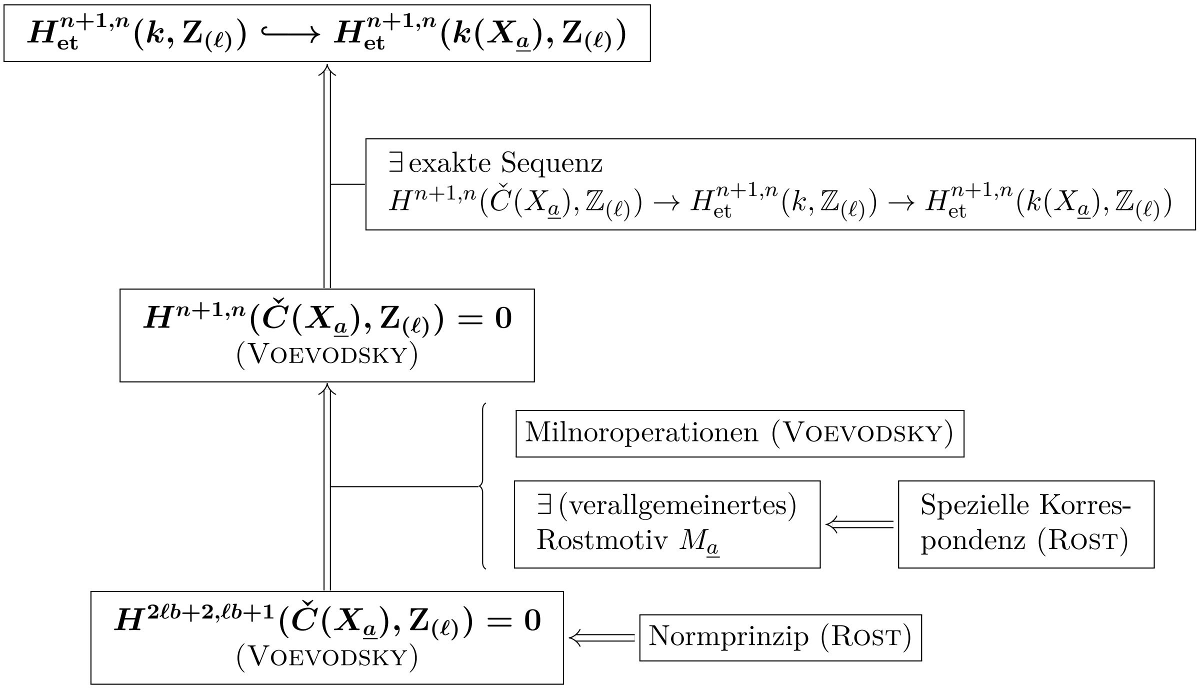
6. Schritt. Es wird gezeigt, dass eine exakte Sequenz der Form

$$H^{n+1,n}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H_{\text{et}}^{n+1,n}(F, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H_{\text{et}}^{n+1,n}(F(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)})$$

existiert, wobei $\check{C}(X_{\underline{a}})$ das sogenannte *simpliziale Schema* zu $X_{\underline{a}}$ ist. Die Konstruktion hiervon imitiert Methoden aus der algebraischen Topologie und geht auf Voevodsky zurück. Die Bloch-Kato-Vermutung reduziert sich also auf das Verschwinden von $H^{n+1,n}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)})$.

7. Schritt. Die Gruppe $H^{n+1,n}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)})$ wird mithilfe von *Milnoroperationen* in eine „höhere“ Gruppe $H^{2\ell b+2,\ell b+1}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)})$ eingebettet, wobei hier $b = \frac{\ell^{n-1}-1}{\ell-1}$ sei.

8. Schritt. Es wird das Verschwinden der Gruppe $H^{2\ell b+2,\ell b+1}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)})$ gezeigt. Hierzu braucht man unter anderem die Existenz des (verallgemeinerten) Rost-Motivs.



2. Veranschaulichung der Beweisstrategie am Fall $n = 1$

In diesem Abschnitt zeigen wir anhand des Beispiels $n = 1$ grob, wie der Beweis der Bloch-Kato-Vermutung strukturiert ist. Auch wenn das Resultat $\mathrm{BK}(1, m, k)$ vergleichsweise elementar bewiesen wurde, können wir eine Adaption des allgemeinen Beweises vornehmen und so die Isomorphie des Normresthomomorphismus reduzieren auf hochgradig „nicht-triviale“ Argumente, die für allgemeine n eine Schlüsselrolle im Beweis spielen. Im Beispiel II.1.5 haben wir $\mathrm{BK}(1, m, k)$ aus Hilberts Satz 90 gefolgert. Wie schon in Abschnitt 1 erwähnt, wollen wir $\mathrm{BK}(n, \ell, k)$ allgemein aus $\mathrm{H90}(n, \ell, k)$, dem motivischen Hilberts Satz 90, folgern und das Problem so auf den induktiven Beweis von $\mathrm{H90}(n, \ell, k)$ reduzieren.

2.A. $\mathbf{H90}(1, \ell, k)$ für spezielle Körper. Zuerst zeigt man Hilberts Satz 90 für Körper k mit der Eigenschaft $k^\times = k^{\times \ell}$, oder mit anderen Worten $k^\times / k^{\times \ell} \cong K_1^M(k)/\ell = 0$. In diesem Fall kann man zumindest für den Fall $\ell = 2$ ohne Benutzung der Trivialität von $H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$, was wir letztendlich zeigen wollen, das Verschwinden von $H^1_{\mathrm{et}}(k, \mu_\ell)$ herleiten. Da es in diesem Abschnitt mehr um die *Methoden* im Beweis der Bloch-Kato-Vermutung als um die Aussage $\mathrm{BK}(1, \ell)$ (die unabhängig hiervon mithilfe Korollar I.2.24 bewiesen wurde) selbst geht, wollen wir der Einfachheit halber annehmen, das folgende Resultat ohne Hilberts Satz 90 beweisen zu können.

2.1. Satz. Angenommen es gilt $k^\times / k^{\times \ell} = 1$. Dann gilt $H^1_{\mathrm{et}}(k, \mu_\ell) = 0$.

2.2. Bemerkung. Nehmen wir (im Fall $\ell = 2$) zusätzlich an, dass jede endliche Erweiterung von k vom Grad 2^ν für eine ganze Zahl $\nu \geq 1$ ist, so folgt zusammen mit $k^\times/k^{\times 2} = 1$, dass keine endliche Erweiterung von k existiert, da man zu Erweiterungen von besagtem Grad stets eine quadratische Zwischenerweiterung findet, welche von einem Element aus $k^\times \backslash k^{\times 2}$ kommen müsste. Somit ist in diesem Fall k algebraisch abgeschlossen und die Identität $H^1_{\mathrm{et}}(k, \mu_\ell) = 0$ folgt aus der Tatsache, dass die absolute Galoisgruppe von algebraisch abgeschlossenen Körpern trivial ist. Man sagt bezüglich der eingangs angenommenen Eigenschaft, der Körper k sei 2-speziell. Diese Eigenschaft „ℓ-speziell“ spielt im entsprechenden Schritt des allgemeinen Beweises (vgl. Abschnitt 5), wo $n \geq 2$ und ℓ beliebig sind, eine wesentliche Rolle.

Wir betrachten nun erneut die lange Kohomologiesequenz zur Kummersequenz:

$$k^\times \xrightarrow{(-)^\ell} k^\times \xrightarrow{\delta} H^1_{\mathrm{et}}(k, \mu_\ell) \longrightarrow H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \xrightarrow{\cdot \ell} H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \longrightarrow \cdots \tag{III.2.1}$$

Das Verschwinden von $H^1_{\mathrm{et}}(k, \mu_\ell)$ impliziert mithilfe der Exaktheit die Injektivität von $H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \xrightarrow{\cdot \ell} H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}})$. Wir sind an einer Version dieses Resultats mit lokalisierten Koeffizienten interessiert. Aufgrund der Exaktheit des Funktors $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(\ell)} \colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ bleibt die Injektivität unter dessen Anwendung erhalten. Desweiteren sind die Gruppen $H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(\ell)}$ und $H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(\ell)})$ kanonisch isomorph. Schreiben wir $\mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}$ für $\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(\ell)}$, so induziert die Multiplikation mit ℓ also einen Monomorphismus auf $H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$. Wir wollen die Sequenz

$$\cdots \overset{\cdot \ell}{\hookrightarrow} H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \overset{\cdot \ell}{\hookrightarrow} H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \overset{\cdot \ell}{\hookrightarrow} \cdots$$

als ein (mit $\mathbb{N}$ indiziertes) induktives System betrachten. Da die Funktoren $H^n_{\mathrm{et}}(k, -)$ und $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(\ell)}$ mit direkten Limites kommutieren, gilt

$$\varinjlim H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) = H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes_{\mathbb{Z}} \varinjlim \mathbb{Z}_{(\ell)}),$$

wobei der Limes auf der rechten Seite von dem mit natürlichen Zahlen indizierten System

$$\cdots \overset{\cdot \ell}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}_{(\ell)} \overset{\cdot \ell}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}_{(\ell)} \overset{\cdot \ell}{\hookrightarrow} \cdots$$

kommt.

2.3. Lemma. Es gilt $\varinjlim(\cdots \overset{\cdot \ell}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}_{(\ell)} \overset{\cdot \ell}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}_{(\ell)} \overset{\cdot \ell}{\hookrightarrow} \cdots) \cong \mathbb{Q}$.

Beweis. Wir betrachen $\mathbb{Z}_{(\ell)}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ und definieren $\varinjlim \mathbb{Z}_{(\ell)} \to \mathbb{Q}$ folgendermaßen: Die Klasse eines Elements $\frac{t}{s}$ aus der ν-ten Kopie von $\mathbb{Z}_{(\ell)}$ bilden wir ab auf $\frac{t}{s\ell^\nu}$. Man prüft leicht, dass dies ein wohldefinierter Isomorphismus ist. □

Folglich haben wir $\varinjlim H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \cong H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathbb{Q}) = 0$. Da in induktiven Systemen mit injektiven Morphismen die kanonische Abbildung von Objekten in den Limes wieder injektiv ist, folgt hiermit die Behaupung:

2.4. Korollar. Wir haben $H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) = 0$ für alle Körper k mit der Eigenschaft $k^\times = k^{\times \ell}$. □

2.B. H90$(1, \ell, k)$ für allgemeine Körper. Wir nehmen nun an, dass nichttriviale Elemente in $k^\times/k^{\times\ell}$ existieren. Sei $a \in k^\times$ der Vertreter eines nichttrivialen Elements in $k^\times/k^{\times\ell}$. Die Körpererweiterung $k(\sqrt[\ell]{a})/k$ ist dann zyklisch von Ordnung ℓ, und es gilt $a \in k(\sqrt[\ell]{a})^{\times\ell}$, d.h. die Klasse von a in $k(\sqrt[\ell]{a})^\times/k(\sqrt[\ell]{a})^{\times\ell}$ verschwindet. Wir möchten diese Konstruktion gewissermaßen „wiederholen", bis wir einen Erweiterungskörper k' erhalten, sodass die Klasse von jedem Element $a \in k \setminus k^{\times\ell}$ in $(k')^\times/(k')^{\times\ell}$ verschwindet. Die Grundlage hierfür liefert uns der Wohlordnungssatz (siehe z.B. [**Dei04**, Kap. II, Abschn. 5]), der besagt, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. Sei $\mathrm{Rep}(k^\times/k^{\times\ell})$ eine feste Menge von Vertretern von Elementen in $k^\times/k^{\times\ell}$ bestehend aus einem Vertreter für jede Klasse. Wir wählen eine Wohlordnung $<_k$ auf der Menge $\mathrm{Rep}(k^\times/k^{\times\ell})$, die damit ordnungsisomorph zu einer Ordinalzahl κ ist, d.h. es existiert eine Bijektion

$$a\colon \{\lambda \mid \lambda < \kappa \text{ Ordinalzahl}\} \longleftrightarrow \mathrm{Rep}(k^\times/k^{\times\ell}),$$

sodass die Relationen $\lambda < \mu$ und $a(\lambda) <_k a(\mu)$ äquivalent sind. Schreiben wir a_λ für $a(\lambda)$, so ist $\mathrm{Rep}(k^\times/k^{\times\ell})$ die Menge $\{a_\lambda \in k^\times \mid \lambda < \kappa\}$. Wir konstruieren k' nun mithilfe des Prinzips der transfiniten Rekursion. Zu jeder Ordinalzahl $\lambda < \kappa$ möchten wir einen Körper k_λ definiert haben, sodass die Klasse von a_λ in ${k_\lambda}^\times/{k_\lambda}^{\times\ell}$ verschwindet. Sei $k_0 = k$ und $k_1 = k(\sqrt[\ell]{a_1})$. Wir müssen zwischen Nachfolgerordinalzahl und Limesordinalzahl unterscheiden. Ist λ der Nachfolger einer Ordinalzahl, die wir formal mit $\lambda - 1$ bezeichnen, so setzen wir $k_\lambda = k_{\lambda-1}(\sqrt[\ell]{a_\lambda})$. Falls λ ein Limes ist, so sei $k_\lambda = (\varinjlim k_\mu)(\sqrt[\ell]{a_\lambda})$, wobei der $\varinjlim k_\mu$ die Vereinigung aller Körper k_μ mit $\mu < \lambda$ ist. Wir haben also eine wohlgeordnete Menge von Körpererweiterungen $(k_\lambda)_{\lambda<\kappa}$ mit $k_\lambda \hookrightarrow k_\mu$ für alle Ordinalzahlen λ, μ mit $\lambda < \mu$.

2.5. Satz. Sei k ein beliebiger Körper. Angenommen für jeden Körper F und jedes Element $a \in F^\times \setminus F^{\times\ell}$ ist die Restriktion

$$H^1_{\mathrm{et}}(F, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \longrightarrow H^1_{\mathrm{et}}(F(\sqrt[\ell]{a}), \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$$

injektiv. Dann existiert eine Körpererweiterung k'/k, sodass gilt:

1) Die Klasse von jedem Element $a \in k^\times \setminus k^{\times\ell}$ verschwindet in $(k')^\times/(k')^{\times\ell}$.
2) Die Restriktion $H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \longrightarrow H^1_{\mathrm{et}}(k', \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$ ist injektiv.

Beweis. Wir setzen $k' = \varinjlim_{\lambda<\kappa} k_\lambda$. Die erste Eigenschaft ist damit klar, liegt ein Element $a \in k^\times \setminus k^{\times\ell}$ in der von a_λ repräsentierten Klasse in $k^\times/k^{\times\ell}$, so verschwindet die Klasse von a bereits in k_λ und folglich in k'. Für die zweite Eigenschaft bemerken wir, dass die Kohomologiegruppen $H^1_{\mathrm{et}}(k_\lambda, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$ indiziert mit der Menge der Ordinalzahlen kleiner als κ zusammen mit Restriktionsabbildungen $\mathrm{res}_{k_\mu/k_\lambda}$ als Morphismen ein induktives System bilden. Wir wollen zeigen, dass jede Restriktionsabbildung in diesem System injektiv ist. Dazu verwenden wir transfinite Induktion nach der Menge aller Ordinalzahlen λ kleiner als κ.

2.6. Lemma. Für alle Ordinalzahlen $\lambda < \kappa$ gilt, dass die Restriktion

$$H^1_{\mathrm{et}}(k_\mu, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \longrightarrow H^1_{\mathrm{et}}(k_\lambda, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$$

injektiv ist für alle $\mu < \lambda$.

Beweis von Lemma 2.6. Die Behauptung im Induktionsanfang ($\lambda = 1$) folgt unmittelbar aus der Voraussetzung in Satz 2.5. Ebenfalls aus dieser Annahme folgt die Injektivität von $\mathrm{res}_{k_\lambda/k_{\lambda-1}}$ im Induktionsschritt für Nachfolgerordinalzahlen λ. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt damit die Injektivität von $\mathrm{res}_{k_\lambda/k_\mu}$ für alle $\mu < \lambda$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
H^1_{\mathrm{et}}(k_\mu, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & H^1_{\mathrm{et}}(k_\lambda, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \\
& H^1_{\mathrm{et}}(k_{\lambda-1}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Es muss noch der Induktionsschritt für Limesordinalzahlen durchgeführt werden. Sei also λ eine fest gewählte solche Ordinalzahl. Erneut betrachten wir die Kohomologiegruppen $H^1_{\mathrm{et}}(k_\mu, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$ zusammen mit Restriktionsabbildungen als induktives System, diesmal indiziert mit den Ordinalzahlen μ kleiner als λ. Nach der Induktionsvoraussetzung sind alle Restriktionen $\mathrm{res}_{k_\lambda/k_\mu}$ mit $\mu < \lambda$ injektiv. Folglich sind die kanonischen Abbildungen

$$H^1_{\mathrm{et}}(k_\mu, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \longrightarrow \varinjlim_{\mu' < \lambda} H^1_{\mathrm{et}}(k'_\mu, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \tag{III.2.2}$$

injektiv für alle $\mu < \lambda$. Desweiteren vertauscht $H^n(-, A) = H^n_{\mathrm{et}}(-, \mathcal{F}_A)$ mit direkten Limites:

$$\begin{aligned}
H^n(\varinjlim F_i, A) &= H^n(\varprojlim \mathrm{Gal}((F_i)_{sep}/F_i), A) \\
&\overset{I.2.12}{=} \varinjlim H^n(\mathrm{Gal}((F_i)_{sep}/F_i), A) \\
&= \varinjlim H^n(F_i, A).
\end{aligned}$$

Der Körper k_λ ist nach Definition $(\varinjlim k_\mu)(\sqrt[\ell]{a_\lambda})$, wobei der Limes über $\mu < \lambda$ läuft. Damit folgt wieder aus der Voraussetzung von Satz 2.5 zusammen mit (III.2.2) die Behauptung.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
H^1_{\mathrm{et}}(k_\mu, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & H^1_{\mathrm{et}}(k_\lambda, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \\
& H^1_{\mathrm{et}}(\varinjlim k_{\mu'}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

□

Fortsetzung des Beweises von Satz 2.5. Mit denselben Argumenten wie im Beweis des Lemmas soeben sind nun alle Restriktionsabbildungen von $H^1_{\mathrm{et}}(k_\lambda, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$ in den Limes $H^1_{\mathrm{et}}(\varinjlim k_{\lambda'}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \cong H^1_{\mathrm{et}}(k', \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$ injektiv. Insbesondere gilt dann die zweite Eigenschaft. □

Der Körper k', den wir so konstruiert haben, erfüllt nicht zwangsläufig die Bedingung $(k')^\times/(k')^{\times \ell} = 1$, denn wir haben lediglich sichergestellt, dass jedes Element von k eine ℓ-te

Potenz in k' ist. Um einen Körper zu erhalten, der die gewünschte Eigenschaft aus dem ersten Schritt besitzt, wiederholen wir diese Konstruktion und gehen zum direkten Limes über.

