Institut für Mathematik, FB 08, Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Bachelorarbeit

Multiplikative Formen

vorgelegt von:

Josephine Krönke

zur Erlangung des akademischen Grades

Bachelor Of Science

15. Dezember 2011

Betreuer:
Jun.-Prof. Dr. Nikita Semenov

JG|U

JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

Kurzfassung:

Die vorliegende Bachelorarbeit zum Thema „Multiplikative Formen“ befasst sich mit der multiplikativen Komposition quadratischer Formen. Zu Beginn werden motiviert durch die Pfister-Formen multiplikative und stark multiplikative Formen eingeführt, woraus die Existenz von 2^m-Quadrate-Identitäten hervorgeht. Im Anschluss wird eine Sechzehn-Quadrate-Identität hergeleitet. Zuletzt wird mit darstellungstheoretischen Grundlagen für endliche Gruppen das Theorem von Hurwitz bewiesen, welches besagt, dass nur für $n = 1, 2, 4$ oder 8 eine bilineare Komposition für Summen von n Quadraten existiert.

Als Textvorlagen dienen im ersten Teil [Lam04], [Kah09], [Wei] und [Wik11b], im zweiten [ZE66] und im dritten schließlich [Her68], [Eck43], [Wik11a], [FH91] und [Con10]. Desweiteren wird in der Einleitung [DI07] verwendet.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Es ist eine bekannte Fragestellung, wann das Produkt zweier Summen über n Quadrate wieder einer Summe aus n Quadraten entspricht:

$$(x_1^2 + ... + x_n^2) \cdot (y_1^2 + ... + y_n^2) = z_1^2 + ... + z_n^2. \tag{1.1}$$

Für $n = 1$ sieht man leicht ein, dass $x^2 \cdot y^2 = z^2$ für $z = xy$ erfüllt ist. Welche Bedingungen sind erforderlich, solche Identitäten für höhere oder sogar allgemeine n aufzustellen?
Zunächst kann man diese Gleichung 1.1 als multiplikative Kompositionsformel einer quadratischen Form $q(X) = \langle x_1, ..., x_n \rangle := x_1^2 + ... + x_n^2$ in n Variablen betrachten.
Wir werden daher in vorliegender Bachelorarbeit untersuchen, welche Bedingungen an eine quadratische Form q geknüpft werden müssen, um allgemein eine Identität der Art

$$q(x_1, ..., x_n) \cdot q(y_1, ..., y_n) = q(z_1, ..., z_n) \tag{1.2}$$

zu erhalten.

Für die Bearbeitung dieser Fragestellung werden wir im ersten Abschnitt 2.1 auf Grundlage von [Lam04] die *multiplikativen* und *stark multiplikativen* Formen einführen und sehen, dass theoretisch für jede m-fache *Pfister-Form*, also für eine Form der Art $\langle\langle a_1, ..., a_m \rangle\rangle := \bigotimes_{i=1}^m \langle 1, a_i \rangle$, eine Gleichheit 1.2 existiert. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass in diesem Fall gefordert werden muss, dass es sich bei den z_i um rationale Funktionen in den x und y handelt. Diese Erkenntnis ist auf Albrecht Pfister zurückzuführen, welcher sich intensiv mit quadratischen Formen beschäftigt hat.

Die Betrachtung von Pfister-Formen impliziert eine Forderung an n zur Erfüllung von 1.1: Da eine m-fache Pfister-Form q die Dimension 2^m besitzt und wir mit der Wahl $q = \langle\langle 1, ..., 1 \rangle\rangle$ aus 1.2 genau die Gleichung 1.1 erhalten, muss $n = 2^m$ sein.

Für $n = 1, 2$ sind die expliziten Darstellungen dieser Formeln schnell gefunden. Im Jahr 1748 entdeckte Leonhard Euler die Vier-Quadrate-Identität, welche daher auch *Eulerscher Vier-Quadrate-Satz* genannt wird. Fast ein Jahrhundert später wurden 1843 durch Sir William Rowan Hamilton die *Quaternionen* eingeführt und untersucht, mit deren Eigenschaften sich die Vier-Quadrate-Identität herleiten lässt.
Nur wenig später folgten 1843 bzw. 1845 die Entdeckung der *Oktionen* durch John Thomas Graves und deren Veröffentlichung durch Arthur Cayley, wodurch auch die Acht-Quadrate-Identität formuliert werden konnte. Diese ist jedoch benannt nach Ferdinand Degen, da dieser sie schon um 1818 herum unabhängig von Graves und Cayley aufgestellt hat. Zu diesen zwei Identitäten und ihren Entdeckungen siehe auch [Wik11b] und [Wei].
Nun stellte sich die Frage nach Identitäten mit höheren n, doch erst 1965 veröffentlichten Hans Zassenhaus und Wolfgang Eichhorn die Herleitung einer Sechzehn-Quadrate-Identität. Diese möchten wir in Abschnitt 2.2 analog zu ihrer Arbeit [ZE66] und mithilfe eines Computeralgebrasystems konkret ausarbeiten.

Zum Schluss möchten wir in 2.3 anhand von einigen Resultaten der Darstellungstheorie endlicher Gruppen aus [Her68] und [FH91] das *Theorem von Hurwitz* beweisen, welches 1898 von Adolf Hurwitz formuliert worden ist. Dieses Theorem besagt, dass eine Identität der Art 1.1 mit *bilinearen* z_i in den x, y nur möglich ist, sofern $n = 1, 2, 4$ oder 8. Daniel Dugger und Daniel C. Isaksen haben 2007 in ihrer Arbeit [DI07] für diesen Zusammenhang eine schwächere aber allgemeinere Aussage formuliert, bei der unter der Voraussetzung einer (1.1)-Identität mit bilinearen z_i nur $n = 2^m$ folgt.
Unsere Ausarbeitung des Beweises beruht auf jener von Israel Nathan Herstein [Her68], welcher sich wiederum auf die Veröffentlichung von Beno Eckmann [Eck43] bezieht.

2. Hauptteil

In folgender Ausarbeitung werden wir zu Beginn multiplikative Formen und einige ihrer Eigenschaften einführen. Nach der Herleitung einer Sechzehn-Quadrate-Identität als Beispiel für die Komposition multiplikativer Formen werden wir zuletzt das Theorem von Hurwitz beweisen, indem wir auf eine Reihe von Resultaten aus der Darstellungstheorie endlicher Gruppen zurückgreifen.

2.1. Einführung in multiplikative Formen

In diesem Kapitel werden wir uns mit den Definitionen und Eigenschaften von multiplikativen und stark multiplikativen Formen beschäftigen, wobei sich der inhaltliche Aufbau eng an [Lam04] orientiert.
Sei F überall ein Körper mit Charakteristik $\neq 2$. Da wir als Ansatz die Pfister-Formen betrachten möchten, beginnen wir mit einer formalen Definition dieser Formen.