2.7. Satz. Sei k ein beliebiger Körper. Wir definieren einen Turm von Körpererweiterungen

$$k^{(0)} \subset k^{(1)} \subset k^{(2)} \subset \cdots$$

rekursiv durch $k^{(0)} = k$ und $k^{(i+1)} = \big(k^{(i)}\big)'$ für alle ganzen Zahlen $i \geq 0$. Dann erfüllt der Vereinigungskörper $k^{(\infty)} = \varinjlim k^{(i)}$ die Eigenschaften:

1) $k^{(\infty)\times}/k^{(\infty)\times\ell} = 1$.
2) Die Restriktion $H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \longrightarrow H^1_{\mathrm{et}}(k^{(\infty)}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$ ist injektiv.

Beweis. Der erste Punkt ist klar, da jedes Element $a \in k^{(\infty)}$ aus einem der Körper $k^{(i)}$ kommt und damit eine ℓ-te Potenz in $k^{(i+1)} \subset k^{(\infty)}$ ist. Die zweite Eigenschaft folgt mit demselben Argument wie die entsprechende Eigenschaft in Satz 2.5. □

2.C. Injektivität von $H^1_{\mathrm{et}}(F, \mathrm{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \to H^1_{\mathrm{et}}(F(\sqrt[\ell]{a}), \mathrm{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$. Im vorigen Abschnitt haben wir den Beweis von $H^1_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) = 0$ reduziert auf die Injektivität der Restriktion

$$H^1_{\mathrm{et}}(F, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \longrightarrow H^1_{\mathrm{et}}(F(\sqrt[\ell]{a}), \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$$

für jeden Körper F und jedes Element $a \in F^\times \setminus F^{\times\ell}$. An diesem Punkt müssen wir zu allgemeineren Objekten übergehen. Man kann den Begriff der étalen Kohomologie von Schemata erweitern auf simpliziale Schemata, also simpliziale Objekte in der Kategorie von Schemata. Wir sind besonders interessiert am Čech-simplizialen Schema $\mathfrak{X}_a = \check{C}(\operatorname{Spec} F(\sqrt[\ell]{a}))$ gegeben durch

$$(\mathfrak{X}_a)_n = (\operatorname{Spec} F(\sqrt[\ell]{a}))^{\times(n+1)}$$

zusammen mit Flächen- bzw. Randabbildungen induziert von den kanonischen Projektions- bzw. Diagonalabbildungen. Die Kohomologie $H^1_{\mathrm{et}}(-, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$ von $\mathfrak{X}_a$ stimmt dann mit der von k, d.h. $\operatorname{Spec} k$, überein. Eine Nachahmung von Konstruktionen aus der algebraischen Topologie liefert ein kommutatives Diagramm der Gestalt

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{H}^1_{\mathrm{et}}(\mathfrak{X}_a/\operatorname{Spec} F(\sqrt[\ell]{a}), \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{et}}(\mathfrak{X}_a, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{et}}(F(\sqrt[\ell]{a}), \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
H^1_{\mathrm{Nis}}(\mathfrak{X}_a/\operatorname{Spec} F(\sqrt[\ell]{a}), \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{Nis}}(\mathfrak{X}_a, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{Nis}}(F(\sqrt[\ell]{a}), \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}).
\end{array}$$

Die Zeilen kommen dabei von einem exakten Dreieck (in einer geeigneten triangulierten Kategorie simplizialer Schemata) der Form

$$\operatorname{Spec} F(\sqrt[\ell]{a}) \to \mathfrak{X}_a \to \mathfrak{X}_a/\operatorname{Spec} F(\sqrt[\ell]{a}) \to \operatorname{Spec} F(\sqrt[\ell]{a})[1].$$

Die vertikalen Homomorphismen sind induziert von der natürlichen Einbettung étaler Garben in Nisnevich-Garben. Nun verschwindet die Gruppe $H^1_{\mathrm{Nis}}(F(\sqrt[\ell]{a}), \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$ unten rechts (vgl.

Lemma II.2.11), und der erste senkrechte Pfeil ist ein Isomorphismus. Unter diesen Voraussetzungen folgt leicht, dass die Teilsequenz in der Horizontalen aus dem obigen Diagramm

$$\begin{tikzcd} & H^1_{\mathrm{et}}(F, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \arrow[dr, dotted, "\mathrm{res}"] & \\ H^1_{\mathrm{Nis}}(\mathfrak{X}_a, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{et}}(\mathfrak{X}_a, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & H^1_{\mathrm{et}}(F(\sqrt[\ell]{a}), \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)}) \end{tikzcd}$$

exakt ist. Die Injektivität der Restriktion reduziert sich damit auf das Verschwinden der Gruppe $H^1_{\mathrm{Nis}}(\mathfrak{X}_a, \mathbb{G}_{\mathrm{m}(\ell)})$. An dieser Stelle beenden wir die Demonstration der Beweisstrategie am Fall $n = 1$, da keine elementare Herleitung dieses Resultats vorliegt. In Kapitel III wird auf den allgemeinen Fall eingegangen.

3. Elementare Reduktionen und Vereinfachungen

Die folgenden beiden Lemmata nach Bruno Kahn [**Kah05**, Prop. 4] zeigen, warum es genügt, die Bloch-Kato-Vermutung nur modulo ℓ für alle Primzahlen $\ell \geq 2$ zu beweisen.

3.1. Lemma. Seien $m_1, m_2 \geq 2$ teilerfremde Zahlen, sodass die Charakteristik von k das Produkt $m_1 m_2$ nicht teilt. Dann gilt für jede natürliche Zahl $n \geq 0$ folgende Äquivalenz:

$$\mathrm{BK}(n, m_1 m_2, k) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{BK}(n, m_1, k) \text{ und } \mathrm{BK}(n, m_2, k).$$

Beweis. Wir schreiben im Folgenden μ_m für die Gruppe $\mu_m(k_{sep})$, die als abelsche Gruppe (aber nicht als Galoismodul) isomorph ist zu $\mathbb{Z}/m$. Unter unseren Voraussetzungen sind die Gruppen $\mu_{m_1 m_2}$ und $\mu_{m_1} \times \mu_{m_2}$ kanonisch isomorph (siehe z.B. Lang [**Lan65**, S. 204]). Mit der offensichtlichen $\mathrm{Gal}(k_{sep}/k)$-Operation auf $\mu_{m_1} \times \mu_{m_2}$ ist dies eine Isomorphie in der Kategorie der Galoismoduln. Hieraus folgt zusammen mit der Trivialität von $\mu_{m_1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_{m_2}$, dass die $\mathrm{Gal}(k_{sep}/k)$-Moduln $(\mu_{m_1 m_2})^{\otimes n}$ und $\mu_{m_1}^{\otimes n} \times \mu_{m_2}^{\otimes n}$ isomorph sind. Weiter ist nach dem chinesischen Restsatz ([**Lan65**, S. 64]) $K_n^M(k)/m_1 m_2 \cong K_n^M(k)/m_1 \times K_n^M(k)/m_2$. Wir erhalten so das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} K_n^M(k)/m_1 m_2 \arrow[rr, "\eta^n_{m_1 m_2, k}"] \arrow[d, "\wr"'] & & H^n_{\mathrm{et}}(k, \mu_{m_1 m_2}^{\otimes n}) \arrow[d, "\wr"] \\ K_n^M(k)/m_1 \times K_n^M(k)/m_2 \arrow[r, "\eta^n_{m_1,k} \times \eta^n_{m_2,k}"'] & & H^n_{\mathrm{et}}(k, \mu_{m_1}^{\otimes n}) \times H^n_{\mathrm{et}}(k, \mu_{m_2}^{\otimes n}) \end{tikzcd}$$

Hieraus folgt unsere Behauptung. □

3.2. Lemma. Sei $\ell \geq 2$ prim und k ein Körper der Charakteristik $\mathrm{char}\, k \neq \ell$. Dann gilt die Implikation

$$\mathrm{BK}(n-1, \ell, k) \text{ und } \mathrm{BK}(n, \ell, k) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{BK}(n, \ell^\nu, k) \text{ für alle } \nu \geq 1.$$

Beweis. Nach Korollar II.1.9 genügt es, die Aussage für solche Körper k zu beweisen, die eine primitive ℓ-te Einheitswurzel ζ beinhalten. In diesem Fall gilt für alle Zahlen m, die nicht von $\operatorname{char} k$ geteilt werden, die Isomorphie

$$\mu_\ell^{\otimes n} \cong \mathbb{Z}/\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/\ell \cong \mathbb{Z}/\ell \cong \mu_\ell$$

als Galoismoduln. Wir nehmen induktiv an, die Aussage sei bewiesen für $\nu - 1$. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell^{\nu-1} \xrightarrow{\cdot \ell} \mathbb{Z}/\ell^{\nu} \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell \longrightarrow 0$$

induziert eine lange exakte Sequenz von Kohomologiegruppen. Wir haben das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K_{n-1}^M(k)/\ell \arrow[r, "\cdot\{\zeta\}"] \arrow[d, "\eta_{\ell,k}^{n-1}"'] & K_n^M(k)/\ell^{\nu-1} \arrow[r, "\cdot \ell"] \arrow[d, "\eta_{\ell^{\nu-1},k}^{n}"'] & K_n^M(k)/\ell^{\nu} \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{\ell^{\nu},k}^{n}"'] & K_n^M(k)/\ell \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{\ell,k}^{n}"'] & 0 \\
H_{\mathrm{et}}^{n-1}(k,\mathbb{Z}/\ell) \arrow[r, "\varrho"'] & H_{\mathrm{et}}^{n}(k,\mathbb{Z}/\ell^{\nu-1}) \arrow[r] & H_{\mathrm{et}}^{n}(k,\mathbb{Z}/\ell^{\nu}) \arrow[r] & H_{\mathrm{et}}^{n}(k,\mathbb{Z}/\ell) &
\end{tikzcd}$$

wobei der Homomorphismus ϱ die Komposition von der Multiplikation mit der Klasse $[\zeta]$ in $H_{\mathrm{et}}^0(k,\mathbb{Z}/\ell) \cong \mathbb{Z}/\ell$ und dem Bockstein-Homomorphismus

$$\delta\colon H_{\mathrm{et}}^{n-1}(k,\mathbb{Z}/\ell) \to H_{\mathrm{et}}^{n}(k,\mathbb{Z}/\ell^{\nu-1})$$

zu obiger Sequenz ist. Man kann zeigen, dass damit die untere Sequenz immernoch exakt ist. Die obere Sequenz ist ebenfalls exakt außer vielleicht an der Stelle $K_n^M(k)/\ell^{\nu-1}$. Wegen

$$\{a_1,\dots,a_{n-1},\zeta\}\cdot \ell = \{a_1,\dots,a_{n-1},\zeta^\ell\} = \{a_1,\dots,a_{n-1},1\} = 0$$

liegt aber zumindest das Bild der Multiplikation mit $\{\zeta\}$ im Kern der ℓ-Multiplikation $K_n^M(k)/\ell^{\nu-1} \longrightarrow K_n^M(k)/\ell^{\nu}$. Desweiteren ist das Diagramm kommutativ. Nach unseren Voraussetzungen sind zudem die vertikalen Pfeile an der ersten, zweiten und vierten Stelle Isomorphismen. Mit einer Diagrammjagd analog derer aus dem Beweis des Fünferlemmas folgt die Behauptung. □

3.3. Korollar. Gilt $\mathrm{BK}(n,\ell,k)$ für alle Primzahlen $\ell \neq \operatorname{char} k$ und für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $\mathrm{BK}(n,m,k)$ für alle natürlichen Zahlen m, die kein Vielfaches von $\operatorname{char} k$ sind, und für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $m = \prod_{i=1}^{j} \ell_i^{m_i}$ die Primfaktorzerlegung von m. Somit gilt für festes n

$$\begin{aligned}
& \mathrm{BK}(n,\ell_i,k) \text{ und } \mathrm{BK}(n-1,\ell_i,k) \quad \text{für alle } i=1,\dots,j \\
\overset{3.2}{\Longrightarrow}\; & \mathrm{BK}(n,\ell_i^{m_i},k) \quad \text{für alle } i=1,\dots,j \\
\overset{3.1}{\Longleftrightarrow}\; & \mathrm{BK}(n,m,k).
\end{aligned}$$
□

Eine weitere Reduktion erlaubt es, sich im Beweis der Bloch-Kato-Vermutung auf den Fall eines Körpers der Charakteristik null zu beschränken.

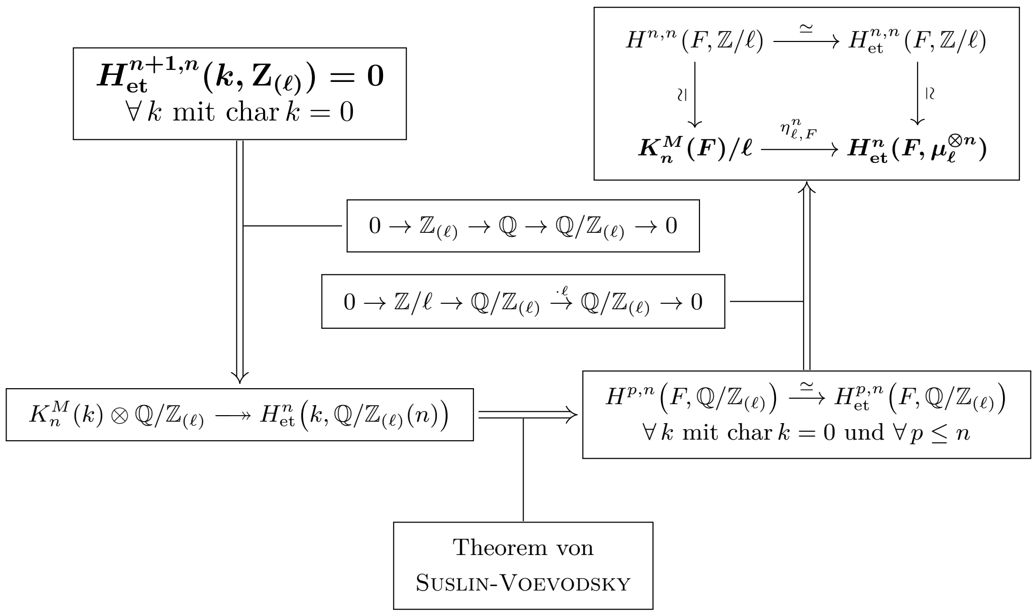
3.4. Lemma. Die Eigenschaft $\mathrm{BK}(n, \ell, k)$ für alle Körper der Charakteristik null und alle Zahlen n impliziert bereits $\mathrm{BK}(n, \ell)$ für alle n.

Beweisskizze nach [**Voe96**, 5.2]. Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Mithilfe von Satz II.1.8 kann man annehmen, dass k perfekt ist. Sei L der Quotientenkörper vom Ring der Witt-Vektoren über k. Dieser ist ein diskret bewerteter Körper der Charakteristik null mit Restklassenkörper k. Es existiert dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K_n^M(k)/\ell \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\eta_{\ell,k}^n"'] \arrow[rr, bend left, dotted, "\simeq"] & K_{n+1}^M(L)/\ell \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\eta_{\ell,L}^{n+1}"', "\wr"] & K_n^M(k)/\ell \arrow[d, "\eta_{\ell,k}^n"] \\
H_{\mathrm{et}}^n(k, \mu_\ell^{\otimes n}) \arrow[r, "h"'] \arrow[rr, bend right, dotted, "\simeq"'] & H_{\mathrm{et}}^{n+1}(L, \mu_\ell^{\otimes(n+1)}) \arrow[r, "\partial"'] & H_{\mathrm{et}}^n(k, \mu_\ell^{\otimes n}),
\end{tikzcd}$$

wobei die Abbildungen ∂ die zahmen Symbole bezüglich einem Primelement π der Bewertung bezeichnen (vgl. Abschnitt 1.E in Kapitel I für Milnor'sche K-Theorie sowie [**GS06**, Abschn. 6.8] für die Galoiskohomologie) und die Abbildungen h im Wesentlichen gegeben sind durch Multiplikation mit der Klasse von π (vgl. Abbildung h_π im Beweis von Satz I.1.12). Die Komposition von ∂ nach h ist die Identität auf der jeweiligen Struktur, und der mittlere vertikale Pfeil ist ein Isomorphismus nach Voraussetzung. Die Aussage folgt dann mit demselben Argument wie im Beweis von Satz II.1.8. $\square$

4. Hilbert 90 impliziert Bloch-Kato-Vermutung



Im diesem Abschnitt soll skizziert werden, wie die Bloch-Kato-Vermutung aus der motivischen Version von Hilberts Satz 90 folgt. Sofern nicht anders erwähnt, bezeichne k einen fest gewählten Körper der Charakteristik null.

4.1. Satz. Sei n eine natürliche Zahl und $\ell \geq 2$ eine Primzahl. Dann gilt folgende Implikation:

$$\begin{aligned} & \mathrm{H90}(n,\ell,F) \text{ für alle endliche erzeugten Erweiterungen } F/k. \\ \Longrightarrow\; & \mathrm{BK}(n,\ell,F) \text{ für alle endliche erzeugten Erweiterungen } F/k. \end{aligned}$$

Der Beweis benutzt im Wesentlichen die folgenden beiden Aspekte: zum einen die Interpretation von motivischer Kohomologie bezüglich Milnor'scher K-Gruppen (Satz II.2.16) bzw. étaler Kohomologiegruppen (Lemma II.2.18), und zum anderen das Hauptresultat (Theorem 5.9) von A. Suslin und V. Voevodsky in [**SV95**], welches die Äquivalenz zwischen der (schwachen Version von) Bloch-Kato-Vermutung und der Beilinson-Lichtenbaum-Vermutung zum Vergleich der motivischen Kohomologiegruppen in Nisnevich und étaler Topologie zeigt. Hierzu sei $\pi\colon (\operatorname{Spec} k)_{\mathrm{et}} \to (\operatorname{Spec} k)_{\mathrm{Nis}}$ der kanonische Morphismus zwischen Siten und $B/\ell(q)$ der Komplex $\tau_{\leq q}\boldsymbol{R}\pi_*\pi^*\mathbb{Z}/\ell(q)$.

4.2. Theorem (Suslin-Voevodsky)**.** Angenommen für alle endlich erzeugten Körpererweiterungen ist der Normresthomomorphismus $K^M_n(F)/\ell \to H^n_{\mathrm{et}}(k,\mu_\ell^{\otimes n})$ surjektiv. Dann ist durch den kanonischen Morphismus

$$\mathbb{Z}/\ell(n) \longrightarrow B/\ell(n)$$

ein Quasiisomorphismus zwischen Komplexen gegeben.

Obwohl dieses Resultat aus dem Jahre 1995 stammt und damit in der Frühphase von Voevodskys Arbeit am allgemeinen Beweis der Bloch-Kato-Vermutung formuliert wurde, ist der Beweis keineswegs trivial und setzt Kenntnisse in algebraischer Geometrie und Vertrautheit mit motivischer Kohomologietheorie voraus. Suslin und Voevodsky beweisen dieses Resultat allgemeiner für beliebige Körper k mit Singularitätenauflösung. Thomas Geißer und Marc Levine gelang in [**GL01**] ein Beweis gänzlich ohne Bedingungen an der Körper k. Allerdings benutzten sie im Gegensatz zu Voevodsky und Suslin eine Definition von motivischer Kohomologie durch höhere Chow-Gruppen, deren Äquivalenz zur klassischen Definition zum damaligen Zeitpunkt eben nur für Körper mit Singularitätenauflösung bekannt war (siehe [**VSF00**]) und erst in [**MVW06**, Thm. 19.1] für allgemeine Körper bewiesen wurde.

Aus technischen Gründen empfiehlt es sich, das Theorem für $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}$-Koeffizienten zu formulieren, was laut Voevodsky (siehe [**SV95**, S. 29 unten]) mit derselben Technik zu beweisen ist, wie das ursprüngliche Theorem mit $\mathbb{Z}/\ell$-Koeffizienten.

4.3. Theorem (Suslin-Voevodsky – $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}$-Koeffizienten)**.** Angenommen für alle endlich erzeugten Körpererweiterungen ist die durch den Normresthomomorphismus induzierte Abbildung $K_n^M(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \to H^n_{\text{et}}(k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}(n))$ surjektiv. Dann ist durch den kanonischen Morphismus

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}(n) \longrightarrow \tau_{\leq n}\mathrm{R}\pi_*\pi^*\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}(n)$$

ein Quasiisomorphismus zwischen Komplexen gegeben. Insbesondere ist für jedes glatte Schema über k und jede Zahl $p \leq n$ durch

$$H^{p,n}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H^{p,n}_{\text{et}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)})$$

ein Isomorphismus gegeben.

Wir fassen im folgenden Lemma einige elementare Aussagen im Zusammenhang mit $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}$ zusammen.

4.4. Lemma. Sei ℓ eine beliebige Primzahl und $\nu \in \mathbb{N}$. Es gilt dann:

1) Für Elemente $\frac{r}{s} + \mathbb{Z}_{(\ell)} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}$ existiert stets ein Vertreter der Form $\frac{t}{\ell^\mu} + \mathbb{Z}_{(\ell)} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}$ mit ganzen Zahlen t und $\mu \geq 0$.
2) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \cong \varinjlim_{\mu \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/\ell^\mu$.
3) Die Sequenz $0 \to \mathbb{Z}/\ell^\nu \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \xrightarrow{\cdot \ell^\nu} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \to 0$, bei der der zweite Morphismus durch $t + \ell^\nu\mathbb{Z} \mapsto \frac{t}{\ell^\nu} + \mathbb{Z}_{(\ell)}$ gegeben ist, ist exakt.

Beweis. Die folgenden Berechnungen sind allesamt elementar und enthalten keinerlei erwähnenswerter Ideen. Der Beweis kann also ohne weiteres übersprungen werden.

1) Für $\frac{r}{s} \in \mathbb{Z}_{(\ell)}$ ist die Aussage trivial ($t = 0$, μ beliebig). Sei also $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}_{(\ell)}$ mit teilerfremden ganzen Zahlen r, s. Dann existiert ein $\mu \geq 1$ mit $s = \ell^\mu s'$, sodass ℓ kein Teiler von s' ist. Da die Zahlen r, s' und ℓ^μ teilerfremd sind, existieren ganze Zahlen t und u mit $r = s't + \ell^\mu u$. Damit folgt:

$$\frac{r}{s} - \frac{t}{\ell^\mu} = \frac{r - s't}{\ell^\mu s'} = \frac{\ell^\mu u}{\ell^\mu s'} = \frac{u}{s'} \in \mathbb{Z}_{(\ell)}.$$

2) Durch $\mathbb{Z}/\ell \xrightarrow{\cdot\ell} \mathbb{Z}/\ell^2 \xrightarrow{\cdot\ell} \mathbb{Z}/\ell^3 \xrightarrow{\cdot\ell} \cdots$ ist ein induktives System mit injektiven Morphismen gegeben. Wir notieren das Bild von $x + \ell^\nu\mathbb{Z}$ in $\varinjlim \mathbb{Z}/\ell^\mu$ mit $[x + \ell^\nu\mathbb{Z}]$. Es gilt nach Definition des direkten Limes $[x + \ell^\nu\mathbb{Z}] = [\ell^\kappa x + \ell^{\kappa+\nu}\mathbb{Z}]$. Wir setzen unter Berücksichtigung von 1)

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} &\longrightarrow \varinjlim \mathbb{Z}/\ell^\mu \\ \frac{t}{\ell^\mu} &\longmapsto [t + \ell^\mu\mathbb{Z}]. \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass ψ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist, also nicht von der Wahl der Zahlen t und μ abhängt. Durch den Homomorphismus $[t + \ell^\mu\mathbb{Z}] \mapsto \frac{t}{\ell^\mu}$ ist offensichtlich die Umkehrabbildung gegeben.

3) Es gilt genau dann $\frac{t}{\ell^\nu} \in \mathbb{Z}_{(\ell)}$, wenn ℓ^ν ein Teiler von t ist, also wenn $t + \ell^\nu\mathbb{Z} = \ell^\nu\mathbb{Z}$ gilt. Somit ist die Sequenz an der ersten Stelle exakt. Für die Exaktheit an der zweiten Stelle ist die Inklusion im $\subset$ ker wegen $t + \ell^\nu\mathbb{Z} \mapsto t + \mathbb{Z}_{(\ell)} = \mathbb{Z}_{(\ell)}$ klar. Sei also $\frac{t}{\ell^\mu} + \mathbb{Z}_{(\ell)} \in \ker\bigl(- \cdot \ell^\nu\colon \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}\bigr)$, d.h. $\frac{\ell^\nu t}{\ell^\mu} \in \mathbb{Z}_{(\ell)}$. Im Falle $\mu \leq \nu$ ist $\frac{t}{\ell^\mu} + \mathbb{Z}_{(\ell)} = \frac{\ell^{\nu-\mu}t}{\ell^\nu} + \mathbb{Z}_{(\ell)}$ das Bild von $\ell^{\nu-\mu}t + \ell^\nu\mathbb{Z}$. Im Falle $\mu > \nu$ ist $\ell^{\mu-\nu}$ ein Teiler von t, d.h. wir haben $t = \ell^{\mu-\nu}t'$. In diesem Fall ist dann $\frac{t}{\ell^\mu} + \mathbb{Z}_{(\ell)}$ das Bild von $t' + \ell^\nu\mathbb{Z}$. Die Exaktheit an der dritten Stelle ist wieder offensichtlich, da $\frac{t}{\ell^\mu} + \mathbb{Z}_{(\ell)} = \frac{\ell^\nu t}{\ell^{\nu+\mu}} + \mathbb{Z}_{(\ell)}$ gilt. $\square$

Für den Beweis von Satz 4.1 arbeiten wir mit den beiden kurzen exakten Sequenzen $0 \to \mathbb{Z}_{(\ell)} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \to 0$ und $0 \to \mathbb{Z}/\ell \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \xrightarrow{\cdot\ell} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \to 0$. Diese dienen als Bindeglied zwischen lokalisierten Koeffizienten $\mathbb{Z}_{(\ell)}$ und endlichen Koeffizienten $\mathbb{Z}/\ell$. Wir haben zum einen das kommutative Diagramm aus den langen Kohomologiesequenzen zur ersten kurzen exakten Sequenz

$$\begin{tikzcd} H^{n,n}(X,\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n,n}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1,n}(X,\mathbb{Z}_{(\ell)}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1,n}(X,\mathbb{Q}) \arrow[d] \\ H^{n,n}_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{Q}) \arrow[r] & H^{n,n}_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \arrow[r] & H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{Z}_{(\ell)}) \arrow[r] & H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{Q}) \end{tikzcd} \tag{III.4.1}$$

Der erste und vierte vertikale Pfeil sind dabei nach Lemma II.2.14 Isomorphismen. Zum anderen induziert die zweite kurze exakte Sequenz das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1,n}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-1,n}_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \arrow[d] \\
H^{n-1,n}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-1,n}_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \arrow[d] \\
H^{n,n}(X,\mathbb{Z}/\ell) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n,n}_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{Z}/\ell) \arrow[d] \\
H^{n,n}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n,n}_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \arrow[d] \\
H^{n,n}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \arrow[r] & H^{n,n}_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)})
\end{tikzcd} \tag{III.4.2}$$

Beweis von Satz 4.1. Angenommen es gilt die Eigenschaft H90(n,ℓ,F) für alle endlich erzeugten Erweiterungen F/k. Aus dem Diagramm (III.4.1) entnehmen wir das Teildiagramm für $X = \operatorname{Spec} F$

$$\begin{tikzcd}
H^{n,n}(F,\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & H^{n,n}(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \arrow[d] & \\
H^{n,n}_{\mathrm{et}}(F,\mathbb{Q}) \arrow[r] & H^{n,n}_{\mathrm{et}}(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \arrow[r] & H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(F,\mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0.
\end{tikzcd}$$

Es folgt elementar, dass $H^{n,n}(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \to H^{n,n}_{\mathrm{et}}(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)})$ surjektiv ist für alle F/k. Dieser Homomorphismus stimmt mit dem Normresthomomorphismus mit $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}$-Koeffizienten, also

$$K_n^M(F) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)} \longrightarrow H^n_{\mathrm{et}}(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)})$$

überein. Mit dem Theorem von Suslin-Voevodsky (Thm. 4.3) erhalten wir nun, dass durch die kanonischen Abbildungen

$$H^{p,n}(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H^{p,n}_{\mathrm{et}}(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\ell)})$$

Isomorphismen sind für $p \le n$. Das Diagramm (III.4.2) für $X = \operatorname{Spec} F$ liefert mit dem Fünferlemma schließlich sofort

$$\begin{tikzcd}
H^{n,n}(F,\mathbb{Z}/\ell) \arrow[r, "\simeq"] & H^{n,n}_{\mathrm{et}}(F,\mathbb{Z}/\ell) \\
K_n^M(F)/\ell \arrow[r, "\eta^n_{\ell,k}"'] \arrow[u, "\wr", "\mathrm{II.2.17}"'] & H^n_{\mathrm{et}}(F,\mu_\ell^{\otimes n}) \arrow[u, "\mathrm{II.2.18}", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

für alle F/k, d.h. es gilt BK(n,ℓ,F) für alle F/k endlich erzeugt. □

4.5. Korollar. $\mathrm{H90}(n, \ell)$ impliziert $\mathrm{BK}(n, \ell)$. Weiter impliziert $\mathrm{H90}(n, \ell, k)$ für alle Körper der Charakteristik null, dass $\mathrm{BK}(n, \ell, k)$ für alle Körper der Charakteristik null gilt. $\square$

5. Hilbert 90 für ℓ-spezielle Körper mit $K_n^M(k)/\ell = 0$

In diesem Abschnitt soll dargestellt werden, wie im induktiven Beweis der Eigenschaft $\{\mathrm{H90}(n, \ell)$ für alle $n \in \mathbb{N}\}$ die Aussage $\mathrm{H90}(n, \ell, k)$ für eine feste Zahl $n \geq 2$ und einen beliebigen Körper k der Charakteristik null mit den Eigenschaften

1) k ist ℓ-speziell, d.h. jede endliche Erweiterung von k hat Grad ℓ^ν für ein $\nu \geq 0$.
2) $K_n^M(k)/\ell = 0$.

aus der Eigenschaft $\mathrm{H90}(n-1, \ell)$ abgeleitet wird. Die erste Eigenschaft liefert uns viele technische Argumente in den Berechnungen mit Milnor'scher K-Theorie und Kohomologie. So wird zum Beispiel die Gruppe $K_n^M(E)$ einer endlichen zyklischen Erweiterung L/k bereits von Elementen einer ganz bestimmten Form erzeugt (Lemma 5.3 unten). Zudem hat die Kohomologiegruppe $H^n_{\mathrm{et}}(k, \mu_\ell^{\otimes n})$ in diesem Fall die einfachere Gestalt $H^n_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}/\ell)$. Die zweite Eigenschaft impliziert das Verschwinden der Kohomologiegruppe $H^n_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}/\ell)$, da wir – wie später im Beweis von Satz 5.9 dargestellt – für jedes Element α in $H^n_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}/\ell)$ zeigen können, dass es im Bild einer über $K_n^M(k)/\ell$ spaltenden Abbildung liegt.

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}/\ell) \arrow[rr, dotted, "\exists\text{Abb. mit } \alpha\in\mathrm{im}"] \arrow[dr, dotted, "\exists"'] & & H^n_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}/\ell) \ni \alpha \\
& K_n^M(k)/\ell = 0 \arrow[ur, "\eta^n_{\ell,k}"'] &
\end{tikzcd}$$

Wir erinnern zunächst an einige Definitionen und führen ein paar generelle Resultate an. Die nächsten beiden Punkte zitieren [**EKM08**, Prop. 101.15 und 101.16].

5.1. Definition & Lemma. Ein Körper k heißt ***ℓ*-speziell**, falls jede endliche Erweiterung L/k vom Grad ℓ^ν für ein $\nu \in \mathbb{N}$ ist. Es existiert dann stets ein Turm von Körpererweiterungen

$$k = k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset k_\nu = L$$

mit $[k_i : k_{i-1}] = \ell$.

Beweis. Da wir voraussetzen, dass k von Charakteristik null ist, ist jede endliche Abbildung separabel. Sei k_{nor} der normale Abschluss von L/k. Aus der Definition von ℓ-speziellen Körpern folgt zusammen mit dem Hauptsatz der Galoistheorie sofort, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(k_{nor}/k)$ eine pro-ℓ Gruppe ist. Somit existiert nach den Sylow-Sätzen eine Kette von Gruppen

$$\mathrm{Gal}(k_{nor}/k) = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_\nu = \mathrm{Gal}(k_{nor}/L),$$

sodass der Index von H_i in H_{i-1} gerade ℓ beträgt. Die Körper $k_i = k_{nor}^{H_i}$ erfüllen dann die Behauptung. $\square$

5.2. Definition & Lemma. Sei k ein Körper der Charakteristik null. Dann existiert eine Körpererweiterung L/k, sodass gilt:

1) L ist ℓ-speziell.
2) Für jeden Zwischenkörper $k \subset F \subset L$ mit F/k endlich gilt, dass ℓ den Grad $[F : k]$ der Erweiterung nicht teilt.

Der Körper L ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißt **ℓ-spezieller Abschluss** von k.

Beweis. Sei k_{sep} der separable Abschluss von k, Δ eine ℓ-Sylowuntergruppe der absoluten Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(k_{sep}/k)$ und $L = k_{sep}^{\Delta}$ der Fixkörper von k_{sep} unter Automorphismen von Δ. Dann erfüllt L die obigen Eigenschaften. □

5.3. Lemma. Sei k ein ℓ-spezieller Körper und E/k eine zyklische Erweiterung vom Grad ℓ. Dann wird $K_n^M(E)$ erzeugt von Elementen der Form $\{b, a_2, \ldots, a_n\}$ mit $b \in E^\times$ und $a_i \in k^\times$.

Beweis. Die Erweiterung E hat die Gestalt $k(\sqrt[\ell]{a})$ für ein $a \in k^\times \setminus k^{\times \ell}$. Sei $\pi \in k[T]$ das Minimalpolynom von a und c die Klasse von T in $E = k[T]/(\pi)$. Aus Korollar I.1.15 folgt, dass $K_*^M(E)$ als $K_*^M(k)$-Modul erzeugt ist von Elementen der Form $\{\pi_1(c), \ldots, \pi_r(c)\}$ mit irreduziblen, normierten Polynomen π_i, für deren Grade $1 \leq \deg \pi_1 < \ldots < \deg \pi_r \leq \ell - 1$ gilt. Da nach Voraussetzung keine endlichen Erweiterungen vom Grad $\leq \ell - 1$ existieren, gilt $\deg \pi_1 = 1$ und $r = 1$. Somit gilt $K_*^M(E) = K_*^M(k) \oplus \{\pi_1(c)\} \cdot K_*^M(k)$, woraus die Behauptung folgt. □

5.4. Lemma. Sei k ein ℓ-spezieller Körper. Dann gilt $H^n_{\text{et}}(k, \mu_\ell^{\otimes n}) = H^n_{\text{et}}(k, \mathbb{Z}/\ell)$.