Definition 2.1.1. Eine *n-fache Pfister-Form* über einem Körper F ist eine 2^n-dimensionale quadratische Form $\bigotimes_{i=1}^{n}\langle 1, a_i\rangle$ mit $a_1, ..., a_n \in F^\times$, welche wir auch mit $\langle\langle a_1, ..., a_n\rangle\rangle$ bezeichnen werden.[1][2]

Die Menge an Werten ungleich Null, die eine quadratische Form φ über F repräsentiert, definieren wir durch

$$D_F(\varphi) := \left\{d \in F^\times \mid \exists\, v \in V \text{ mit } \varphi(v) = d\right\}, \tag{2.1}$$

wobei V ein endlichdimensionaler F-Vektorraum ist. Die Gruppe der sogenannten Ähnlichkeitsfaktoren von φ wird mit

$$G_F(\varphi) := \left\{a \in F^\times \mid a \cdot \varphi \cong \varphi\right\} \tag{2.2}$$

bezeichnet.
Im Falle der Pfister-Formen gilt für diese beiden Mengen folgender Zusammenhang:

[1] $F^\times$ bezeichnet die abelsche Gruppe $F\setminus\{0\}$.
[2] Die Notation $\langle a_1, ..., a_n\rangle$ bezeichnet eine Diagonalform $a_1x_1^2 + ... + a_nx_n^2$.

Satz 2.1.2. *Sei φ eine Pfister-Form über F. Dann gilt:*

$$D_F(\varphi) = G_F(\varphi). \tag{2.3}$$

Insbesondere ist φ eine Gruppen-Form über F, d.h. $D_F(\varphi)$ ist abgeschlossen unter Multiplikation und bildet eine Untergruppe von $F^\times$ mit $1 \in D_F(\varphi)$.

Beweis. Da φ wie jede Pfister-Form die 1 repräsentiert, können wir zum einen $\varphi \cong \langle 1 \rangle \perp \varphi'$ schreiben und nennen φ' hierbei *reine Unterform* von φ. Zum anderen ist klar, dass $G_F(\varphi) \subseteq D_F(\varphi)$. Zu zeigen bleibt, dass wenn $c \in D_F(\varphi)$, auch $\langle c \rangle \cdot \varphi \cong \varphi$ gelten muss.
Sei dazu $c = t^2 + b$ mit $b \in D_F(\varphi') \cup \{0\}$, wobei wir hier annehmen, dass $b \neq 0$. Nach dem Satz über reine Unterformen aus [Lam04] existieren nun geeignete $b_2, ..., b_n \in F^\times$, sodass $\varphi \approx \langle\langle b, b_2, ..., b_n \rangle\rangle$, wobei das Symbol $\approx$ wie in [Lam04] für die Chain P-Äquivalenz steht, welche Isomorphie impliziert.
Da $c \in D_F\langle 1, b\rangle$, folgt $\langle 1, b\rangle \cong \langle c, cb\rangle$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $c \in G_F\langle\langle b \rangle\rangle$, und wir können folgern, dass $c \in G_F(\varphi)$. □

Mit dieser Eigenschaft lässt sich für eine beliebige m-fache Pfister-Form φ eine interessante Komposition herleiten.
Dazu nehmen wir zwei Variablenreihen $X = (x_1, ..., x_{2^m})$ und $Y = (y_1, ..., y_{2^m})$ mit unabhängigen Unbestimmten $x_i, y_i \in F$ und bezeichnen mit $L = F(X, Y)$ den zugehörigen rationalen Funktionenkörper. Wir sehen nun, dass $\varphi_L = L \otimes_F \varphi$ eine m-fache Pfister-Form über L ist, und können mit eingangs beschriebener Eigenschaft folgern, dass $D_L(\varphi)$ $(= D_L(\varphi_L))$ eine multiplikative Gruppe ist. Da $\varphi(X)$ und $\varphi(Y)$ von φ repräsentiert werden (mit $\varphi(X)$ und $\varphi(Y) \in L^\times$), wird also insbesondere auch das Produkt $\varphi(X) \cdot \varphi(Y) \in L$ von φ repräsentiert. Mit anderen Worten: Es existieren rationale Funktionen $z_i \in F(X, Y)$, $1 \leq i \leq 2^m$, sodass

$$\varphi(X) \cdot \varphi(Y) = \varphi(z_1, ... z_{2^m}). \tag{2.4}$$

Diese Komposition für eine Pfister-Form φ motiviert die folgende Definition.

Definition 2.1.3. Sei q eine quadratische Form der Dimension n und sei $L = F(X, Y)$, wobei $X = (x_1, ..., x_n)$ und $Y = (y_1, ..., y_n)$ mit unabhängigen Unbestimmten $x_i, y_i \in F$. Dann heißt q *multiplikativ*, wenn $q(X) \cdot q(Y) \in D_L(q)$, d. h. wenn gilt:

$$q(X) \cdot q(Y) = q(z_1, ..., z_n) \tag{2.5}$$

für geeignete $z_i \in L$.

Verdeutlichen wir diese Definition an zwei Beispielen.

Beispiel 2.1.4.

1. Jede Pfister-Form q ist, wie wir vor Definition 2.1.3 gesehen haben, multiplikativ.

2. Jede über F isotrope Form q ist multiplikativ, denn: Die Form q ist isotrop, d. h. es existiert ein von Null verschiedener Vektor v in einem F-Vektorraum V, sodass $q(v) = 0$. Daraus folgt nach [Lam04], dass q universell ist, also laut Definition alle Elemente ungleich Null aus F repräsentiert. Demnach gilt hier für $L = F(X, Y)$, dass $D_L(q) = L^\times$ und somit: $q(X) \cdot q(Y) \in L^\times = D_L(q)$.

Anhand der folgenden Proposition werden wir sehen, dass multiplikative Formen sogar eng mit Gruppen-Formen verwandt sind.

Proposition 2.1.5. *Eine Form q über F ist multiplikativ genau dann, wenn q eine „hereditäre Gruppen-Form“ ist in dem Sinne, dass $D_K(q)$ eine Gruppe ist für einen Körper $K \supseteq F$.*

Wir benötigen als Lemma das Substitutionsprinzip, dessen Beweis in [Lam04] nachzulesen ist.

Lemma 2.1.6 (Substitutionsprinzip)**.** *Sei γ eine quadratische Form über F und sei $X = (x_1, ..., x_s)$ mit unabhänigen Unbestimmten $x_i \in F$. Sei $p(X) \in F(X)$ und $e = (e_1, ..., e_s) \in F^s$, sodass $p(e) \neq 0$ definiert ist. Dann gilt:*

$$p(X) \in D_{F(X)}(\gamma) \Longrightarrow p(e) \in D_F(\gamma). \tag{2.6}$$

Nun können wir Proposition 2.1.5 beweisen.