Beweis. Der Körper k enthält die Gruppe $\mu_\ell(k_{sep}^\times)$ der ℓ-ten Einheitswurzeln, da sonst die Erweiterung $k(\zeta)/k$ für eine primitive ℓ-te Einheitswurzel $\zeta \in k_{sep}^\times$ endlich von Grad $\ell - 1$ wäre, was nach Voraussetzung nicht möglich ist. Somit ist $\mu_\ell(k_{sep}^\times)$ als Galoismodul isomorph zum trivialen Modul $\mathbb{Z}/\ell$ und folglich auch $\mu_\ell(k_{sep}^\times)^{\otimes n} \cong \mathbb{Z}/\ell$ wegen der natürlichen Isomorphie $\mathbb{Z}/r \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/s \cong \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(r, s)$. □

5.5. Lemma. Sei α ein beliebiges Element von $H^n_{\text{et}}(k, \mu_\ell^{\otimes n})$. Dann existiert eine endliche Erweiterung E/k mit $\alpha_E = \mathrm{res}_{E/k}(\alpha) = 0$ in $H^n_{\text{et}}(E, \mu_\ell^{\otimes n})$. *(Ohne Beweis.)*

Der Schlüssel zum Beweis von $\mathrm{H90}(n, \ell, k)$ liegt in der folgenden Eigenschaft, deren Gültigkeit von eigenem Interesse ist.

5.6. Definition (Hilberts Satz 90 für K_n^M)**.** Sei E/k eine zyklische Erweiterung von endlichem Grad und σ ein Erzeuger von $\mathrm{Gal}(E/k)$. Mit $1 - \sigma$ bezeichnen wir die Abbildung $K_n^M(E) \to K_n^M(E)$, die einen Erzeuger $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ abbildet auf $a - \sigma(a)$, wobei $\sigma(a) \coloneqq \{\sigma a_1, \ldots, \sigma a_n\}$. Wir bezeichnen die Exaktheit der Sequenz

$$K_n^M(E) \xrightarrow{1-\sigma} K_n^M(E) \xrightarrow{\mathrm{cor}_{E/k}} K_n^M(k)$$

als **Hilberts Satz 90 für K_n^M**.

Für $n = 1$ stimmt die Sequenz $K_1^M(E) \xrightarrow{1-\sigma} K_1^M(E) \xrightarrow{\mathrm{cor}_{E/k}} K_1^M(k)$ mit der aus (I.2.6) überein. Somit können wir Hilberts Satz 90 für K_n^M als eine natürliche Erweiterung des klassischen Satzes auf höhere Milnor'sche K-Gruppen ansehen.

5.7. Lemma. Angenommen es gilt $\mathrm{H90}(n-1,\ell)$. Sei E/k eine zyklische Erweiterung vom Grad ℓ und σ ein Erzeuger von $\mathrm{Gal}(E/k)$. Dann gilt Hilberts Satz 90 für K_{n-1}^M, d.h. die Sequenz

$$K_{n-1}^M(E) \xrightarrow{1-\sigma} K_{n-1}^M(E) \xrightarrow{\mathrm{cor}_{E/k}} K_{n-1}^M(k)$$

ist exakt.

Beweis. Siehe Kahn [**Kah05**, Kor. 15] oder Voevodsky [**Voe03a**, Kor. 6.11]. □

5.8. Satz. Angenommen es gilt $\mathrm{H90}(n-1,\ell)$. Sei k ℓ-spezieller Körper von Charakteristik null und E/k eine zyklische Erweiterung vom Grad ℓ, sodass $\mathrm{cor}_{E/k}\colon K_{n-1}^M(E) \to K_{n-1}^M(k)$ surjektiv ist. Dann ist

$$K_n^M(E) \xrightarrow{1-\sigma} K_n^M(E) \xrightarrow{\mathrm{cor}_{E/k}} K_n^M(k) \longrightarrow 0$$

exakt.

Der Beweis ist dargestellt nach Bruno Kahn [**Kah05**, S. 1118].

Beweis. Die Surjektivität von $\mathrm{cor}_{E/k}\colon K_n^M(E) \to K_n^M(k)$ folgt unter Benutzung der Transferformel aus der Annahme, dass $K_{n-1}^M(E) \to K_{n-1}^M(k)$ surjektiv ist: Ist $\{a_1,\dots,a_n\}$ ein Erzeuger von $K_n^M(k)$, so existiert ein Element $\beta \in K_{n-1}^M(E)$, welches von der Korestriktion auf $\{a_1,\dots,a_{n-1}\}$ abgebildet wird. Folglich gilt

$$\{a_1,\dots,a_n\} = \mathrm{cor}_{E/k}(\beta)\cdot\{a_n\} = \mathrm{cor}_{E/k}(\beta\cdot\{a_n\}_E) \in \mathrm{im}\,\mathrm{cor}_{E/k}.$$

Um die Exaktheit an der zweiten Stelle zu sehen, zeigen wir, dass $\mathrm{cor}_{E/k}$ einen Isomorphismus $K_n^M(E)/(1-\sigma)K_n^M(E) \to K_n^M(k)$ induziert, wobei hier $(1-\sigma)K_n^M(E)$ das Bild der Abbildung $1-\sigma$ bezeichne. Da $\mathrm{cor}_{E/k}$ nach dem klassischen Homomorphiesatz auch einen Isomorphismus $K_n^M(E)/\ker\mathrm{cor}_{E/k} \to K_n^M(k)$ induziert, folgt hieraus $\mathrm{im}(1-\sigma) = \ker\mathrm{cor}_{E/k}$. Damit $\mathrm{cor}_{E/k}$ über $K_n^M(E)/(1-\sigma)K_n^M(E)$ faktorisiert, muss das Bild von $1-\sigma$ im Kern von $\mathrm{cor}_{E/k}$ liegen. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 5.3 und der Transferformel: Sei $\{b,a_2,\dots,a_n\}$ ein Erzeuger von $K_n^M(E)$ mit $b \in E^\times$ und $a_i \in k^\times$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\mathrm{cor}_{E/k}\big((1-\sigma)\{b,a_2,\dots,a_n\}\big) &= \mathrm{cor}_{E/k}\big(\{\tfrac{b}{\sigma b},a_2,\dots,a_n\}\big)\\ &= \{\mathrm{cor}_{E/k}(\tfrac{b}{\sigma b}),a_2,\dots,a_n\}\\ &= \{1,a_2,\dots,a_n\} = 0\end{aligned}$$

Wir konstruieren nun einen Morphismus in die entgegengesetzte Richtung. Sei

$$\begin{aligned}K_n^M(k) &\xrightarrow{\phi} K_n^M(E)/(1-\sigma)K_n^M(E)\\ \{a_1,\dots,a_n\} &\longmapsto \beta\cdot\{a_n\}_E + (1-\sigma)K_n^M(E),\end{aligned}$$

wobei $\beta \in K^M_{n-1}(E)$ ein Element ist, welches durch $\mathrm{cor}_{E/k}$ abgebildet wird auf $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des Elements β. Denn liegt $\beta - \beta'$ im Kern von $\mathrm{cor}_{E/k}$, so folgt aus der Exaktheit der Sequenz in Lemma 5.7, dass ein Element $\gamma \in K^M_{n-1}(E)$ mit $(1-\sigma)(\gamma) = \beta - \beta'$ existiert. Folglich gilt

$$\begin{aligned}(\beta - \beta') \cdot \{a_n\}_E &= (1-\sigma)(\gamma) \cdot \{a_n\}_E \\ &= \gamma \cdot \{a_n\}_E - \sigma(\gamma) \cdot \{a_n\}_E \\ &= \gamma \cdot \{a_n\}_E - \sigma(\gamma \cdot \{a_n\}_E) \\ &= (1-\sigma)(\gamma \cdot \{a_n\}_E) \in \mathrm{im}(1-\sigma).\end{aligned}$$

Desweiteren müssen wir die Wohldefiniertheit bezüglich der Relationen in $K^M_n(k)$ prüfen. Die Identität

$$\phi(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) + \phi(\{a_1', a_2, \dots, a_n\}) = \phi(\{a_1 a_1', a_2, \dots, a_n\})$$

folgt unmittelbar aus der Linearität der Korestriktion. Sei nun $\alpha = \{a_1, \dots, a_n\}$ ein Element von $K^M_n(k)$ mit $a_i + a_j = 1$ und $\beta \cdot \{a_n\}$ sein Bild unter ϕ. Im Falle $i, j < n$ liegt β in $\ker \mathrm{cor}_{E/k} = \mathrm{im}(1-\sigma) \subset K^M_{n-1}(E)$ und mit dem gleichen Argument wie oben liegt $\beta \cdot \{a_n\}_E$ im Bild von $(1-\sigma)$. Ansonsten betrachten wir stellvertretend den Fall $a_1 + a_n = 1$. Gilt $a_1 = c^\ell \in k^{\times \ell}$ für ein Element $c \in k^\times$, so verschwindet das Bild von $\{a_1, \dots, a_n\}$ unter ϕ ganz unabhängig von der Bedingung $a_1 + a_n = 1$. Wir haben

$$\mathrm{cor}_{E/k}(\beta) = \{a_1, \dots, a_{n-1}\} = \ell \cdot \{c, a_2, \dots, a_{n-1}\} = \mathrm{cor}_{E/k}(\{c, a_2, \dots, a_{n-1}\}_E),$$

somit kommt $\beta - \{c, a_2, \dots, a_{n-1}\} \in \ker \mathrm{cor}_{E/k} = \mathrm{im}(1-\sigma) \subset K^M_{n-1}(E)$ nach Lemma 5.8 von einem Element $\delta \in K^M_{n-1}(E)$ und es gilt

$$\begin{aligned}\beta \cdot \{a_n\} &= \big((1-\sigma)(\delta) + \{c, a_2, \dots, a_{n-1}\}\big) \cdot \{a_n\} \\ &= (1-\sigma)(\delta) \cdot \{a_n\} + \{c, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\} \\ &= (1-\sigma)(\delta \cdot \{a_n\}) + (1-\sigma)\,\{c, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\} \\ &= (1-\sigma)(\delta \cdot \{a_n\} + \{c, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\} \in (1-\sigma) K^M_n(E).\end{aligned}$$

Sei nun $a_1 \notin k^{\times \ell}$, $F = k(\sqrt[\ell]{a_1})$, $c \in F$ ein Element mit $c^\ell = a_1$ und $L = EF$ das Kompositum von E und F. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & K^M_{n-1}(E) \arrow[dl, "\mathrm{cor}_{E/k}"'] \arrow[dr, "\mathrm{res}_{L/E}"] & \\ K^M_{n-1}(k) \arrow[dr, "\mathrm{res}_{F/k}"'] & & K^M_{n-1}(L) \arrow[dl, "\mathrm{cor}_{L/F}"] \\ & K^M_{n-1}(F) & \end{tikzcd}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{cor}_{L/F}(\beta_L) &= \mathrm{cor}_{E/k}(\beta)_F = \{a_1,\dots,a_{n-1}\}_F = \ell\cdot\{c,a_2,\dots,a_{n-1}\}\\ &= \mathrm{cor}_{L/F}(\{c,a_2,\dots,a_{n-1}\}_L).\end{aligned}$$

Also liegt $\beta_L-\{c,a_2,\dots,a_{n-1}\}_L$ im Kern von $\mathrm{cor}_{L/F}$ und wir haben ein Element $\delta\in K^M_{n-1}(L)$ mit $(1-\sigma)(\delta)=\beta_L-\{c,a_2,\dots,a_{n-1}\}_L$. Weiter bildet die Körpernorm $N_{F/k}$ das Element $1-c$ auf $1-a_1$ ab, was leicht aus der Definition von $N_{F/k}(1-c)$ als Determinante der Linksmultiplikation mit $1-c$ folgt. Damit ergibt sich unter Ausnutzung der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} & K^M_{n-1}(E) & \\ K^M_{n-1}(k) \arrow[ur, "\mathrm{res}_{E/k}"] & & K^M_{n-1}(L) \arrow[ul, "\mathrm{cor}_{L/E}"'] \\ & K^M_{n-1}(F) \arrow[ul, "\mathrm{cor}_{F/k}"] \arrow[ur, "\mathrm{res}_{L/F}"'] & \end{tikzcd}$$

folgende Identität:

$$\begin{aligned}\beta\cdot\{a_n\}_E &= \beta\cdot\{1-a_1\}_E\\ &= \beta\cdot\mathrm{cor}_{F/k}(\{1-c\})_E\\ &= \beta\cdot\mathrm{cor}_{L/E}(\{1-c\}_L)\\ &= \mathrm{cor}_{L/E}(\beta_L\cdot\{1-c\}_L)\\ &= \mathrm{cor}_{L/E}((\beta_L-\{c,a_2,\dots,a_{n-1}\}_L)\cdot\{1-c\}_L)\\ &= \mathrm{cor}_{L/E}((1-\sigma)(\delta)\cdot\{1-c\}_L)\\ &= \mathrm{cor}_{L/E}((1-\sigma)(\delta\cdot\{1-c\}_L))\\ &= (1-\sigma)\mathrm{cor}_{L/E}(\delta\cdot\{1-c\}_L)\in(1-\sigma)K^M_n(E).\end{aligned}$$

Der Homomorphismus ϕ ist nach Konstruktion offensichtlich ein Schnitt der Korestriktion auf $K^M_n(E)/(1-\sigma)K^M_n(E)$ und damit injektiv. Desweiteren ist die Komposition von ϕ nach $\mathrm{cor}_{E/k}$ die Identität auf $K^M_n(E)$, denn ist $\{b,a_2,\dots,a_n\}$ ein Erzeuger mit $b\in E^\times$, $a_2,\dots,a_n\in k^\times$, so gilt

$$\begin{aligned}\{b,a_2,\dots,a_n\}+(1-\sigma)K^M_n(E) &\xmapsto{\mathrm{cor}_{E/k}} \{\mathrm{cor}_{E/k}(\{b\}),a_2,\dots,a_n\}\\ &\xmapsto{\ \phi\ } \{b,a_2,\dots,a_n\}+(1-\sigma)K^M_n(E),\end{aligned}$$

denn $\mathrm{cor}_{E/k}(\{b,a_2,\dots,a_{n-1}\})=\{\mathrm{cor}_{E/k}(\{b\}),a_2,\dots,a_{n-1}\}$. Also ist ϕ auch surjektiv und folglich ein Isomorphismus. $\square$

5.9. Satz. Angenommen es gilt H90($n-1,\ell$). Sei k ein ℓ-spezieller Körper der Charakteristik null mit $K_n^M(k)/\ell = 0$. Dann:

1) Für jede endliche Erweiterung E/k gilt $K_n^M(E)/\ell = 0$.
2) Es gilt $H^n_{\text{et}}(k,\mathbb{Z}/\ell) = 0$.

Beweis. Nach Lemma 5.1 existiert zu jeder endlichen Erweiterung L/k ein Turm von Körpererweiterungen $k = k_0 \subset \cdots \subset k_m = L$ mit der Eigenschaft $[k_{i+1} : k_i] = \ell$. Weiter folgt mit dem Turmsatz sofort, dass jede endliche Erweiterung eines ℓ-speziellen Körpers wieder ℓ-speziell ist. Daher genügt es bei 1) den Fall zu betrachen, dass E/k eine zyklische Erweiterung vom Grad ℓ ist, woraus induktiv die Behauptung folgt. Es existiert dann also ein $a \in k^\times$ mit $E = k(\sqrt[\ell]{a})$. Wir haben unter Benutzung von Lemma 5.4 das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K^M_{n-1}(E)/\ell \arrow[r, "\mathrm{cor}_{E/k}"] \arrow[d, "\wr"', "\eta^{n-1}_{\ell,E}"] & K^M_{n-1}(k)/\ell \arrow[r, "\cdot\{a\}"] \arrow[d, "\wr"', "\eta^{n-1}_{\ell,k}"] & K^M_n(k)/\ell = 0 \arrow[d, "\eta^n_{\ell,k}"] & \\ H^{n-1}_{\text{et}}(E,\mathbb{Z}/\ell) \arrow[r, "\mathrm{cor}_{E/k}"'] & H^{n-1}_{\text{et}}(k,\mathbb{Z}/\ell) \arrow[r, "\cup(a)"'] & H^n_{\text{et}}(k,\mathbb{Z}/\ell) \arrow[r, "\mathrm{res}_{E/k}"'] & H^n_{\text{et}}(E,\mathbb{Z}/\ell) \end{tikzcd} \tag{III.5.1}$$

Die beiden linken vertikalen Pfeile sind Isomorphismen wegen unserer Annahme H90($n-1,\ell$) (und somit BK($n-1,\ell$)). Weiter ist nach Voevodsky [**Voe03a**, Prop. 5.2] die untere Zeile exakt. Es folgt damit elementar, dass auch die obere Zeile exakt ist. Wegen dem Verschwinden von $K_n^M(k)/\ell$ ist $\mathrm{cor}_{E/k}\colon K^M_{n-1}(E)/\ell \to K^M_{n-1}(k)/\ell$ trivialerweise surjektiv und wir erhalten mit Lemma 5.8 auf natürliche Art und Weise eine exakte Sequenz

$$K_n^M(E)/\ell \xrightarrow{1-\sigma} K_n^M(E)/\ell \xrightarrow{\mathrm{cor}_{E/k}} K_n^M(k)/\ell = 0,$$

wobei σ ein Erzeuger von $\mathrm{Gal}(E/k)$ ist. Also ist $1-\sigma$ ein surjektiver Endomorphismus auf $K_n^M(E)/\ell$ und damit auch die ℓ-fache Hintereinanderausführung $(1-\sigma)^\ell$. Dies ist aber gerade die Nullabbildung auf $K_n^M(E)/\ell$, was leicht aus der Formel

$$(1-\sigma)^\ell = \sum_{i=1}^{\ell} (-1)^i \tbinom{\ell}{i} \cdot \sigma^i$$

folgt. Somit haben wir $K_n^M(E)/\ell = 0$.

Um 2) zu zeigen wählen wir ein beliebiges Element $\alpha \in H^n_{\text{et}}(k,\mathbb{Z}/\ell)$. Es existiert nach Lemma 5.5 ein endlicher Zerfällungskörper E für das Symbol α, d.h. es gilt $0 = \alpha_E \in H^n_{\text{et}}(E,\mathbb{Z}/\ell)$. Es genügt die Behauptung für den Fall zu beweisen, dass E eine zyklische Erweiterung vom Grad ℓ ist. Denn andernfalls betrachtet man den Turm $k = k_0 \subset \cdots \subset k_m = E$ mit $[k_{i+1} : k_i] = \ell$. Das Resultat aus 1) besagt dann $K_n^M(k_i)/\ell = 0$ für alle i, und wir können induktiv zeigen, dass $\alpha_{k_i} = 0$ in $H^n_{\text{et}}(k_i,\mathbb{Z}/\ell)$ gilt (angefangen bei $i = m-1$ bis hin zu $i = 0$). Sei nun also $E = k(\sqrt[\ell]{a})$ eine zyklische Erweiterung von k, sodass das Bild α_E von α unter der Restriktion $H^n_{\text{et}}(k,\mathbb{Z}/\ell) \to H^n_{\text{et}}(E,\mathbb{Z}/\ell)$ verschwindet. Wir betrachen erneut das kommutative

Diagramm (III.5.1) oben. Aus der Exaktheit der zweiten Zeile folgt $\alpha = \alpha_0 \cup (a)$ für ein Element $\alpha_0 \in H^{n-1}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}/\ell)$. Die Kommutativität sagt uns schließlich $\alpha = 0$. $\square$

5.10. Theorem. Sei k ein ℓ-spezieller Körper der Charakteristik null mit $K^M_n(k)/\ell = 0$. Dann impliziert H90$(n-1, \ell)$ die Eigenschaft H90(n, ℓ, k).

Beweis. Wie bereits im Beweis zu Satz 4.1 benutzen wir die kurze exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z}_{(\ell)} \xrightarrow{\cdot\ell} \mathbb{Z}_{(\ell)} \to \mathbb{Z}/\ell \to 0$ mit dem dritten Pfeil gegeben durch $r/s \mapsto rs^{-1} \bmod \ell$, um lokalisierte und endliche Koeffizienten in Verbindung zu setzen. Die induzierte lange exakte Kohomologiesequenz enthält

$$H^{n,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}/\ell) \longrightarrow H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \xrightarrow{\cdot\ell} H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}).$$

Die erste Gruppe ist nach Satz II.2.18 isomorph zu $H^n_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}/\ell)$ und verschwindet damit nach Satz 5.9. Die Multiplikation mit ℓ ist also ein Monomorphismus auf $H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ und wir haben ein induktives System

$$\cdots \xhookrightarrow{\cdot\ell} H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \xhookrightarrow{\cdot\ell} H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \xhookrightarrow{\cdot\ell} \cdots$$

Der direkte Limes dieses Systems ist

$$\begin{aligned} \varinjlim H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) &\cong H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \varinjlim \mathbb{Z}_{(\ell)}) \\ &\cong H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Q}) \\ &\cong H^{n+1,n}(k, \mathbb{Q}) && \text{nach Lemma II.2.14} \\ &= 0 && \text{nach Lemma II.2.11.} \end{aligned}$$

Da bei induktiven Systemen mit injektiven Morphismen die kanonische Abbildung von einem Objekt des Systems in den induktiven Limes injektiv ist, haben wir

$$H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \hookrightarrow \varinjlim H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$$

und somit die Behauptung $H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$. $\square$

6. Hilbert 90 für beliebige Körper der Charakteristik null

Um den induktiven Beweis von H90(n, ℓ) zu vollenden, genügt es nach Theorem 5.10, zu jedem Körper k einen ℓ-speziellen Erweiterungskörper $k^{(\infty)}$ der Charakteristik null mit der Eigenschaft $K^M_n(k^{(\infty)})/\ell = 0$ zu finden, sodass die natürliche Abbildung

$$H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k^{(\infty)}, \mathbb{Z}_{(\ell)})$$

injektiv ist. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man diese Körpererweiterung erhält. Der Beweis der Bloch-Kato-Vermutung wird so auf folgende Eigenschaft reduziert, deren Gültigkeit wir bei der Konstruktion voraussetzen und im Abschnitt 7 erläutern:

(III.6.1) Für jeden Körper F der Charakteristik null und zu jedem nichttrivialen Symbol $\underline{a} = \{a_1, \ldots, a_n\} \in K_n^M(F)/\ell$ existiert ein Erweiterungskörper $F_{\underline{a}}/F$ mit den Eigenschaften

1) Die K-Gruppe von $F_{\underline{a}}$ zerfällt $\underline{a}$, d.h. $\underline{a}_{F_{\underline{a}}} = 0$ in $K_n^M(F_{\underline{a}})/\ell$.
2) $H_{\text{et}}^{n+1,n}(F, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H_{\text{et}}^{n+1,n}(F_{\underline{a}}, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ ist injektiv.

6.1. Theorem. Angenommen es gilt obige Eigenschaft (III.6.1). Sei k ein beliebiger Körper der Charakteristik null. Dann gibt es eine Körpererweiterung $k^{(\infty)}/k$ mit den anfangs erwähnten Eigenschaften:

1) $k^{(\infty)}$ ist ℓ-speziell.
2) $K_n^M(k^{(\infty)})/\ell = 0$.
3) $H_{\text{et}}^{n+1,n}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H_{\text{et}}^{n+1,n}(k^{(\infty)}, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ ist injektiv.

Gilt ferner H90$(n-1, \ell)$, so folgt mit Satz 5.10 insbesondere H90(n, ℓ, k).

Der Rest des Abschnitts beschäftigt sich mit dem Beweis dieser Aussage. Die Konstruktion des Körpers $k^{(\infty)}$ geht zurück auf Merkurjev und benutzt dessen Technik eines unendlichen Turms – dem sogenannten Merkurjev-Turm – von Körpererweiterungen, der erstmals implizit in Merkurjevs Arbeit [**Mer81**] zum Einsatz kam und seinen Namen (in einem anderen Kontext) von Vishik [**Vis09**] erhielt. Wir zeigen zunächst, wie man für einen beliebigen Körper k der Charakteristik null einen ℓ-speziellen Erweiterungskörper k' derart konstruiert, dass $\alpha_{k'} = 0$ in $K_n^M(k')/\ell$ gilt für jedes Element α aus $K_n^M(k)/\ell$, und dass der kanonische Homomorphismus $H_{\text{et}}^{n+1,n}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ injektiv abbildet nach $H_{\text{et}}^{n+1,n}(k', \mathbb{Z}_{(\ell)})$. Anschließend definieren wir zu einem fest gewählten Körper k induktiv einen Turm von Körpererweiterungen

$$k = k^{(0)} \subset k^{(1)} \subset k^{(2)} \subset \cdots$$

durch $k^{(i+1)} = \big(k^{(i)}\big)'$ und setzen $k^{(\infty)} = \bigcup_{i=0}^{\infty} k^{(i)}$.

6.A. Konstruktion von k'. Der Grundgedanke ist, beginnend mit k sukzessiv zu größeren Körpern überzugehen, in deren K-Gruppen weitere Symbole $\underline{a}$ aus $K_n^M(k)/\ell$ verschwinden. Wir bewerkstelligen dies im Wesentlichen wie im Fall $n = 1$ in Abschnitt 2.B, d.h. wir gehen mittels transfiniter Rekursion zu Körpererweiterungen über, die sukzessiv weitere Symbole spalten. Die Unterschiede zum Grad eins bestehen im Prinzip aus zwei Punkten. Zum einen benutzen wir an dieser Stelle keine explizite Darstellung eines Körpers $k_{\underline{a}}$, dessen K-Gruppe $\underline{a}_{k_{\underline{a}}}$ spaltet, sondern stützen uns lediglich auf die Annahme (III.6.1) von dessen Existenz. Zum anderen definieren wir k' als den ℓ-speziellen Abschluss des Limes der transfiniten Rekursion und als den Limes selbst wie im Fall $n = 1$. Daher brauchen wir auch ein zusätzliches Argument, warum die Injektivität der Restriktionen erhalten bleibt.

Wir wählen also eine Wohlordnung auf der Menge von Symbolen $\underline{a} \in K_n^M(k)/\ell$, sodass diese Menge geschrieben werden kann als $\{\underline{a}_\lambda \mid \lambda < \kappa\}$ für eine Ordinalzahl κ. Analog zum Vorgehen in Abschnitt 2.B ist der Rekusionsanfang gegeben durch $k_0 = k$, $k_1 = k_{\underline{a}_1}$, und der Rekusionsschritt besteht aus der Festlegung

$$\begin{aligned} k_\lambda &= (k_{\lambda-1})_{\underline{a}_\lambda} && \text{falls } \lambda < \kappa \text{ eine Nachfolgerordinalzahl ist, und} \\ k_\lambda &= \Big(\varinjlim k_\mu\Big)_{\underline{a}_\lambda} && \text{falls } \lambda < \kappa \text{ eine Limesordinalzahl ist.} \end{aligned}$$

Genau genommen bezeichnet hier $\underline{a}_\lambda$ das Bild des Symbols unter der Restriktion der jeweiligen Körpererweiterung, d.h. in der ersten Zeile ist es $(\underline{a}_\lambda)_{k_{\lambda-1}}$ und in der zweiten Zeile $(\underline{a}_\lambda)_{\varinjlim k_\mu}$. Ist diese Restriktion des Symbols bereits trivial, so sei die Konvention an dieser Stelle $F_{\underline{a}} = F$ für einen Körper F und ein triviales Symbol $\underline{a} = 0$ in $K_n^M(F)/\ell$. Schließlich setzen wir wieder

$$k_\kappa = \varinjlim_{\lambda<\kappa} k_\lambda = \bigcup_{\lambda<\kappa} k_\lambda.$$

Der Unterschied zum Fall $n = 1$ ist, dass wir k' als den ℓ-speziellen Abschluss (siehe Lemma 5.2) von F_κ definieren. Da $H_{\text{et}}^{p,q}(-, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ mit induktiven Limites kommutiert (siehe B. Kahn [**Kah05**, Prop. 9b)]), kann man genauso wie Lemma 2.6 und Satz 2.5 2) die folgenden Aussagen beweisen:

6.2. Lemma. Für alle Ordinalzahlen $\lambda < \kappa$ gilt, dass die Restriktion

$$H_{\text{et}}^{n+1,n}(k_\mu, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H_{\text{et}}^{n+1,n}(k_\lambda, \mathbb{Z}_{(\ell)})$$

injektiv ist für alle $\mu < \lambda$. □

6.3. Korollar. Die Restriktion

$$H_{\text{et}}^{n+1,n}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H_{\text{et}}^{n+1,n}(k_\kappa, \mathbb{Z}_{(\ell)})$$

ist injektiv. □

6.4. Korollar. Die Restriktion

$$H_{\text{et}}^{n+1,n}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H_{\text{et}}^{n+1,n}(k', \mathbb{Z}_{(\ell)}).$$

ist injektiv.

Beweisskizze. Die Aussage folgt aus dem Resultat, dass für Körper F mit ℓ-speziellem Abschluss $F_{\ell\text{-spez}}$ die Restriktion $H_{\text{et}}^{n+1,n}(F, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \to H_{\text{et}}^{n+1,n}(F_{\ell\text{-spez}}, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ injektiv ist. Dies sieht man mit einem Transferargument bezüglich motivischer Kohomologie. Zunächst einmal ist $F_{\ell\text{-spez}}$ der direkte Limes über alle endlichen Zwischenkörper $F \subset F_i \subset F_{\ell\text{-spez}}$, und es gilt, dass ℓ ist kein Teiler vom Grad $d = [F_i : F]$ ist. Die von der Inklusion $F \subset F_i$ induzierte kanonische Abbildung $\operatorname{Spec} F_i \to \operatorname{Spec} F$ liefert uns mittel Pullback und Pushforward eine Sequenz

$$H_{\text{et}}^{n+1,n}(F, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H_{\text{et}}^{n+1,n}(F_i, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H_{\text{et}}^{n+1,n}(F, \mathbb{Z}_{(\ell)}),$$

die mit der Multiplikation mit d auf $H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(F, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ übereinstimmt (vgl. [**MVW06**, Aufg. 1.11]). Die Komposition ist ein Isomorphismus, da $\mathbb{Z}_{(\ell)} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}_{(\ell)}$ ein Isomorphismus ist. Somit ist die Restriktion bezüglich F_i/F injektiv für jeden Zwischenkörper F_i und damit auch die Restriktion bezüglich des Limes $F_{\ell\text{-spez}}/F$. Da $H^{*,*}_{\mathrm{et}}(-, A)$ in dieser Situation mit direkten Limites vertauscht (vgl. [**MVW06**, Lemma 3.9]), folgt die Behauptung. □

6.5. Lemma. Es gilt $\alpha_{k'} = 0$ in $K^M_n(k')/\ell$ für jedes Element $\alpha \in K^M_n(k)/\ell$, d.h. die Restriktion $K^M_n(k)/\ell \to K^M_n(k')/\ell$ ist die Nullabbildung.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass Symbole $\underline{a} \in K^M_n(k)/\ell$ in $K^M_n(k')/\ell$ verschwinden. Dies ist klar, denn das Symbol $\underline{a}_\lambda$ verschwindet in $K^M_n(k_\lambda)/\ell$ und somit auch in der K-Gruppe jeder Erweiterung von k_λ, insbesondere in $K^M_n(k')/\ell$. □

6.B. Konstruktion von $k^{(\infty)}$. Wir wenden die soeben eingeführte Konstruktion nun induktiv an, um den gesuchten Körper $k^{(\infty)}$ zu erhalten. Wie im Fall $n = 1$ setzen wir $k^{(0)} = k$ und $k^{(i+1)} = \left(k^{(i)}\right)'$. Wir erhalten einen Turm von Erweiterungen

$$k = k^{(0)} \subset k^{(1)} \subset k^{(2)} \subset \cdots \subset k^{(\infty)} := \varinjlim_{i \geq 0} k^{(i)} = \bigcup_{i \geq 0} k^{(i)}. \tag{III.6.2}$$

Damit haben wir den Körper $k^{(\infty)}$ aus Theorem 6.1 konstruiert. Zu zeigen bleiben die drei dort formulierten Eigenschaften, die schnell aus den Lemmata folgen.

Beweis der Eigenschaften 1)–3) von Thm. 6.1. Bezüglich der ersten Eigenschaft ist zu zeigen, dass die Vereinigung ℓ-spezieller Körper wieder ℓ-speziell ist. Sei dazu $L/k^{(\infty)}$ eine endliche Erweiterung. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $L = k^{(\infty)}(\alpha)$ eine einfache Erweiterung ist für ein Element $\alpha \in L$. Sei $\pi_\alpha \in k^{(\infty)}[T]$ das Minimalpolynom von α. Es existiert dann eine natürliche Zahl j mit der Eigenschaft $\pi_\alpha \in k^{(j)}[T]$. Somit ist $k^{(j)}(\alpha)$ eine endliche Erweiterung von $k^{(j)}$ und folglich ist der Grad dieser Erweiterung sowie der Grad des Polynoms π_α eine Potenz von ℓ. Dasselbe gilt dann für die Erweiterung $k^{(\infty)}(\alpha)/k^{(\infty)}$. Die zweite Eigenschaft ist klar, da jedes Symbol $\underline{a}_{k^{(\infty)}}$ in $K^M_n\left(k^{(\infty)}\right)/\ell$ von einem Element $\underline{a} \in K^M_n\left(k^{(i)}\right)/\ell$ kommt und nach Konstruktion in $K^M_n\left(k^{(i+1)}\right)/\ell$ und schließlich in $K^M_n\left(k^{(\infty)}\right)/\ell$ verschwindet (siehe Lemma 6.5). Punkt 3) benutzt nun abermals das Argument, dass wir aufgrund von Lemma 6.4 und nach Konstruktion ein induktives System mit injektiven Morphismen haben, und dass in einer solchen Situation der kanonische Morphismus von $H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ in den Limes $\varinjlim H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k^{(i)}, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \cong H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k^{(\infty)}, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ injektiv ist. □

7. Normvarietäten $X_{\underline{a}}$ und Injektivität von $H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(k(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)})$

Mit Theorem 6.1 ist die Gültigkeit der Bloch-Kato-Vermutung auf die Annahme (III.6.1), d.h. auf die Existenz geeigneter Körpererweiterungen $k_{\underline{a}}/k$ zu Symbolen $\underline{a} \in K^M_n(k)/\ell$ reduziert. Im Fall $\ell = 2$ gelang Voevodsky [**Voe03a**] unter Benutzung von Resultaten von

Rost [**Ros88**, **Ros90**] (siehe auch [**Ros98b**]) der Nachweis, dass der Funktionenkörper der sogenannten *Normquadrik* $Q_{\underline{a}}$ zu $\underline{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$ definiert durch die Gleichung

$$\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle\rangle - a_n t^2 = 0$$

den Anforderungen an den Körper $k_{\underline{a}}$ genügt. Die Normquadrik ist eine $(2^{n-1}-1)$-dimensionale Unterquadrik der $(2^n - 2)$-dimensionalen Pfister-Quadrik $P_{\underline{a}}$ gegeben durch die Gleichung $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle = 0$. Man sagt auch, sie ist ein minimaler Pfister-Nachbar von $P_{\underline{a}}$. Für ungerade Primzahlen ℓ treten an die Stelle der Normquadriken sogenannte *Normvarietäten*, wobei dieser Begriff in der Literatur nicht immer eindeutig ist und vielfältig Verwendung findet.

7.1. Definition. Im Kontext des Beweises der Bloch-Kato-Vermutung verstehen wir unter einer **Normvarietät** (oder **Rost-Varietät** in der Literatur) zu einem nichttrivialen Symbol $\underline{a} \in K_n^M(k)/\ell$ eine glatte projektive Varietät $X_{\underline{a}}$ über k mit den folgenden Eigenschaften:

1) Die Varietät $X_{\underline{a}}$ zerfällt das Symbol $\underline{a}$, d.h. es gilt $\underline{a}_{k(X_{\underline{a}})} = 0$ in $K_n^M\big(k(X_{\underline{a}})\big)/\ell$.
2) Die Varietät $X_{\underline{a}}$ ist eine $\nu_{\leq n-1,\ell}$-Varietät, d.h. sie ist eine $\nu_{n-1,\ell}$-Varietät und für alle natürlichen Zahlen $i < n-1$ existiert eine $\nu_{i,\ell}$-Varietät X_i mit einem Morphismus $X_i \to X_{\underline{a}}$.
3) Die kanonische Sequenz
$$H_{-1,-1}\big(X_{\underline{a}} \times X_{\underline{a}}, \mathbb{Z}\big) \xrightarrow{(p_1)_* - (p_2)_*} H_{-1,-1}\big(X_{\underline{a}} \times X_{\underline{a}}, \mathbb{Z}\big) \longrightarrow H_{-1,-1}\big(k, \mathbb{Z}\big)$$
ist exakt. Hierbei steht $H_{-1,-1}(X, \mathbb{Z})$ für die Gruppe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DM}^-_{\mathrm{eff}}(k)}\big(M(X)(1)[1]\big)$.