Beweis. Wählen wir $K = F(X, Y)$, so ist die eine Richtung direkt gezeigt.
Für die andere Richtung nehmen wir an, dass q mutliplikativ ist. Sei K eine Erweiterung von F und seien $q(d)$ und $q(e)$ zwei von q repräsentierte Werte ungleich Null über K,

$d, e \in K^n$. Da die Formel 2.5 erfüllt ist, wird $q(X) \cdot q(Y)$ sowohl über $F(X, Y)$ also auch über $K(X, Y)$ von q repräsentiert. Mit dem Substitutionsprinzip 2.1.6 folgt, dass q auch $q(d) \cdot q(e)$ in K repräsentiert. Das bedeutet, $D_K(q)$ ist eine Gruppe unter Multiplikation. $\square$

Als nächstes wollen wir zu der Definition der stark multiplikativen Formen kommen.

Definition 2.1.7. Eine n-dimensionale Form q über F heißt *stark multiplikativ*, wenn $q(X) \in G_{F(X)}(q)$, d. h. wenn gilt: $\langle q(X) \rangle \cdot q \cong q$ über $F(X)$, wobei $X = (x_1, ..., x_n)$.

Hierzu folgen wiederum zwei Beispiele.

Beispiel 2.1.8.

1. Jede Pfister-Form q ist stark multiplikativ, da q eine Gruppen-Form ist und in diesem Fall gilt: $q(X) \in D_F(X)(q) = G_F(X)(q)$.
2. Ist q hyperbolisch über F, dann gilt nach einer Bemerkung aus [Lam04], dass $G_K(q) = K^\times$ für jeden Erweiterungskörper $K \supseteq F$. Somit ist q stark multiplikativ.

Kommen wir nun zu dem beeindruckenden Theorem von Pfister, das zur weiteren Charakterisierung von sowohl anisotropen (also nicht isotropen) Pfister-Formen als auch anisotropen multiplikativen und stark multiplikativen Formen beiträgt. Es zeigt uns insbesondere, dass eine multiplikative Form entweder eine isotrope Form oder eine anisotrope Pfister-Form ist.

Theorem 2.1.9 (Pfister)**.** *Sei q eine beliebige anisotrope Form über F. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *q ist eine Pfister-Form über F.*
2. *q ist multiplikativ.*
3. *q ist stark multiplikativ.*

Beachtenswert ist, dass die Eigenschaft der Anisotropie nur für die Tatsache benötigt wird, dass aus der Multiplikativität folgt, dass die Form q eine Pfister-Form ist.

Beweis. Die Folgerung von 1. nach 3. haben wir bereits in 2.1.8(1) gesehen.
Wir nehmen daher an, dass q stark multiplikativ ist, und wollen zeigen, dass hieraus Multiplikativität folgt. Da definitionsgemäß für q gilt $\langle q(X) \rangle \cdot q \cong q$ über $F(X)$, ist offensichtlich, dass das Produkt $q(X) \cdot q(Y)$ über $F(X, Y)$ von q repräsentiert wird. Also ist q multiplikativ.
Als letztes zeigen wir in diesem Ringbeweis, dass q eine Pfister-Form ist, wenn wir voraussetzen, dass q multiplikativ ist. Aus Proposition 2.1.5 ist bekannt, dass in diesem Fall

$D_K(q)$ eine Gruppe ist für jeden Körper $K \supseteq F$, also insbesondere für die Wahl $K = F$. Daraus folgt, dass $1 \in D_F(q)$ und somit q die sogenannte 0-fache Pfister-Form $\langle 1 \rangle$ enthält. Wir betrachten nun die Isomorphie $q \cong \varphi \perp q_0$, wobei φ bei der Wahl, r sei maximal, eine r-fache Pfister-Form ist, die in q enthalten ist. Ist $\dim(q_0) = 0$, so sind wir fertig. Wir nehmen also stattdessen an, dass $q_0 \cong \langle c, ... \rangle$, und betrachten die allgemeine Darstellung $\varphi(X) + c \cdot \varphi(Y)$ der Form $\varphi \perp \langle c \rangle \cdot \varphi$ über $K = F(X, Y)$, wobei $X = (x_1, ..., x_{2^r})$ und $Y = (y_1, ..., y_{2^r})$ mit unabhängigen Unbestimmten x_i, y_i. Mit der Multiplikativität von q folgt

$$\varphi(X) + c \cdot \varphi(Y) = \varphi(Y) \cdot \left(\frac{\varphi(X)}{\varphi(Y)} + c \right) \in D_K(q), \tag{2.7}$$

denn $\varphi(Y) \in D_K(\varphi) \subseteq D_K(q)$ und $\varphi(X)/\varphi(Y) + c \in D_K(\varphi)$, da φ eine Pfister-Form ist. Das bedeutet, q repräsentiert die Form $\varphi \perp \langle c \rangle \cdot \varphi$ (man sagt auch „dominiert“) und dies ist nach dem Dritten Representationstheorem aus [Lam04] wegen der Anisotropie von q äquivalent dazu, dass $\varphi \perp \langle c \rangle \cdot \varphi \subseteq q$.
Da $\varphi \perp \langle c \rangle \cdot \varphi$ aber eine $(r+1)$-fache Pfister-Form ist und q nach Annahme maximal eine r-fache Pfister-Form enthält, ist dies ein Widerspruch. Folglich muss $q \cong \varphi$ gelten, q ist also eine Pfister-Form. □

Betrachten wir nun in dem folgenden Satz den isotropen Fall.

Satz 2.1.10. *Eine Form q ist isotrop und stark multiplikativ über F genau dann, wenn q eine hyperbolische Form ist.*

Beweis. In 2.1.8(2) ist bereits die eine Richtung gezeigt.
Für die andere Richtung nehmen wir an, dass q isotrop und stark multiplikativ ist. Nach dem Dekompositionstheorem von Witt aus [Lam04] finden wir eine orthogonale Summe mit $q \cong h \perp \gamma$, wobei h hyperbolisch und γ isotrop ist. Da q isotrop ist, muss $\dim(\gamma) < \dim(q)$ gelten. Aus der Tatsache, dass $\langle q(X) \rangle \cdot q \cong q$ über $F(X)$, folgt nun

$$\langle q(X) \rangle \cdot h \perp \langle q(X) \rangle \cdot \gamma \cong \langle q(X) \rangle \, (h \perp \gamma) \cong h \perp \gamma. \tag{2.8}$$

Kürzen wir mit $\langle q(X) \rangle \cdot h$, bekommen wir $\langle q(X) \rangle \cdot \gamma \cong \gamma$.
Wäre $\dim(\gamma) > 0$, so würde mit einem Korollar aus [Lam04] direkt folgen, dass $\dim(\gamma) \geq \dim(q)$. Da dies bekanntlich nicht der Fall ist, muss folglich gelten $\dim(\gamma) = 0$. Somit ist $q \cong h$ hyperbolisch. □

Anhand der Resultate 2.1.9 und 2.1.10 können wir nun sogar sagen, dass eine stark multiplikative Form über F entweder eine hyperbolische Form oder eine anisotrope Pfister-Form ist.