Unter einer $\boldsymbol{\nu_{i,\ell}}$**-Varietät** versteht man eine glatte irreduzible projektive Varietät X mit den Eigenschaften

1) Die Varietät X ist von Dimension $d := \ell^i - 1$ über k.
2) Das Bild der d-ten Milnorklasse $s_d(X) \in H^{2d,d}(X, \mathbb{Z})$ unter der Gradabbildung $\deg\colon H^{2d,d}(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ ist nicht durch ℓ^2 teilbar, d.h. $\deg s_d(X) \not\equiv 0 \bmod \ell^2$.

Die Existenz von Normvarietäten geht auf die Forschung von Rost zurück und war die wesentliche Hürde im Beweis der Bloch-Kato-Vermutung gegenüber Voevodskys Beweis der Milnor-Vermutung. Außer für einige Spezialfälle ($\ell = 2$ bzw. niedrige Dimension n) liegt keine explizite geometrische Konstruktion vor. Publiziert wurde der Nachweis von Normvarietäten von Suslin und Joukhovitski [**SJ06**]. Das Hauptresultat [**SJ06**, Thm. 0.1] benutzt die Induktionsannahme H90$(n-1, \ell)$ bzw. BK$(n-1, \ell)$, und war somit vom damaligen Standpunkt aus kein eigenständiges Resultat, sondern Teil vom Induktionsschritt. Die Normquadriken aus dem Beweis der Milnor-Vermutung sind $\nu_{n-1,2}$-Varietäten.

Die Schwierigkeit besteht darin, die Injektivität der Restriktion

$$H^{n+1,n}_{\text{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H^{n+1,n}_{\text{et}}(k(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)})$$

zu zeigen. Hierzu erläutern wir in diesem Abschnitt die Konstruktion einer Gruppe, die den Kern dieser Abbildung „kontrolliert“. An dieser Stelle geht man von glatten Schemata formal über zu den allgemeineren *simplizialen Schemata*. Diese Idee stammt von Voevodsky in

Zusammenarbeit mit Suslin. Zu einer Varietät X sei $\check{C}(X)$ das simpliziale Schema gegeben durch $\check{C}(X)_n = X^{n+1}$ und Flächen- bzw. Randabbildungen induziert von den offensichtlichen Projektions- bzw. Diagonalabbildungen.

$$\begin{array}{rc} \check{C}(X)_0 = & X \\ & \uparrow\downarrow\uparrow \\ \check{C}(X)_1 = & X \times X \\ & \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \\ \check{C}(X)_2 = & X \times X \times X \\ & \vdots \end{array}$$

Die Definition von motivischen Kohomologiegruppen lässt sich auf natürliche Art und Weise auf simpliziale Schemata erweitern. Wir zitieren ein Resultat von Voevodsky.

7.2. Lemma. [**Voe03a**, Lemma 7.3] Sei X ein nichtleeres glattes Schema über k. Dann induziert der kanonische Morphismus $\check{C}(X) \to \operatorname{Spec} k$ einen Isomorphismus zwischen Kohomologiegruppen

$$H^{p,q}_{\text{et}}(k, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} H^{p,q}_{\text{et}}(\check{C}(X), \mathbb{Z}) \quad \text{für alle } p, q \in \mathbb{Z}.$$

Der Beweis benutzt die Darstellung der Kohomologiegruppen als Hom-Gruppen in der derivierten Kategorie $D^{-}\mathrm{ST}_{\text{et}}(k)$ von Garben abelscher Gruppen in étaler Topologie auf der Kategorie Sm/k der glatten Schemata über k. Es bleibt zu zeigen, dass in $\mathrm{ST}_{\text{et}}(k)$ der durch $\check{C}(X) \to \operatorname{Spec} k$ induzierte Morphismus zwischen Komplexen $\mathbb{Z}(\check{C}(X)) \to \mathbb{Z}$ ein Quasiisomorphismus ist.

Das folgende Resultat von Voevodsky (siehe [**Voe11**, Lemma 6.9]) liefert uns mit der Kohomologiegruppe $H^{n+1,n}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)})$ jene Gruppe, deren Verschwinden die benötigte Injektivität impliziert.

7.3. Satz. Sei $X_{\underline{a}}$ eine $\nu_{n-1,\ell}$-Varietät, die ein nichttriviales Symbol $\underline{a}$ aus $K^M_n(k)/\ell$ zerfällt. Dann haben wir eine kanonische exakte Sequenz

$$H^{n+1,n}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H^{n+1,n}_{\text{et}}(k, \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H^{n+1,n}_{\text{et}}(k(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}). \tag{III.7.1}$$

Beweisskizze. Nach Lemma 7.2 genügt es zu zeigen, dass durch den natürlichen Topologiewechsel zwischen Nisnevich- und étaler Topologie sowie durch die kanonische Projektion $\check{C}(X_{\underline{a}}) \to k(X_{\underline{a}})$ eine exakte Sequenz

$$H^{n+1,n}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H^{n+1,n}_{\text{et}}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}) \longrightarrow H^{n+1,n}_{\text{et}}(k(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)})$$

gegeben ist. Die Komposition ist die Nullabbildung, da sie über $H^{n+1,n}(k(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$ (vgl. Lemma II.2.11) faktorisiert.

$$\begin{array}{ccc} H^{n+1,n}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}) & \longrightarrow & H^{n+1,n}_{\text{et}}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 = H^{n+1,n}(k(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}) & \longrightarrow & H^{n+1,n}_{\text{et}}(k(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}) \end{array}$$

Für die andere Inklusion benutzt Voevodsky, dass in der Kategorie $\mathrm{DM}^-_{\mathrm{eff}}(k)$ ein ausgezeichnetes Dreieck der Form

$$\mathbb{Z}_{(\ell)}(n) \longrightarrow B_{(\ell)}(n) \longrightarrow K_{(\ell)}(n) \longrightarrow \mathbb{Z}_{(\ell)}(n)[1]$$

existiert, wobei $B_{(\ell)}(n) = \tau_{\leq n+1}\boldsymbol{R}\pi_*(\pi^*\mathbb{Z}_{(\ell)}(n))$ gilt. Der erste Pfeil gehört also zum Topologiewechsel. Die Hyperkohomologiefunktoren (in Nisnevich-Topologie) von $\operatorname{Spec} k(X_{\underline{a}})$ und $\check{C}(X_{\underline{a}})$ angewendet auf dieses Dreieck liefern ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{H}^{n+1}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}(n)) & \longrightarrow & \mathbb{H}^{n+1}(\check{C}(X_{\underline{a}}), B_{(\ell)}(n)) & \longrightarrow & \mathbb{H}^{n+1}(\check{C}(X_{\underline{a}}), K_{(\ell)}(n)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{H}^{n+1}(k(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}(n)) & \longrightarrow & \mathbb{H}^{n+1}(k(X_{\underline{a}}), B_{(\ell)}(n)) & \longrightarrow & \mathbb{H}^{n+1}(k(X_{\underline{a}}), K_{(\ell)}(n)),
\end{array}$$

welches wegen $\mathbb{H}^{n+1}(-, \mathbb{Z}_{(\ell)}(n)) = H^{n+1,n}(-, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ sowie $\mathbb{H}^{n+1}(-, B_{(\ell)}(n)) = H^{n+1,n}_{\mathrm{et}}(-, \mathbb{Z}_{(\ell)})$ eine Erweiterung zu obigem Diagramm darstellt. Man prüft leicht, dass die Injektivität des rechten vertikalen Morphismus die Behauptung impliziert. Voevodsky beweist die für die Exaktheit ausstehende Inklusion unter Zuhilfenahme von Resultaten über $\nu_{n-1,\ell}$-Varietäten, wie zum der Beispiel Existenz von verallgemeinerten Rost-Motiven. $\square$

7.4. Bemerkung. Kahn [**Kah05**, Lemma 33] zeigt die Exaktheit von (III.7.1) unter etwas anderen Voraussetzungen, die im Falle der Milnor-Vermutung den Anforderungen genügen. Mit diesen zeigt er, dass der rechte vertikale Pfeil im Diagramm oben sogar ein Isomorphismus ist. Im Hinblick auf den Beweis der Bloch-Kato-Vermutung benötigt man das Resultat aber für Normvarietäten, von deren spezifischen Eigenschaften Voevodsky im Beweis von [**Voe11**, Lemma 6.9] Gebrauch macht.

8. Verschwinden von $H^{n+1,n}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)})$

Der Beweis der Bloch-Kato-Vermutung ist reduziert auf die Gültigkeit von folgendem Theorem von Voevodsky [**Voe03a**, Prop. 7.1] [**Voe11**, Prop. 6.11]:

8.1. Theorem. Angenommen es gilt H90$(n-1, \ell)$. Dann haben wir $H^{n+1,n}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}) = 0$.

Wir skizzieren abschließend in den nächsten beiden Unterabschnitten, wie das Verschwinden von $H^{n+1,n}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)})$ erreicht wird. Obwohl die zugrundliegenden Ideen dieselben sind, unterscheidet sich das Vorgehen im Fall $\ell = 2$ und $\ell > 3$ leicht in der Ausführung. Daher erläutern wir den ersten Fall etwas ausführlicher und gehen anschließend auf die Unterschiede im zweiten Fall ein.

8.A. Verschwinden von $H^{n+1,n}(\check{C}(Q_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(2)})$. Im Falle $\ell = 2$ resultiert Theorem 8.1 aus den beiden nachfolgenden, tiefen Theoremen von Voevodsky.

8.2. Theorem. Angenommen es gilt H90$(n-1, 2)$. Dann existiert ein injektiver Morphismus

$$H^{n+1,n}(\check{C}(Q_{\underline{a}}), \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\Theta} H^{2^n-1,2^{n-1}}(\check{C}(Q_{\underline{a}}), \mathbb{Z}/2).$$

Das Theorem folgt im Wesentlichen aus Resultaten von Voevodskys Arbeit [**Voe03b**], wo er für allgemeine Primzahlen ℓ kohomologische Operationen Q_i vom Bigrad $(2\ell^i - 1, \ell^i - 1)$ einführt, also Familien natürlicher Transformationen

$$Q_i\colon H^{*,*}(-,\mathbb{Z}/\ell) \longrightarrow H^{*+2\ell^i-1,*+\ell^i-1}(-,\mathbb{Z}/\ell).$$

Diese Konstruktion ist ein Analogon zur Definition der Elemente Q_i in der Steenrod-Algebra (siehe [**Mil58**]). Man nennt die Q_i auch *Milnoroperationen*. Sie erfüllen die Identität $Q_i^2 = 0$, sodass die motivischen Kohomologiegruppen $H^{*,*}(\mathfrak{X},\mathbb{Z}/\ell)$ eines simplizialen Schemas $\mathfrak{X}$ mit den Q_i als Differentialen einen Kokettenkomplex bilden. Die Kohomologie dieses Komplexes an der Stelle $H^{p,q}(\mathfrak{X},\mathbb{Z}/\ell)$ wird notiert mit $MH_i^{p,q}(\mathfrak{X},\mathbb{Z}/\ell)$ und heißt *Margolis-Kohomologie*. Im Fall $\ell = 2$ und $\mathfrak{X} = \check{C}(Q_{\underline{a}})$ folgt aus dem Verschwinden solcher Kohomologiegruppen (siehe [**Voe03a**, Kor. 3.8]) zusammen mit der Induktionsannahme H90$(n-1,2)$ die Injektivität der Operationen $Q_1,\dots,Q_{n-2}$. Die Abbildung Θ ist dann die Komposition $Q_{n-2}\circ\cdots\circ Q_1$.

8.3. Theorem. [**Voe03a**, Thm. 4.9] Es gilt $H^{2^n-1,2^{n-1}}(\check{C}(Q_{\underline{a}}),\mathbb{Z}_{(2)}) = 0$.

An dieser Stelle benötigt man die Existenz des sogenannten Rost-Motivs $M_{\underline{a}}$. Rost [**Ros90**] (siehe auch [**Ros98b**]) hat gezeigt, dass das Motiv von $Q_{\underline{a}}$ einen interessanten direkten Summanden besitzt, welcher einen engen Bezug zum Tate-Motiv $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}(2^{n-1}-1)[2^n-2]$ hat. Mithilfe der Existenz eines ausgezeichneten Dreiecks

$$M(\check{C}(Q_{\underline{a}}))(2^{n-1}-1)[2^n-2] \longrightarrow M_{\underline{a}} \longrightarrow M(\check{C}(Q_{\underline{a}})) \longrightarrow M(\check{C}(Q_{\underline{a}}))(2^{n-1}-1)[2^n-1]$$

in $\mathrm{DM}^-_{\mathrm{eff}}(k)$ (siehe [**Voe03a**, Thm. 4.4]) sowie Theorem 1 in [**Ros88**], was sich zur Injektivität von $H^{2^n-1,2^{n-1}}(Q_{\underline{a}},\mathbb{Z}_{(\ell)}) \to k^\times$ übersetzen lässt, zeigt Voevodsky das Verschwinden von $H^{2^n-1,2^{n-1}}(\check{C}(Q_{\underline{a}}),\mathbb{Z}_{(2)})$.

Beweisskizze von Thm. 8.1 im Fall $\ell = 2$ (nach [**Mor98**]). Man kann mithilfe von Theorem 8.2 einen Monomorphismus

$$H^{n+1,n}(\check{C}(Q_{\underline{a}}),\mathbb{Z}_{(2)}) \xrightarrow{\widetilde{\Theta}} H^{2^n-1,2^{n-1}}(\check{C}(Q_{\underline{a}}),\mathbb{Z}_{(2)})$$

konstruieren, woraus die Behauptung mit Theorem 8.3 folgt. Da für Quadriken stets eine quadratische Erweiterung existiert, über der die Quadrik einen rationalen Punkt besitzt, haben Elemente von $H^{n+1,n}(\check{C}(Q_{\underline{a}}),\mathbb{Z}_{(2)})$ und $H^{2^n-1,2^{n-1}}(\check{C}(Q_{\underline{a}}),\mathbb{Z}_{(2)})$ höchstens Ordnung zwei. Somit betten die Gruppen in die entsprechenden Gruppen mit $\mathbb{Z}/2$-Koeffizienten ein. Nach [**Voe03a**, Lemma 7.2] können wir eine Abbildung $\widetilde{\Theta}$ konstruieren, sodass

$$\begin{tikzcd}
H^{n+1,n}(\check{C}(Q_{\underline{a}}),\mathbb{Z}_{(2)}) \arrow[r, dotted, "\exists\widetilde{\Theta}"] \arrow[d, hook] & H^{2^n-1,2^{n-1}}(\check{C}(Q_{\underline{a}}),\mathbb{Z}_{(2)}) \arrow[d, hook] \\
H^{n+1,n}(\check{C}(Q_{\underline{a}}),\mathbb{Z}/2) \arrow[r, "\Theta"'] & H^{2^n-1,2^{n-1}}(\check{C}(Q_{\underline{a}}),\mathbb{Z}/2).
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Wegen der Injektivität von Θ ist auch $\widetilde{\Theta}$ injektiv. $\square$

8.B. Verschwinden von $H^{n+1,n}(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbf{Z}_{(2)})$ für ungerade ℓ. Wenn wir wie im Falle $\ell = 2$ die Milnor-Operationen $Q_1, \dots, Q_{n-2}$ auf $H^{n+1,n}\big(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}/\ell\big)$ anwenden, so gelangen wir laut Voevodsky [**Voe11**, S. 403 oben] zu einer Gruppe, die nicht leichter zu verstehen ist als die ursprüngliche. Von der Komposition $Q_{n-1} \circ Q_{n-2} \circ \cdots \circ Q_1$ hingegen wird $H^{n+1,n}\big(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}/\ell\big)$ in die Gruppe

$$H^{2\ell b+2,\ell b+1}\big(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}/\ell\big) \quad \text{mit } b = \tfrac{\ell^{n-1}-1}{\ell-1}$$

abgebildet. Ähnlich wie bei $\ell = 2$ liefert diese Komposition eine Einbettung der motivischen Kohomologiegruppe $H^{n+1,n}\big(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}\big)$ mit lokalisierten Koeffizienten in die Gruppe $H^{2\ell b+2,\ell b+1}\big(\check{C}(X_{\underline{a}}), \mathbb{Z}_{(\ell)}\big)$ (siehe [**Voe11**, 6.12]), deren Verschwinden Voevodsky zeigt (siehe [**Voe11**, 6.13–6.15]). Von großer Bedeutung ist an dieser Stelle die Existenz des sogenannten *verallgemeinerten Rost-Motivs* [**Voe11**, Abschnitt 5]. Dessen Nachweis war eine der wesentlichen Hürden, da kein konkretes geometrisches Modell für allgemeine Normvarietäten $X_{\underline{a}}$ vorliegt. Eine Alternative zu Voevodskys Konstruktion des verallgemeinerten Rost-Motivs mit Berechnungen in der Kategorie $\mathrm{DM}^{-}_{\mathrm{eff}}(k)$ stellen die *speziellen Korrespondencen* von Rost [**Ros06**] dar.

Anhang

1. Grothendieck-Topologie

Der hier erläuterte Begriff einer Grothendieck-Topologie ist der von Milne in [**Mil08**], im Gegensatz zur ursprünglichen Definition von Grothendieck in [**SGA**], wo der Begriff der Prätopologie an dessen Stelle tritt und eine Grothendieck-Topologie als eine Menge von sogenannten Sieben (engl. *sieves*) mit bestimmten Eigenschaften definiert wird. Eine Grothendieck-Topologie ist eine natürliche Erweiterung des klassischen Begriffs der Topologie eines topologischen Raum.

1.1. Definition. Eine **Grothendieck-Topologie** auf einer Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus einer Kollektion $\mathcal{U}$ von *Überdeckungen*, die gewissen Axiomen genügt. Eine **Überdeckung von** $\boldsymbol{U} \in \mathbf{Ob}\,\boldsymbol{\mathcal{C}}$ ist hierbei eine Familie $\left(\phi_i \colon U_i \to U\right)_{i\in I}$ von Morphismen in $\mathcal{C}$ mit $U = \bigcup_{i\in I} \phi_i(V_i)$. Die Axiome für $\mathcal{U}$ sind:

1) $\left(U \stackrel{\mathrm{Id}}{\to} U\right) \in \mathcal{U}$ für alle $U \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.
2) Ist $\left(U_i \to U\right)_{i\in I} \in \mathcal{U}$ eine Überdeckung von U und $V \to U$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so existiert ein Faserprodukt $U_i \times_U V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, und es gilt
$$\left(U_i \times_U V \to U\right)_{i\in I} \in \mathcal{U}.$$
3) Ist $\left(U_i \to U\right)_{i\in I} \in \mathcal{U}$ eine Überdeckung von U und sind für jedes $i \in I$ Überdeckungen $\left(U_{ij} \to U_i\right)_{j\in J_i} \in \mathcal{U}$ von U_i gegeben, so ist $\left(U_{ij} \to U\right)_{i,j} \in \mathcal{U}$ eine Überdeckung von U.