Insgesamt lassen sich unsere bisherigen Ergebnisse in einem Mengendiagramm 2.1 ähnlich zu [Lam04] veranschaulichen. Hierbei ist auch ersichtlich, dass jede isotrope Pfister-Form hyperbolisch ist [Kah09].

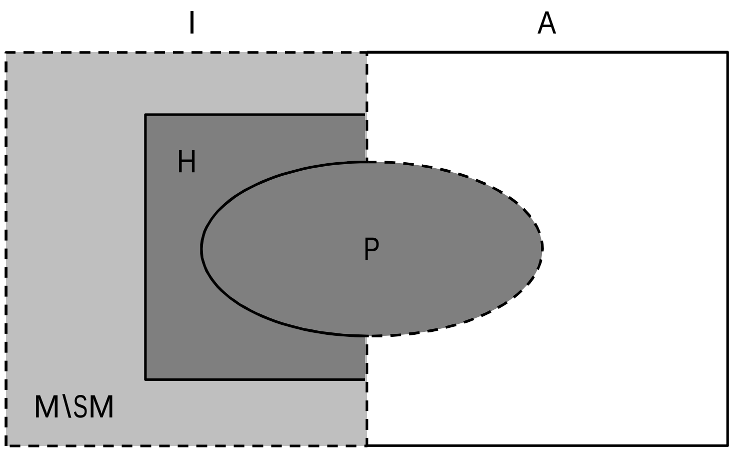

Abbildung 2.1.: I = isotrope Formen, A = anisotrope Formen, H = hyperbolische Formen, P = Pfister-Formen, M = multiplikative Formen, SM = stark multiplikative Formen. M = P ∪ I (gestrichelt), SM = P ∪ H (dunkelgrau)

Im Folgenden möchten wir konkret auf eine multiplikative Form eingehen.

Anwendung 2.1.11. Wir betrachten den isotropen Fall und wählen deshalb für unsere n-dimensionale quadratische Form q die Diagonalform $q \cong \langle -1, 1 \rangle \perp \langle a_3, ..., a_n \rangle$.
Wie wir bereits gezeigt haben, ist q durch seine Isotropie multiplikativ, erfüllt also die Formel

$$q(X) \cdot q(Y) = q(z_1, ..., z_n) \tag{2.9}$$

für geeignete $z_i \in F(X, Y)$. Wie sehen diese rationalen Funktionen z_i in diesem Fall aus? Wir finden schnell die explizite Darstellung

$$q(X) \cdot q(Y) = \left(\frac{q(X) \cdot q(Y) + 1}{2} \right)^2 - \left(\frac{q(X) \cdot q(Y) - 1}{2} \right)^2, \tag{2.10}$$

welche man leicht durch Nachrechnen überprüfen kann. Die rechte Seite dieser Gleichung entspricht dabei der Form $q(z_1, z_2, 0, ..., 0)$ mit den Polynomen

$$z_1 = \frac{q(X) \cdot q(Y) + 1}{2}, \; z_2 = \frac{q(X) \cdot q(Y) - 1}{2}. \tag{2.11}$$

Kommen wir nun zum letzten Satz dieses Kapitels, welcher uns Aufschluss darüber geben wird, wie man stark multiplikative Formen hinsichtlich einer Kompositionsformel ähnlich zu 2.5 charakterisieren kann. Er ist ebenfalls auf Pfister zurückzuführen.

Satz 2.1.12. *Eine n-dimensionale Form q über F ist stark multiplikativ genau dann, wenn in $Y = (y_1, ..., y_n)$ lineare Formen $z_1, ..., z_n$ mit Koeffizienten in $F(X) = F(x_1, ..., x_n)$ existieren, sodass*

$$q(x_1, ..., x_n) \cdot q(y_1, ..., y_n) = q(z_1, ..., z_n). \tag{2.12}$$

Beweis. Zunächst nehmen wir an, dass q stark multiplikativ ist und somit die Formel $\langle q(X) \rangle \cdot q \cong q$ über $F(X)$ erfüllt. Da wir in dem Körper $F(X)$ agieren, können wir $q(X)$ als Skalar und Y als variabler Vektor über $F(X)$ betrachten. Zusammen mit obiger Isometrie folgt nun, dass man durch Substitution von q die Form $\langle q(X) \rangle \cdot q$ erhalten kann. Es existiert also eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(F(X))$ sodass

$$q(X) \cdot q(Y) = q(YU). \tag{2.13}$$

Wählen wir $YU = (z_1, ..., z_n)$, so ist jedes z_i eine in Y lineare Form mit Koeffizienten in $F(X)$ und die Formel 2.12 ist erfüllt.
Durch Umkehrung der soeben verwendeten Argumente folgt auf ähnliche Weise die andere Richtung. □

Zur Anwendung dieses Theorems möchten wir eine konkrete Formel der Art 2.12 mit bilinearen z_i für eine 2-fache Pfister-Form finden.

Anwendung 2.1.13. Wir betrachten die Quaternionen-Algebra $\left(\frac{-a,-b}{F}\right)$ mit $(-a, -b \in F^{\times})$. Bekanntermaßen wird diese Algebra aufgespannt durch $\{1, i, j, k\}$, wobei folgende Relationen gelten:

$$i^2 = -a, \; j^2 = -b, \; ij = -ji, \; k := ij. \tag{2.14}$$

Für ein Quaternion $v = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \in \left(\frac{-a,-b}{F}\right)$ ist die Konjugation definiert als

$$\overline{v} := \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k. \tag{2.15}$$

Für die zugehörige Norm $N(v) := v \cdot \overline{v}$ ergibt sich daher die Form

$$N = \langle\langle a, b\rangle\rangle = \langle 1, a, b, ab\rangle \tag{2.16}$$

und mit $x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \in \left(\frac{-a,-b}{F}\right)$ ist folglich $N(x) = x_1^2 + a \cdot x_2^2 + b \cdot x_3^2 + ab \cdot x_4^2$. N ist also eine 2-fache Pfister-Form der Dimension 4 und somit (stark) mutliplikativ. Durch den Zusammenhang $N(x) \cdot N(y) = N(x \cdot y)$ für $x, y \in \left(\frac{-a,-b}{F}\right)$ erhalten wir eine explizite Kompositionsformel nach Art von 2.12:

$$\begin{aligned}
&(x_1^2 + a \cdot x_2^2 + b \cdot x_3^2 + ab \cdot x_4^2)(y_1^2 + a \cdot y_2^2 + b \cdot y_3^2 + ab \cdot y_4^2) \\
&\quad = (x_1 y_1 + a x_2 y_2 + b x_3 y_3 + ab x_4 y_4)^2 \\
&\quad\quad + \ a\left(-x_1 y_2 + x_2 y_1 - b x_3 y_4 + b x_4 y_3\right)^2 \\
&\quad\quad + \ b\left(-x_1 y_3 + x_3 y_1 + a x_2 y_4 - a x_4 y_2\right)^2 \\
&\quad\quad + \ ab\left(-x_1 y_4 + x_4 y_1 - x_2 y_3 + x_3 y_2\right)^2 .
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Für $a = b = 1$ erhält man die berühmte Vier-Quadrate-Identität von Euler aus dem Jahre 1748. Die Quaternionen-Algebra $\left(\frac{-1,-1}{F}\right)$ entspricht dann den Hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H}$, die 1843 von Sir William Rowan Hamilton entdeckt wurden [Wei]. Im Jahr 1848 folgte die Entdeckung der Oktionen-Algebra durch Graves und Cayley, woraus Degens Acht-Quadrate-Identität hervorging, welche Degen jedoch unabhängig davon schon um 1818 herum entdeckte [Wik11b].

Im nächsten Kapitel werden wir uns mit der Sechzehn-Quadrate-Identität befassen und diese basierend auf der Herleitung durch Zassenhaus und Eichhorn [ZE66] konkret ausarbeiten.

2.2. Herleitung einer Sechzehn-Quadrate-Identität

Im Folgenden werden wir wie in [ZE66] die sogenannte *Cayley-Dicksonsche Algebra D* betrachten, welche einen 8-dimensionalen Vektorraum über einem beliebigen Körper F darstellt, und mithilfe ihrer Norm eine Sechzehn-Quadrate-Identität herleiten.

Die Algebra D wird aufgespannt durch die Basiselemente

$$e_0 = 1, e_1, e_2, ..., e_7 \in D, \tag{2.18}$$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	a	e_3	ae_2	e_5	ae_4	$-e_7$	$-ae_6$
e_2	$-e_3$	b	$-be_1$	e_6	e_7	be_4	be_5
e_3	$-ae_2$	be_1	$-ab$	e_7	ae_6	$-be_5$	$-abe_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	c	$-ce_1$	$-ce_2$	$-ce_3$
e_5	$-ae_4$	$-e_7$	$-ae_6$	ce_1	$-ac$	ce_3	ace_2
e_6	e_7	$-be_4$	be_5	ce_2	$-ce_3$	$-bc$	$-bce_1$
e_7	ae_6	$-be_5$	abe_4	ce_3	$-ace_2$	bce_1	abc

Tabelle 2.1.: Multiplikationstabelle

sodass ein beliebiges Element $x \in D$ die Form

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{7} x_i e_i,\ x_j \in F\ (j = 0, ..., 7) \tag{2.19}$$

besitzt.

Zur Berechnung eines bilinearen Produkts $xy \in D$ zweier Elemente $x, y \in D$ findet die für die Basiselemente geltende Multiplikationstabelle 2.1 Anwendung [ZE66].

Hieraus ist ersichtlich, dass D alternativ ist, d.h. es gilt

$$x^2 y = x(xy),\ yx^2 = (yx)x. \tag{2.20}$$

In D bezeichnen wir analog zu der Definition für die Quaternionen-Algebra mit

$$\overline{x} := x_0 - \sum_{i=1}^{7} x_i e_i = 2x_0 - x \tag{2.21}$$

das zu x konjugierte Element. Für die Norm N von x in D gilt auch hier $N(x) := x \cdot \overline{x}$ und somit

$$N(x) = x_0^2 - a \cdot x_1^2 - b \cdot x_2^2 + ab \cdot x_3^2 - c \cdot x_4^2 + ac \cdot x_5^2 + bc \cdot x_6^2 - abc \cdot x_7^2. \tag{2.22}$$

Desweiteren ist die Spur T von x definiert als $T(x) := x + \overline{x} = 2x_0$.

Unter der Voraussetzung, dass $N(x) \neq 0$ für ein $x \neq 0$ gewährleistet ist, können wir nun noch das eindeutig bestimmte zu x inverse Element x^{-1} berechnen:

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{N(x)}. \tag{2.23}$$

Mithilfe einer Reihe von Rechenregeln für die Elemente aus D, die Norm und die Spur von x lässt sich, wie man in [ZE66] nachlesen kann, folgender Satz beweisen:

Satz 2.2.1. *Seien x, y, z und t beliebige Elemente aus einer Cayley-Dicksonschen Algebra D und die Norm N von x sei von Null verschieden. Sind*

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \ X^* = \begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{z} \\ \overline{y} & \overline{t} \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

und definieren wir

$$\det(X) := xt - (xz)(x^{-1}y), \tag{2.25}$$

so gilt

$$\det(X) \cdot \overline{\det(X)} = \det(XX^*). \tag{2.26}$$

Durch Ausrechnen der beiden Seiten von 2.26 erhält man die äquivalente Formel

$$\begin{aligned} &\left[xt - (xz)(x^-1y)\right] \cdot \left[\overline{t}\overline{x} - (\overline{y}\overline{x^{-1}})(\overline{z}\overline{x})\right] \\ &= [N(x) + N(y)] \cdot [N(z) + N(t)] - [z\overline{x} + t\overline{y}] \cdot \left[x\overline{z} + y\overline{t}\right]. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Diese Gleichheit kann man nun folgendermaßen interpretieren:

Satz 2.2.2. *Sei D eine Cayley-Dicksonsche Algebra über einem beliebigen Körper F. Seien*

$$x = \sum_{i=0}^{7} x_i e_i, \ y = \sum_{i=0}^{7} y_i e_i, \ z = \sum_{i=0}^{7} z_i e_i, \ t = \sum_{i=0}^{7} t_i e_i \tag{2.28}$$

vier beliebige Elemente aus D, wobei die Norm N eines dieser Elemente von Null verschieden ist, o. B. d. A. $N(x) \neq 0$. Dann gilt in F folgende Sechzehn-Quadrate-Identität:

$$[N(x) + N(y)]\,[N(z) + N(t)] = N(x\overline{z} + y\overline{t}) + N(xt - (xz)(x^{-1}y)). \tag{2.29}$$

Mithilfe eines Computeralgebrasystems wie *MuPAD Pro 4.0* lässt sich diese Gleichung 2.29 konkret berechnen (Quellcode siehe Anhang) und wir erhalten für von Null verschiedene $a, b, c \in F$ die folgende Sechzehn-Quadrate-Identität:

$$
\begin{aligned}
&(-t_0^2 + a \cdot t_1^2 + b \cdot t_2^2 - ab \cdot t_3^2 + c \cdot t_4^2 - ac \cdot t_5^2 - bc \cdot t_6^2 + abc \cdot t_7^2 \\
&\qquad - z_0^2 + a \cdot z_1^2 + b \cdot z_2^2 - ab \cdot z_3^2 + c \cdot z_4^2 - ac \cdot z_5^2 - bc \cdot z_6^2 + abc \cdot z_7^2) \\
&\cdot(-x_0^2 + a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2^2 - ab \cdot x_3^2 + c \cdot x_4^2 - ac \cdot x_5^2 - bc \cdot x_6^2 + abc \cdot x_7^2 \\
&\qquad - y_0^2 + a \cdot y_1^2 + b \cdot y_2^2 - ab \cdot y_3^2 + c \cdot y_4^2 - ac \cdot y_5^2 - bc \cdot y_6^2 + abc \cdot y_7^2) \\
= \ &[t_0y_0 - b \cdot (t_2y_2 + x_2z_2) - c \cdot (t_4y_4 + x_4z_4) - a \cdot (t_1y_1 + x_1z_1) + x_0z_0 \\
&\qquad + ab \cdot (t_3y_3 + x_3z_3) + ac \cdot (t_5y_5 + x_5z_5) + bc \cdot (t_6y_6 + x_6z_6) - abc \cdot (t_7y_7 + x_7z_7)]^2 \\
&-a \cdot (t_0y_1 - t_1y_0 - x_0z_1 + x_1z_0)^2 \\
&-b \cdot (t_0y_2 - t_2y_0 - x_0z_2 + x_2z_0)^2 \\
&-c \cdot (t_0y_4 - t_4y_0 - x_0z_4 + x_4z_0)^2 \\
&+ab \cdot (t_0y_3 - t_3y_0 - x_0z_3 + x_3z_0)^2 \\
&+ac \cdot (t_0y_5 - t_5y_0 - x_0z_5 + x_5z_0)^2 \\
&+bc \cdot (t_0y_6 - t_6y_0 - x_0z_6 + x_6z_0)^2 \\
&-abc \cdot (t_0y_7 - t_7y_0 - x_0z_7 + x_7z_0)^2 \\
&+\Bigg(t_0x_0 + a \cdot t_1x_1 + b \cdot t_2x_2 + c \cdot t_4x_4 \\
&\qquad - (x_0y_0 + a \cdot x_1y_1 + b \cdot x_2y_2 + c \cdot x_4y_4 - ab \cdot x_3y_3 - ac \cdot x_5y_5 - bc \cdot x_6y_6 + abc \cdot x_7y_7) \\
&\qquad \cdot (x_0z_0 + a \cdot x_1z_1 + b \cdot x_2z_2 + c \cdot x_4z_4 - ab \cdot x_3z_3 - ac \cdot x_5z_5 - bc \cdot x_6z_6 + abc \cdot x_7z_7) \\
&\qquad \cdot \frac{1}{-x_0^2 + a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2^2 - ab \cdot x_3^2 + c \cdot x_4^2 - ac \cdot x_5^2 - bc \cdot x_6^2 + abc \cdot x_7^2} \\
&\qquad - ab \cdot t_3x_3 - ac \cdot t_5x_5 - bc \cdot t_6x_6 + abc \cdot t_7x_7\Bigg)^2 \\
&-a \cdot \Bigg(t_0x_1 + t_1x_0 - (x_0z_1 + x_1z_0) \\
&\qquad \cdot \frac{(x_0y_0 + a \cdot x_1y_1 + b \cdot x_2y_2 + c \cdot x_4y_4 - ab \cdot x_3y_3 - ac \cdot x_5y_5 - bc \cdot x_6y_6 + abc \cdot x_7y_7)}{-x_0^2 + a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2^2 - ab \cdot x_3^2 + c \cdot x_4^2 - ac \cdot x_5^2 - bc \cdot x_6^2 + abc \cdot x_7^2}\Bigg)^2 \\
&-b \cdot \Bigg(t_0x_2 + t_2x_0 - (x_0z_2 + x_2z_0) \\
&\qquad \cdot \frac{(x_0y_0 + a \cdot x_1y_1 + b \cdot x_2y_2 + c \cdot x_4y_4 - ab \cdot x_3y_3 - ac \cdot x_5y_5 - bc \cdot x_6y_6 + abc \cdot x_7y_7)}{-x_0^2 + a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2^2 - ab \cdot x_3^2 + c \cdot x_4^2 - ac \cdot x_5^2 - bc \cdot x_6^2 + abc \cdot x_7^2}\Bigg)^2 \\
&-c \cdot \Bigg(t_0x_4 + t_4x_0 - (x_0z_4 + x_4z_0) \\
&\qquad \cdot \frac{(x_0y_0 + a \cdot x_1y_1 + b \cdot x_2y_2 + c \cdot x_4y_4 - ab \cdot x_3y_3 - ac \cdot x_5y_5 - bc \cdot x_6y_6 + abc \cdot x_7y_7)}{-x_0^2 + a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2^2 - ab \cdot x_3^2 + c \cdot x_4^2 - ac \cdot x_5^2 - bc \cdot x_6^2 + abc \cdot x_7^2}\Bigg)^2 \ldots
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
...+ab\cdot\Bigg(&t_0x_3+t_3x_0-(x_0z_3+x_3z_0)\\
&\cdot\frac{(x_0y_0+a\cdot x_1y_1+b\cdot x_2y_2+c\cdot x_4y_4-ab\cdot x_3y_3-ac\cdot x_5y_5-bc\cdot x_6y_6+abc\cdot x_7y_7)}{-x_0^2+a\cdot x_1^2+b\cdot x_2^2-ab\cdot x_3^2+c\cdot x_4^2-ac\cdot x_5^2-bc\cdot x_6^2+abc\cdot x_7^2}\Bigg)^2\\
+ac\cdot\Bigg(&t_0x_5+t_5x_0-(x_0z_5+x_5z_0)\\
&\cdot\frac{(x_0y_0+a\cdot x_1y_1+b\cdot x_2y_2+c\cdot x_4y_4-ab\cdot x_3y_3-ac\cdot x_5y_5-bc\cdot x_6y_6+abc\cdot x_7y_7)}{-x_0^2+a\cdot x_1^2+b\cdot x_2^2-ab\cdot x_3^2+c\cdot x_4^2-ac\cdot x_5^2-bc\cdot x_6^2+abc\cdot x_7^2}\Bigg)^2\\
+bc\cdot\Bigg(&t_0x_6+t_6x_0-(x_0z_6+x_6z_0)\\
&\cdot\frac{(x_0y_0+a\cdot x_1y_1+b\cdot x_2y_2+c\cdot x_4y_4-ab\cdot x_3y_3-ac\cdot x_5y_5-bc\cdot x_6y_6+abc\cdot x_7y_7)}{-x_0^2+a\cdot x_1^2+b\cdot x_2^2-ab\cdot x_3^2+c\cdot x_4^2-ac\cdot x_5^2-bc\cdot x_6^2+abc\cdot x_7^2}\Bigg)^2\\
-abc\cdot\Bigg(&t_0x_7+t_7x_0-(x_0z_7+x_7z_0)\\
&\cdot\frac{(x_0y_0+a\cdot x_1y_1+b\cdot x_2y_2+c\cdot x_4y_4-ab\cdot x_3y_3-ac\cdot x_5y_5-bc\cdot x_6y_6+abc\cdot x_7y_7)}{-x_0^2+a\cdot x_1^2+b\cdot x_2^2-ab\cdot x_3^2+c\cdot x_4^2-ac\cdot x_5^2-bc\cdot x_6^2+abc\cdot x_7^2}\Bigg)^2.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Wie wir schon zu Beginn des Kapitels 2.1 gesehen haben, kann man Kompositionen der Art