Ein Tupel T bestehend aus einer Kategorie $\mathcal{C}$ und einer Grothendieck-Topologie $\mathcal{U}$ darauf wird **Situs** genannt und oft $T = (\mathcal{C},\mathcal{U}) = (\mathrm{Cat}\,T, \mathrm{Cov}\,T)$ notiert.

1.2. Beispiel (Topologischer Raum)**.** Ist X ein topologischer Raum und $\mathcal{C} = \mathrm{O}(X)$ die Kategorie der offenen Mengen auf X mit Inklusionen als Morphismen, so ist die Menge von offenen Überdeckungen $(U_i \subset U)_{i\in I}$ von Elementen $U \in \mathrm{O}(X)$ eine Grothendieck-Topologie. Die Faserprodukte aus Definition 1.1 2) sind gegeben durch $U_i \times_U V = U_i \cap V$.

1.3. Definition. Eine **Garbe** von abelschen Gruppen auf einem Situs $\left(\mathrm{Cat}\,T, \mathrm{Cov}\,T\right)$ ist ein Funktor
$$\mathcal{F} \colon (\mathrm{Cat}\,T)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$$

mit der Eigenschaft, dass

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I^2} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j) \tag{A.1.1}$$

exakt ist für jedes $U \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Cat}\, T)$ und jede Überdeckung $\big(U_i \to U\big)_{i\in I} \in \mathrm{Cov}\, T$. Garben von (abelschen) Gruppen, Ringen, etc. sind analog definiert. Die Garben auf T bilden mit natürlichen Transformationen als Morphismen eine Kategorie. Die Kategorie der Garben abelscher Gruppen auf T notieren wir mit $\mathrm{Shv}(T)$.

1.4. Definition (Stetige Abbildung zwischen Siten)**.** Eine **stetige Abbildung** $T_1 \to T_2$ zwischen Siten ist ein Funktor $F\colon \mathrm{Cat}\, T_2 \to \mathrm{Cat}\, T_1$, der Überdeckungen in Überdeckungen überführt, d.h. ist $(\phi\colon U_i \to U)_i \in \mathrm{Cov}\, T_2$, so ist $\big(F(\phi)\colon F(U_i) \to F(U)\big)_i \in \mathrm{Cov}\, T_1$.

2. Étale Kohomologie

Étale Kohomologie dient uns als ein größerer Rahmen, in welchem wir die rechte Seite des Normresthomomorphismus definieren können. Wie in Abschnitt 3 dargestellt ist die Galoiskohomologie äquivalent zur étalen Kohomologie von Spektren von Körpern. In diesem Abschnitt geben wir einen kurzen Überblick über die grundlegenden Defintionen von étaler Kohomologie. Man kann diese als das Analogon in der algebraischen Geometrie zu den Kohomologiegruppen mit endlichen Koeffizienten von topologischen Räumen auffassen. Dieser Abschnitt hat lediglich Übersichtscharakter; für eine ausführliche Behandlung des Themas sei das Skript von J. Milne [**Mil08**] oder dessen Buch [**Mil80**] empfohlen.

2.A. Étale Morphismen. Étale Morphismen zwischen Schemata stellen ein Analogon zu lokalen Isomorphismen in der komplexen analytischen Geometrie dar.

2.1. Definition. Ein Ringhomorphismus $f\colon R \to S$ heißt **flach**, falls durch

$$\mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_S, \quad M \mapsto S \otimes_R M \quad (S \in \mathrm{Mod}_R \text{ via } r \cdot s \coloneqq f(r) \cdot s)$$

ein exakter Funktor zwischen der Kategorie der R-Moduln und der Kategorie der S-Moduln gegeben ist. Ein lokaler Ringhomorphismus $f\colon R \to S$ heißt **unverzweigt**, falls $S/f(\mathfrak{m}_R)\, S$ eine endliche separable Körpererweiterung von $R/\mathfrak{m}_R$ ist.

2.2. Definition. Ein Morphismus $f\colon Y \to X$ zwischen lokal noetherschen Schemata heißt **étale**, falls er von endlichem Typ ist und die durch f induzierten Ringhomomorphismen $\mathcal{O}_{X,f(y)} \to \mathcal{O}_{Y,y}$ zwischen den Halmen unverzweigt und flach sind für alle $y \in Y$.

2.3. Bemerkung. Ist V eine affine Umgebung von $y \in Y$ und $U \supset f(V)$ eine affine Umgebung von $f(y)$ mit $(U, \mathcal{O}_X|_U) \cong (\mathrm{Spec}\, R, \mathcal{O}_R)$ und $(V, \mathcal{O}_Y|_V) \cong (\mathrm{Spec}\, S, \mathcal{O}_S)$, so gilt $\mathcal{O}_{X,f(y)} = R_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{O}_{Y,y} = S_{\mathfrak{q}}$, wobei $\mathfrak{p} \subset R$ das zu $f(y)$ zugehörige Primideal und $\mathfrak{q} \subset S$ das zu y zugehörige Primideal sei. Zu prüfen ist also, ob der induzierte Ringhomomorphismus $R_{\mathfrak{p}} \to S_{\mathfrak{q}}$ unverzweigt und flach ist.

2.4. Definition. Sei X lokal noethersches Schema. Dann ist die Kategorie Et/X étaler Morphismen über X wie folgt gegeben: Objekte sind étale Morphismen $U \to X$, wobei U lokal noethersches Schema ist. Morphismen sind X-Morphismen $U \to V$, also kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr] \arrow[dr] & & V \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Der Morphismus $U \to V$ ist dann selbst notwendigerweise étale.

2.B. Étale Topologie. Étale Topologie ist ein Beispiel für eine Grothendieck-Topologie (siehe Abschnitt 1) auf der Kategorie glatter Schemata.

2.5. Definition. Eine **étale Überdeckung** eines lokal noetherschen Schemas U ist eine Überdeckung durch étale Morphismen $U_i \to U$. Der **kleine étale Situs $\boldsymbol{X_{\mathrm{et}}}$** eines lokal noetherschen Schemas X besteht aus der Kategorie Et/X zusammen mit étalen Überdeckungen. Eine Überdeckung von $(U \to X) \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Et}/X$ besteht also aus einer Familie étaler X-Morphismen $U_i \to U$ mit $\bigcup_i \mathrm{im}(U_i \to U) = U$.

2.6. Beispiel (für Garben auf X_{et})**.**

1) Die **Strukturgarbe** auf X_{et} ist die Garbe
$$\mathcal{O}_{X_{\mathrm{et}}} \colon (\mathrm{Et}/X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}, \quad U \mapsto \mathcal{O}_U(U).$$
2) $\mu_n(U) := \{\xi \in \mathcal{O}_U(U) \mid \xi^n = 1\}$.
3) $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(U) := \mathcal{O}_U(U)^\times$.

Der folgende Satz von J. Milne (siehe [**Mil08**, Prop. 6.6]) liefert ein nützliches Kriterium an Prägarben, um étale Garben zu sein.

2.7. Satz. Eine Prägarbe $\mathcal{F} \colon (\mathrm{Et}/X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ ist genau dann eine étale Garbe, wenn (A.1.1) für alle Zariski-Überdeckungen $(U_i \hookrightarrow U)_i$ und alle einelementigen étalen Überdeckungen $(V \to U)$ erfüllt ist. Die Kategorie $\mathrm{Shv}(X_{\mathrm{et}})$ ist definiert als Funktorkategorie bestehend aus Garben abelscher Gruppen auf X_{et}.

2.8. Bemerkung. Die Kategorie $\mathrm{Shv}(X_{\mathrm{et}})$ ist abelsch (siehe [**Wei94**, 1.6.4]). Wir können also von exakten Sequenzen von Garben sprechen. J. Milne gibt in [**Mil08**, Prop. 7.6] ein hilfreiches Kriterium für die Exaktheit kurzer Sequenzen $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ in $\mathrm{Shv}(X_{\mathrm{et}})$. Demnach ist äquivalent:

1) $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ ist exakt in $\mathrm{Shv}(X_{\mathrm{et}})$.
2) $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ ist exakt in $\mathbf{Ab}$ für alle Morphismen $U \to X$ aus einer étalen Überdeckung von X, und $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ ist lokal surjektiv (d.h. für jedes $U \in \mathrm{Et}/X$ und jedes Element $s \in \mathcal{H}(U)$ existiert eine étale Überdeckung $(\phi_i \colon U_i \to U)_i$, s.d. $s|_{U_i} := \mathcal{H}(\phi_i)(s)$ im Bild von $\mathcal{G}(U_i) \to \mathcal{H}(U_i)$ liegt).

3) $0 \to \mathcal{F}_{\bar{x}} \to \mathcal{G}_{\bar{x}} \to \mathcal{H}_{\bar{x}} \to 0$ ist exakt in **Ab** für jeden geometrischen Punkt $\bar{x} \to X$.

2.9. Beispiel (Kummersequenz)**.** Sei n eine natürliche Zahl, die nicht von der Charakteristik irgendeines Restklassenkörpers $k(x)$ eines Punktes x von X geteilt wird. Dann ist durch

$$1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_\mathrm{m} \xrightarrow{(-)^n} \mathbb{G}_\mathrm{m} \longrightarrow 1$$

eine exakte Sequenz étaler Garben gegeben. Nach dem Kriterium in Bemerkung 2.8 und Beispiel 6.13 (a) und (b) in [**Mil08**] genügt es, die Exaktheit von

$$1 \longrightarrow \mu_n(A) \longrightarrow A^\times \xrightarrow{(-)^n} A^\times \to 1$$

für jeden lokalen Ring in étaler Topologie $A = \mathcal{O}_{X,\bar{x}}$ von X zu überprüfen. Dies ist bis auf die Surjektivität von $a \mapsto a^n$ klar. Letzteres folgt aus der Tatsache, dass nach Voraussetzung $\frac{\mathrm{d}(T^n-a)}{\mathrm{d}T} = nT^{n-1} \neq 0$ im Restklassenkörper von A gilt. Demnach zerfällt $T^n - a$ in Linearfaktoren in $A[T]$.

2.C. Étale Kohomologie. Die Kategorie $\mathrm{Shv}(X_\mathrm{et})$ ist abelsch und hat genug injektive Elemente ([**Mil08**, Proposition 8.12]; für die Diskussion einer allgemeineren Situation siehe 8.B.3.D im Anhang). Somit können wir rechtsderivierte Funktoren von linksexakten Funktoren $\mathrm{Shv}(X_\mathrm{et}) \to \mathbf{Ab}$ bilden. Der Funktor der globalen Schnitte, $\Gamma_{X_\mathrm{et}} \colon \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$, ist linksexakt, und wir setzen

$$H^n_\mathrm{et}(X,-) := R^n(\Gamma_{X_\mathrm{et}}) \colon \mathrm{Shv}(X_\mathrm{et}) \longrightarrow \mathbf{Ab} \quad \text{für } n \geq 0.$$

$H^n_\mathrm{et}(X,\mathcal{F})$ heißt ***n*-te étale Kohomologiegruppe mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$**. Per Konstruktion der rechtsderivierten Funktoren gilt $H^0_\mathrm{et}(X,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ sowie die folgenden Sätze (siehe [**Wei94**, 2.4.6] für den Beweis des dualen Resultats bezüglich linksderivierter Funktoren):

2.10. Satz (Lange exakte Kohomologiesequenz)**.** Sei $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ eine kurze exakte Sequenz in $\mathrm{Shv}(X_\mathrm{et})$. Dann existiert für alle $n \geq 0$ ein Gruppenhomomorphismus

$$\delta^n \colon H^n_\mathrm{et}(X,\mathcal{H}) \longrightarrow H^{n+1}_\mathrm{et}(X,\mathcal{F}),$$

sodass durch

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n_\mathrm{et}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^n_\mathrm{et}(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^n_\mathrm{et}(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}_\mathrm{et}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

eine lange exakte Sequenz von étalen Kohomologiegruppen gegeben ist.

2.11. Satz (Funktorialität)**.** Für Morphismen zweier kurzer exakter Sequenzen in $\mathrm{Shv}(X_\mathrm{et})$, also kommutativen Diagrammen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r] & \mathcal{G}' \arrow[r] & \mathcal{H}' \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

ist das zugehörige Diagramm der langen exakten Kohomologiesequenzen

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n_{\mathrm{et}}(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^n_{\mathrm{et}}(X,\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & H^n_{\mathrm{et}}(X,\mathcal{H}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n+1}_{\mathrm{et}}(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^n_{\mathrm{et}}(X,\mathcal{F}') \arrow[r] & H^n_{\mathrm{et}}(X,\mathcal{G}') \arrow[r] & H^n_{\mathrm{et}}(X,\mathcal{H}') \arrow[r] & H^{n+1}_{\mathrm{et}}(X,\mathcal{F}') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ebenfalls kommutativ.

2.12. Bemerkung (H^n_{et} und Ext^n, vgl. Bem. 2.10)**.** Für étale Garben $\mathcal{F}$ ist ein Isomorphismus zwischen abelschen Gruppen gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Shv}(X_{\mathrm{et}})}(\mathbb{Z},\mathcal{F}) &\xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}(X) \\ \alpha &\longmapsto \alpha(X)(1), \end{aligned}$$

wobei hier $\mathbb{Z} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Shv}(X_{\mathrm{et}})$ die konstante Garbe bezeichnet. Somit ist $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Shv}(X_{\mathrm{et}})}(\mathbb{Z},-)$ natürlich äquivalent zum globalen Schnittfunktor $\Gamma_{X_{\mathrm{et}}}$ und es gilt

$$H^n_{\mathrm{et}}(X,-) = \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{Shv}(X_{\mathrm{et}})}(\mathbb{Z},-).$$

3. Derivierte Kategorien und Funktoren, Garben- und Hyperkohomologie

An dieser Stelle soll kurz der allgemeine mathematische Rahmen erläutert werden, in welchem motivische Kohomologiegruppen definiert werden. Im Abschnitt 2 werden die Gruppen $H^{*,*}(X,A)$ als Hyperkohomologie von Komplexen aus Garben mit Transfers in Zariski-Topologie definiert. Diese stellt eine Erweiterung des Begriffs der Garbenkohomologie auf Komplexe von Garben dar. Letztere ist definiert als rechtsderivierte Funktoren des globalen Schnittfunktors $\Gamma_X\colon F \mapsto F(X)$, wohingegen sich Hyperkohomologie als hyperrechtsderivierte Funktoren von Γ_X ergibt.

Symbol	Beschreibung
$\mathcal{A}$	abelsche Kategorie
$\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$	Kategorie der Kokettenkomplexe in $\mathcal{A}$
$\mathrm{Kom}^+(\mathcal{A})$	Volle Unterkategorie von $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ der nach unten beschränkten Komplexe ($C^i = 0\ \forall\, i \ll 0$)
$\mathrm{Kom}^-(\mathcal{A})$	Volle Unterkategorie von $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ der nach oben beschränkten Komplexe ($C^i = 0\ \forall\, i \gg 0$)
$D(\mathcal{A})$	Derivierte Kategorie von $\mathcal{A}$
$D^+(\mathcal{A})$	Volle Unterkategorie von $D(\mathcal{A})$ bestehend aus Komplexen mit $H^i(C^*) = 0\ \forall\, i \ll 0$
$D^-(\mathcal{A})$	Volle Unterkategorie von $D(\mathcal{A})$ bestehend aus Komplexen mit $H^i(C^*) = 0\ \forall\, i \gg 0$

3.A. Kohomologie in abelschen Kategorien. Man kann Kohomologiefunktoren $H^n\colon \operatorname{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ für jede abelsche Kategorie $\mathcal{A}$ definieren, indem man $H^n\big((A^\bullet, d^\bullet)\big)$ definiert als $\operatorname{coker}\big(A^{n-1} \to \ker d^n\big)$ (siehe [**GM96**, II. §6]). Dies stellt eine einfache Erweiterung der Kohomologiegruppen von Komplexen abelscher Gruppen dar.

$$\begin{tikzcd} A^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[dr, dotted] & A^n \arrow[r, "d^n"] & A^{n+1} \\ & \ker d^n \arrow[u, dotted] & \end{tikzcd}$$

Man spricht von *Exaktheit* an der Stelle A^n, falls $H^n(A^*) = 0$ gilt. Der Komplex A^* ist eine *exakte Sequenz*, falls er an jeder Stelle exakt ist.

Symbol	Beschreibung
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	abelsche Kategorien, $\mathcal{A}$ mit genug injektiven Elementen
$F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$	additiver linksexakter Funktor
$R^nF\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$	klassischer n-ter rechtsderivierter Funktor
	$R^nF(A) = H^n\big(F(I^*)\big)$
$\mathbb{R}^nF\colon \operatorname{Kom}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$	klassischer n-ter hyperrechtsderivierter Funktor
	$\mathbb{R}^nF(A^*) = H^n\big(\operatorname{Tot}(F(I^{**}))\big)$
$\boldsymbol{R}F\colon D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$	totaler rechtsderivierter Funktor
$\boldsymbol{R}^nF\colon D^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$	n-ter rechtsderivierter Funktor $\boldsymbol{R}^nF(A^*) = H^n\big(\boldsymbol{R}F(A^*)\big)$
	$(\boldsymbol{R}^nF \simeq R^nF$ auf $\mathcal{A}$ bzw. $\boldsymbol{R}^nF \simeq \mathbb{R}^nF$ auf $\operatorname{Kom}(\mathcal{A}))$

3.B. Rechtsderivierte und hyperrechtsderivierte Funktoren – klassischer Ansatz. Sei $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter additiver Funktor zwischen zwei abelschen Kategorien. Weiter besitze $\mathcal{A}$ genug injektive Elemente. Dann ist der n-te rechtsderivierte Funktor $R^nF\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ folgendermaßen gegeben: Man wählt zu $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$ eine *injektive Auflösung*, also eine exakte Sequenz $0 \to A \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ mit injektiven Elementen $I^m \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}$. Dann ist $R^nF(A)$ definiert als $H^n\big(F(I^*)\big)$. Somit misst R^nF gewissermaßen, inwiefern der Funktor F die Exaktheit an der Stelle $I^{n-1} \to I^n \to I^{n+1}$ verletzt.

Um den n-ten hyperrechtsderivierten Funktor $\mathbb{R}^nF\colon \operatorname{Kom}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ zu berechnen, wählt man zu einem Kokettenkomplex A^* in $\mathcal{A}$ eine Cartan-Eilenberg-Auflösung $A^* \to I^{**}$ (siehe [**Wei94**, Abschn. 5.7.9]) und setzt $\mathbb{R}^nF(A^*) = H^n\big(\operatorname{Tot}(F(I^{**}))\big)$, wobei $\operatorname{Tot}(F(I^{**}))$ der totale Komplex des Bikomplex $F(I^{**})$ ist, siehe [**Wei94**].

3.C. Rechtsderivierte Funktoren – moderner Ansatz mittels derivierter Kategorien. Die heute gängige Definition von rechtsderivierten Funktoren benutzt die Sprache von derivierten Kategorien. Die Idee hierbei ist, Komplexe als verallgemeinerte Objekte aufzufassen und zwei Komplexe als identisch anzusehen, wenn ein Quasiisomorphismus zwischen den Komplexen existiert. Dabei nennt man einen Morphismus $f\colon C \to D$ zwischen Komplexen in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ über einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ einen *Quasiisomorphismus*, falls für alle $n \in \mathbb{Z}$ die induzierte Abbildung $H^n(f)\colon H^n(C) \to H^n(D)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{A}$ ist. Unter der *derivierten Kategorie* von $\mathcal{A}$ versteht man eine Kategorie $D(\mathcal{A})$ mit einem Funktor $\mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$, der Quasiisomorphismen in Isomorphismen überführt, sodass das Tupel $(D(\mathcal{A}), \mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}))$ bezüglich dieser Eigenschaft universell ist. Man kann $D(\mathcal{A})$ konkret als Lokalisierung (siehe [**GM96**, III. §2.2]) von $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ nach der Klasse der Quasiisomorphismen konstruieren. In der Praxis ist es aus technischen Gründen meist üblich, zunächst zur Homotopiekategorie von Komplexen überzugehen (siehe [**GM96**, III. §4]) und erst dann zu lokalisieren.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Kom}(\mathcal{A}) \arrow[rr, "\text{Quasiisom.} \mapsto \text{Isom.}"] \arrow[dr] & & D \\
& D(\mathcal{A}) \arrow[ur, dotted, "\exists!"'] &
\end{tikzcd}$$

Sei nun wieder $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linksexakt und additiv mit abelschen Kategorien $\mathcal{A}$ (mit genug Injektiven), $\mathcal{B}$. Man kann dann den *totalen rechtsderivierten Funktor* $\boldsymbol{R}F\colon D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$ konstruieren (siehe [**GM96**, III. §6], insbesondere Theorem 12 für die Existenz). Dieser beinhaltet alle Information über die klassischen rechtsderivierten Funktoren. So ist der Funktor R^nF natürlich äquivalent zu $A \mapsto H^n(\boldsymbol{R}F(A))$ (wobei A auf der rechten Seite aufgefasst wird als trivialer Komplex in der derivierten Kategorie), und die klassischen hyperrechtsderivierten Funktoren $\mathbb{R}^nF$ sind natürlich äquivalent zu $A^* \mapsto H^n(\boldsymbol{R}F(A^*))$.

Symbol	Beschreibung
X_τ	kleiner τ-Situs von $X \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sm}/k)$
$H^n_\tau(X,-)\colon \mathrm{Shv}(X_\tau) \to \mathbf{Ab}$	Garbenkohomologiefunktor
$\mathbb{H}^n_\tau(X,-)\colon D^+(\mathrm{Shv}(X_\tau)) \to \mathbf{Ab}$	Hyperkohomologiefunktor

3.D. Garben- und Hyperkohomologie. Wir brauchen den Begriff von Garbenkohomologie eines Schemas bezüglich einer Grothendieck-Topologie auf Schemata. Die Idee ist dieselbe, wie bei Garbenkohomologie von topologischen Räumen. Sei X ein (separiertes) glattes Schema und X_τ der zugehörige kleine Situs bezüglich einer Grothendieck-Topologie (z.B. $\tau =$ étale, Nisnevich- oder Zariski-Topologie). Dann ist die ***n*-te Garbenkohomologie** von X_τ definiert als der rechtsderivierte Funktor

$$H^n_\tau(X,-) = H^n(X_\tau,-) = \boldsymbol{R}^n\Gamma_{X_\tau}(-)\colon \mathrm{Shv}(X_\tau) \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

und die ***n*-te Hyperkohomologie** von X_τ als der (hyper-)rechtsderivierte Funktor

$$\mathbb{H}^n_\tau(X,-) = \mathbb{H}^n(X_\tau,-) = \boldsymbol{R}^n\Gamma_{X_\tau}(-)\colon D^+(\mathrm{Shv}(X_\tau)) \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

des Funktors der globalen Schnitte $\Gamma_{X_\tau}\colon \mathrm{Shv}\,(X_\tau) \to \mathbf{Ab}$, $F \mapsto F(X)$. Allgemeiner existiert Garbenkohomologie auf beliebigen Siten T, die ein Endobjekt $X_{\mathrm{ter}} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Cat}\,T)$ besitzen (welches die Rolle des Schemas X einnimmt). Die Kategorie $\mathrm{Shv}(T)$ der T-Garben abelscher Gruppen ist – als Funktorkategorie mit Objekten $(\mathrm{Cat}\,T)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ – abelsch und hat genug injektive Elemente (siehe [**Wei94**, Abschn. 1.6.4 und Aufg. 2.3.7]). Weiter ist der Funktor der globalen Schnitte,

$$\Gamma_T\colon \mathrm{Shv}(T) \to \mathbf{Ab}, \quad F \to F(X_{\mathrm{ter}}),$$

linksexakt (siehe [**Del77**]). Somit existieren rechtsderivierte Funktoren von Γ_T. Die n-te Kohomologie von T ist der Funktor $H^n(T, -) = R^n\Gamma_T(-)$.

Literaturverzeichnis

[Bei82] A. Beilinson: *Letter to Soule*, 11. Januar 1982, Preprint, K-theory Preprint Archives, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0694/`. (S. 38.)

[Bei87] A. Beilinson: *Height pairing between algebraic cycles*. In: *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*, Bd. 1289 von *Lecture Notes in Math.*, S. 1–25, Springer, Berlin, 1987, URL `http://dx.doi.org/10.1007/BFb0078364`. (S. xii, 38.)

[BGSV90] A. Beilinson, A. B. Goncharov, V. V. Schechtman und A. N. Varchenko: *Aomoto dilogarithms, mixed Hodge structures and motivic cohomology of pairs of triangles on the plane*. In: *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, Bd. 86 von *Progr. Math.*, S. 135–172, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990. (S. 38.)

[Blo80] S. Bloch: *Lectures on algebraic cycles*. Duke University Mathematics Series, IV, Duke University Mathematics Department, Durham, N.C., 1980. (S. xi.)

[BMS87] A. Beĭlinson, R. MacPherson und V. Schechtman: *Notes on motivic cohomology*. Duke Math. J. 54 (2), S. 679–710, 1987, URL `http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-87-05430-5`. (S. 38.)

[Bor03] S. Borghesi: *Algebraic Morava K-theories*. Invent. Math. 151 (2), S. 381–413, 2003, URL `http://dx.doi.org/10.1007/s00222-002-0257-4`. (S. xii.)

[BT73] H. Bass und J. Tate: *The Milnor ring of a global field*. In: *Algebraic K-theory, II: "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Seattle, Wash., Battelle Memorial Inst., 1972)*, S. 349–446. Lecture Notes in Math., Vol. 342, Springer, Berlin, 1973. (S. xi, 7, 11.)

[Dei04] O. Deiser: *Einführung in die Mengenlehre*. Springer-Lehrbuch., Springer-Verlag, Berlin, 2004, 2. Aufl., die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo. (S. 58.)

[Del77] P. Deligne: *Cohomologie étale*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569, Springer-Verlag, Berlin, 1977, séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$. (S. 90.)

[EKM08] R. Elman, N. Karpenko und A. Merkurjev: *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, Bd. 56 von *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. (S. 25, 26, 51, 68.)

[Fri05] E. M. Friedlander: *Motivic complexes of Suslin and Voevodsky*. In: *Handbook of K-theory. Vol. 1, 2*, S. 1081–1104, Springer, Berlin, 2005, URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-27855-9`. (S. 45.)

[Ful98] W. Fulton: *Intersection theory*, Bd. 2 von *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1998, 2. Aufl. (S. 40, 47.)

[GL01] T. Geisser und M. Levine: *The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky*. J. Reine Angew. Math. 530, S. 55–103, 2001, URL `http://dx.doi.org/10.1515/crll.2001.006`. (S. 65.)

[GM96] S. I. Gelfand und Y. I. Manin: *Methods of homological algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. (S. 42, 88, 89.)

[Gro57] A. Grothendieck: *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tôhoku Math. J. (2) 9, S. 119–221, 1957. (S. 44.)

[GS06] P. Gille und T. Szamuely: *Central simple algebras and Galois cohomology*, Bd. 101 von *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006, URL `http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511607219`. (S. 7, 8, 36, 63.)

[HW08] C. Haesemeyer und C. Weibel: *Norm Varieties and the Chain Lemma (after Markus Rost)*, 22. Juni 2008, Preprint, K-theory Preprint Archives, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0900/`. (S. xiii.)

[Kah05] B. Kahn: *La conjecture de Milnor (d'après V. Voevodsky)*. In: *Handbook of K-theory. Vol. 1, 2*, S. 1105–1149, Springer, Berlin, 2005, URL `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/handbook/2-1105-1150.pdf`. (S. 61, 70, 76, 80.)

[Kat80] K. Kato: *A generalization of local class field theory by using K-groups. II.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27 (3), S. 603–683, 1980. (S. xi, 11.)

[Ker90] I. Kersten: *Brauergruppen von Körpern*. Aspects of Mathematics, D6, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1990. (S. 7, 8.)

[Ker07] I. Kersten: *Brauergruppen*. Universitätsverlag Göttingen, 2007, URL `http://webdoc.sub.gwdg.de/univerlag/2007/brauergruppen.pdf`. (S. 21, 34.)

[KMRT98] M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost und J.-P. Tignol: *The book of involutions*, Bd. 44 von *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. (S. 22.)

[Lam05] T. Y. Lam: *Introduction to quadratic forms over fields*, Bd. 67 von *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. (S. 51.)

[Lan65] S. Lang: *Algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1965. (S. 19, 61.)

[Lic84] S. Lichtenbaum: *Values of zeta-functions at nonnegative integers*. In: *Number theory, Noordwijkerhout 1983 (Noordwijkerhout, 1983)*, Bd. 1068 von *Lecture Notes in Math.*, S. 127–138, Springer, Berlin, 1984, URL `http://dx.doi.org/10.1007/BFb0099447`. (S. xii, 38.)

[Lic90] S. Lichtenbaum: *New results on weight-two motivic cohomology*. In: *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, Bd. 88 von *Progr. Math.*, S. 35–55, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-0-8176-4576-2_2`. (S. 38.)

[Mer81] A. Merkurjev: *On the norm residue symbol of degree* 2. Dokl. Akad. Nauk SSSR 261 (3), S. 542–547, 1981. (S. xi, 54, 75.)

[Mil58] J. Milnor: *The Steenrod algebra and its dual*. Ann. of Math. (2) 67, S. 150–171, 1958. (S. 81.)

[Mil70] J. Milnor: *Algebraic K-theory and quadratic forms*. Invent. Math. 9, S. 318–344, 1969/1970. (S. xi, 6, 7, 31, 51.)

[Mil71] J. Milnor: *Introduction to algebraic K-theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971, annals of Mathematics Studies, No. 72. (S. 1.)

[Mil80] J. S. Milne: *Étale cohomology*, Bd. 33 von *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980. (S. 84.)

[Mil08] J. S. Milne: *Lectures on Etale Cohomology (v2.10)*. 2008, available at `http://www.jmilne.org/math/`. (S. 83, 84, 85, 86.)

[Mor98] F. Morel: *Voevodsky's proof of Milnor's conjecture*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 35 (2), S. 123–143, 1998, URL `http://dx.doi.org/10.1090/S0273-0979-98-00745-9`. (S. 81.)

[MS82] A. Merkurjev und A. Suslin: *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 46 (5), S. 1011–1046, 1135–1136, 1982. (S. xi, xii.)

[MS90] A. Merkurjev und A. Suslin: *Norm residue homomorphism of degree three*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 54 (2), S. 339–356, 1990. (S. xii.)

[MVW06] C. Mazza, V. Voevodsky und C. Weibel: *Lecture notes on motivic cohomology*, Bd. 2 von *Clay Mathematics Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. (S. 38, 40, 41, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 65, 77.)

[Neu11] J. Neukirch: *Klassenkörpertheorie : Neu herausgegeben von Alexander Schmidt*. 2011, URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-17325-7`. (S. 17, 19.)

[Nis89] Y. A. Nisnevich: *The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory*. In: *Algebraic K-theory: connections with geometry and topology (Lake Louise, AB, 1987)*, Bd. 279 von *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, S. 241–342, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989. (S. 43.)

[OVV07] D. Orlov, A. Vishik und V. Voevodsky: *An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms*. Ann. of Math. (2) 165 (1), S. 1–13, 2007, URL `http://dx.doi.org/10.4007/annals.2007.165.1`. (S. 31, 51.)

[Ros86] M. Rost: *On Hilbert Satz 90 for K_3 for degree-two extensions*, Mai 1986, Preprint, `http://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/K3-86.html`. (S. xii.)

[Ros88] M. Rost: *On the spinor norm and $A_0(X, K_1)$ for quadrics*, September 1988, Preprint, `http://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/spinor.html`. (S. xiii, 78, 81.)

[Ros90] M. Rost: *Some new results on the Chow groups of quadrics*, Januar 1990, Preprint, `http://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/chowqudr.html`. (S. xiii, 78, 81.)

[Ros98a] M. Rost: *Chain lemma for splitting fields of symbols*, August 1998, Preprint, `http://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/chain-lemma.html`. (S. xiii.)

[Ros98b] M. Rost: *The motive of a Pfister form*, Januar 1998, Preprint, `http://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/motive.html`. (S. xiii, 78, 81.)

[Ros06] M. Rost: *On the basic correspondence of a splitting variety*, September 2006, Preprint, `http://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/basic-corr.html`. (S. 82.)

[RZ10] L. Ribes und P. Zalesskii: *Profinite groups*, Bd. 40 von *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2010, 2. Aufl., URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-01642-4`. (S. 11.)

[SGA] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, 270 & 305, Springer-Verlag, Berlin, 1972–1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier. (S. 83.)

[Sha94] I. R. Shafarevich: *Basic algebraic geometry. 2*. Springer-Verlag, Berlin, 1994, 2. Aufl. (S. 42.)

[SJ06] A. Suslin und S. Joukhovitski: *Norm varieties*. J. Pure Appl. Algebra 206 (1-2), S. 245–276, 2006, URL `http://dx.doi.org/10.1016/j.jpaa.2005.12.012`. (S. xiii, 78.)

[SV95] A. Suslin und V. Voevodsky: *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, 26. September 1995, Preprint, K-theory Preprint Archives, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0083/`. (S. 50, 64, 65.)

[SV99] A. Suslin und V. Voevodsky: *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*, 14. April 1999, Preprint, K-theory Preprint Archives, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0341/`. (S. xii, 44, 54.)

[SV00] A. Suslin und V. Voevodsky: *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*. In: *The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998)*, Bd. 548 von *NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci.*, S. 117–189, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000. (S. 90.)

[Vis09] A. Vishik: *Fields of u-invariant $2^r + 1$*. In: *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II*, Bd. 270 von *Progr. Math.*, S. 661–685, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009, URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-0-8176-4747-6_22`. (S. 75.)

[Voe95] V. Voevodsky: *Bloch-Kato conjecture for* $\mathbf{Z}/2$*-coefficients and algebraic Morava* K*-theories*, 17. Juni 1995, Preprint, K-theory Preprint Archives, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0076/`. (S. xii, xiii.)

[Voe96] V. Voevodsky: *The Milnor Conjecture*, 20. Dezember 1996, Preprint, K-theory Preprint Archives, `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0170/`. (S. xii, xiii, 63.)

[Voe00] V. Voevodsky: *Cohomological theory of presheaves with transfers*. In: *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Bd. 143 von *Ann. of Math. Stud.*, S. 87–137, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000. (S. 45.)

[Voe03a] V. Voevodsky: *Motivic cohomology with* $\mathbf{Z}/2$*-coefficients*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (98), S. 59–104, 2003, URL `http://dx.doi.org/10.1007/s10240-003-0010-6`. (S. xii, 45, 50, 70, 73, 77, 79, 80, 81.)

[Voe03b] V. Voevodsky: *Reduced power operations in motivic cohomology*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (98), S. 1–57, 2003, URL `http://dx.doi.org/10.1007/s10240-003-0009-z`. (S. xii, 81.)

[Voe11] V. Voevodsky: *On motivic cohomology with* $\mathbf{Z}/\ell$*-coefficients*. Ann. of Math. (2) 174 (1), S. 401–438, 2011, URL `http://dx.doi.org/10.4007/annals.2011.174.1.11`. (S. xii, 79, 80, 82, 90.)

[VSF00] V. Voevodsky, A. Suslin und E. M. Friedlander: *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, Bd. 143 von *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000. (S. xii, 38, 65.)

[Wei94] C. Weibel: *An introduction to homological algebra*, Bd. 38 von *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. (S. 16, 41, 44, 85, 86, 88, 90.)

[Wei04] C. Weibel: *A road map of motivic homotopy and homology theory*. In: *Axiomatic, enriched and motivic homotopy theory*, Bd. 131 von *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, S. 385–392, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004. (S. 38.)