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n} z_i^2 \tag{2.31}$$

grundsätzlich für $n=2^m$ durch Verwendung einer m-fachen Pfister-Form $\langle\langle 1,1,...,1\rangle\rangle = x_1^2+...+x_{2^m}^2$ finden, sofern die z_i rationale Funktionen in den x und y sind. Möchte man für die z_i jedoch ausschließlich bilineare Funktionen wählen, so existiert eine solche Identität nur für kleine m.

Adolf Hurwitz konnte Ende des 19. Jahrhunderts zeigen, dass dies ausschließlich in den Fällen $n=1,2,4$ oder 8 möglich ist [Con10]. Dieses berühmte Resultat möchten wir im nächsten Kapitel mithilfe der Darstellungstheorie beweisen.

2.3. Darstellungstheoretischer Beweis des Theorems von Hurwitz

Wir benötigen einige Resultate aus der Darstellungstheorie der endlichen Gruppen, um hiermit eine sehr interessante Entdeckung von Adolf Hurwitz bezüglich der Komposition quadratischer Formen anhand von [Her68] und [Eck43] zu beweisen.
Die Grundaufgabe ist hierbei, für welche n und m sich Bilinearformen $z_1, ..., z_n$ in den Variablenreihen $x_1, ..., x_m$ und $y_1, ..., y_n$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper F der Charakteristik 0 wie den komplexen Zahlen finden lassen, sodass die Gleichung

$$(x_1^2 + ... + x_m^2) \cdot (y_1^2 + ... + y_n^2) = (z_1^2 + ... + z_n^2) \tag{2.32}$$

erfüllt ist. Ein Spezialfall stellt offensichtlich der Fall $n = m$ dar, welcher zu der Frage führt: Für welche n existiert eine bilineare Komposition für Summen von n Quadraten? Wie bereits vorweggeriffen lautet die Lösung: Es gibt dann und nur dann Bilinearformen, durch welche die Identität 2.32 besteht, sofern $n = 1, 2, 4$ oder 8.
Für $n = 1$ und $n = 2$ können wir die Identitäten explizit aufschreiben, letztere heißt Brahmaguptas oder Fibonaccis Identität [Wik11a]:

$$\begin{aligned} x^2y^2 &= (xy)^2 \\ (x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2) &= (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_2y_1 + x_1y_2)^2 \\ &= (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_2y_1 - x_1y_2)^2 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Der Fall $n = 4$ entspricht genau der Vier-Quadrate-Identität von Euler, die wir verallgemeinert in Anwendung 2.1.13 betrachtet haben. Die ebenfalls in 2.1.13 erwähnte Acht-Quadrate-Identität auf Basis der Oktionen-Algebra deckt entsprechend den Fall $n = 8$ ab. Im letzten Kapitel 2.2 konnten wir zwar eine Sechzehn-Quadrate-Identität herleiten, jedoch erfüllt diese nicht die Bedingung der ausschließlichen Darstellung durch Bilinearformen.
Nach Hurwitz ist es tatsächlich in keinem weiteren Fall möglich, eine Identität mit genannten Eigenschaften zu erhalten. Um dieses erstaunliche Ergebnis nach der Art von Eckmann [Eck43] zu beweisen, werden wir zunächst einige grundlegende Resultate der Darstellungstheorie endlicher Gruppen formulieren.

2.3.1. Beweisgrundlagen: Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Wir möchten im Folgenden nicht zu sehr in die Darstellungstheorie eintauchen, sondern nur eine Reihe von Basiskenntnissen aus [Her68] und [FH91] darlegen, deren Verwendung wir später im Beweis benötigen werden. Deshalb möchten wir an dieser Stelle auch auf die Beweise der Aussagen in diesem Abschnitt verzichten und hierzu auf [FH91] verweisen.
Wir setzen überall voraus, F sei ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0, und beginnen direkt mit einigen grundlegenden Definitionen.

Definition 2.3.1. Sei V ein n-dimensionaler F-Vektorraum. Eine *Darstellung* einer endlichen Gruppe G ist ein Homomorphismus ψ von G nach $\mathrm{GL}(V)$.
Wir nennen V das *Darstellungsmodul* für G bezüglich ψ, manchmal wird es aber ebenfalls als *Darstellung* bezeichnet.
Eine *Unterdarstellung* U von V ist ein Untervektorraum von V, der unter G invariant ist.
Die Dimension von V heißt *Grad* der Darstellung.

Desweiteren benötigen wir den Begriff der Irreduzibilität.

Definition 2.3.2. Eine Darstellung V von G heißt *irreduzibel*, falls kein von V und $\{0\}$ verschiedener invarianter Unterraum U von V existiert.

Bemerkung 2.3.3. Die triviale Darstellung ψ von G mit

$$\psi : G \longrightarrow \mathrm{GL}_1(F),\ g \longmapsto 1 \tag{2.34}$$

ist eine Darstellung vom Grad 1. Allgemein nennen wir im Folgenden eine Darstellung vom Grad 1 *lineare Darstellung.*

Betrachten wir nun zu der Definition der Irreduzibilität ein Beispiel, welches auch in [FH91] zu finden ist.

Beispiel 2.3.4. Sei G die symmetrische Gruppe S_3. Sie besitzt zwei eindimensionale Darstellungen: Zum einen die triviale Darstellung, zum anderen die alternierende Darstellung $\mathrm{sgn}(g)(v)$ für $g \in G$ und $v \in \mathbb{C}$.
Davon abgesehen besitzt G als Permutationsgruppe die zweidimensionale natürliche Permutationsdarstellung ψ über $\mathbb{C}^3$. Sei hierzu $\{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{C}^3$ die Standardbasis.
Dann ist $\psi(g)(e_i) = e_{g(i)}$ bzw.

$$\psi(g)(z_1, z_2, z_3)^T = \left(z_{g^{-1}(1)}, z_{g^{-1}(2)}, z_{g^{-1}(3)}\right)^T. \tag{2.35}$$

Diese Darstellung ist nicht irreduzibel, da die Gerade $\mathbb{C}(e_1 + e_2 + e_3)$ als Unterraum von $\mathbb{C}^3$ invariant ist. Betrachten wir jedoch den Quotientenraum $V = \mathbb{C}^3/\mathbb{C}(e_1 + e_2 + e_3)$, so ist dieser eine zweidimensionale irreduzible Darstellung und wird auch *Standarddarstellung von S_3* genannt.

Der nächste Satz gibt uns Aufschluss darüber, wie viele lineare Darstellungen eine endliche Gruppe G besitzt.

Satz 2.3.5. *Sei G' die Kommutatorgruppe von G. Dann hat G genau $|G/G'|$ lineare Darstellungen.*

Wir können sogar eine Aussage darüber treffen, wie viele irreduzible Darstellungen von G insgesamt existieren.

Satz 2.3.6. *Die Anzahl der nicht äquivalenten irreduziblen Darstellungen von G entspricht der Anzahl der Konjugationsklassen in G.*

Es folgt ein ebenfalls sehr interessanter Satz, der uns Aufschluss über den Zusammenhang zwischen der Ordnung der Gruppe G und den Graden all ihrer irreduziblen Darstellungen gibt.

Satz 2.3.7. *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G|$, welche k irreduziblen Darstellungen ψ_i mit Graden n_i besitzt, $i = 1, ..., k$. Dann gilt:*

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} n_i^2. \tag{2.36}$$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem letzten wichtigen Resultat, um endlich mit dem Beweis des Theorems von Hurwitz beginnen zu können.

Satz 2.3.8. *Sei n der Grad einer irreduziblen Darstellung ψ von G. Dann gilt $n \mid |G|$.*

2.3.2. Das Matrizenproblem von Hurwitz

Im ersten Teil des Beweises möchten wir die ursprüngliche Aufgabe 2.32 analog zu [Her68] auf ein äquivalentes Matrizenproblem zurückführen. Sei F ein algebraisch abgeschlossener Körper mit Charakteristik 0. Wir nehmen nun an, 2.32 sei erfüllt und fordern $m > 2$, da der Fall $m = 2$ trivial ist. Die z_i seien bilineare Funktionen in den x und y mit der Form

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j, \tag{2.37}$$

wobei die a_{ij} lineare Funktionen in den x_k sind.
Wir stellen folgende Rechnung an:

$$\begin{aligned}
z_1^2 + ... + z_n^2 =& \left(\sum_j a_{1j}(x)y_j\right)^2 + ... + \left(\sum_j a_{nj}(x)y_j\right)^2 \\
=& a_{11}(x)y_1 \cdot a_{11}(x)y_1 + a_{11}(x)y_1 \cdot a_{12}(x)y_2 + ... + a_{11}(x)y_1 \cdot a_{1n}(x)y_n \\
& + ... + ... + a_{nn}(x)y_n \cdot a_{nn}(x)y_n \\
=& \sum_i \sum_j \sum_k a_{ij}(x)y_j \cdot a_{ik}(x)y_k \\
=& \sum_j \sum_k \sum_i (a_{ij}(x)a_{ik}(x)) \cdot y_j y_k \\
\overset{!}{=}& (x_1^2 + ... + x_m^2) \cdot (y_1^2 + ... + y_n^2)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Hieraus folgt offensichtlich, dass

$$\sum_i (a_{ij}(x)a_{ik}(x)) = 0 \text{ für } j \neq k$$

und

$$\sum_i (a_{ij}(x))^2 = x_1^2 + ... + x_m^2. \tag{2.39}$$

Verdeutlichen wir dies kurz anhand des trivialen Falls $n = m = 2$:

$$\begin{aligned}
z_1^2 + z_2^2 =& (a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2)^2 + (a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2)^2 \\
=& a_{11}^2(x)y_1^2 + a_{12}^2(x)y_2^2 + 2a_{11}y_1(x)a_{12}(x)y_2 + a_{21}^2(x)y_1^2 + a_{22}^2(x)y_2^2 \\
& + 2a_{21}y_1(x)a_{22}(x)y_2 \\
=& (a_{11}^2(x) + a_{21}^2(x)) \cdot y_1^2 + (a_{12}^2(x) + a_{22}^2(x)) \cdot y_2^2 + (2a_{11}(x)a_{12}(x) \\
& + 2a_{21}(x)a_{22}(x)) \cdot y_1 y_2 \\
\overset{!}{=}& (x_1^2 + x_2^2) \cdot y_1^2 + (x_1^2 + x_2^2) \cdot y_2^2.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Wenn wir die Funktionen $a_{ij}(x)$ als Matrixelemente einer $n \times n$-Matrix A betrachten, erhalten wir durch

$$A^T A = (x_1^2 + ... + x_m^2) \cdot E, \tag{2.41}$$

wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet, eine alternative Darstellung der Relationen 2.39. Da wir aufgrund der Linearität jedes einzelne $a_{ij}(x)$ wiederum als eine $n \times n$-Matrix über

F schreiben können, gilt

$$A = A_1 x_1 + ... + A_m x_m. \tag{2.42}$$

Verwenden wir nun die Identität 2.42 in der Gleichung 2.41, folgt

$$\begin{aligned} A^T A &= \sum_{i=1}^{n} (A_i^T A_i) x_i^2 + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (A_i^T A_j + A_j^T A_i) x_i x_j \\ &\stackrel{!}{=} \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \right) \cdot E. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Vergleiche hierzu auch [Con10].

Hieraus folgen direkt die Matrizengleichungen

$$A_i^T A_j + A_j^T A_i = 0 \text{ für } i \neq j, \; A_i^T A_i = E, \tag{2.44}$$

womit wir unser ursprüngliches Problem auf dieses Matrizenproblem analog zu Hurwitz zurückgeführt haben. Die Lösung hiervon ist genau die Antwort auf die Frage, für welche m und n wir m $n \times n$-Matrizen über F finden, welche 2.44 erfüllen.

Wir werden zunächst eine Normierung durchführen und definieren zu diesem Zweck $B_i := A_i A_m^T$. Man sieht leicht ein, dass 2.44 nun äquivalent ist zu

$$B_i^T B_j + B_j^T B_i = 0 \text{ für } i \neq j, \; B_i^T B_i = E, \; B_m = E. \tag{2.45}$$

Desweiteren erfüllen die B_i noch folgende Eigenschaften:

- *Schiefsymmetrie*: Setzen wir in der ersten Gleichung aus 2.45 $j = m$, so erhalten wir $B_i^T = -B_i$ für $i \neq m$.

- *Orthogonalität*: Da $B_i^2 = -E$ gilt, ist $B_i^T = B_i^{-1}$ erfüllt.

- *Antikommutativität*: Mithilfe der Schiefsymmetrie folgt $B_i B_j = -B_j B_i$ für $i \neq j$.

Wir haben also unsere Problemstellung noch etwas umformuliert: Für welche m und n finden wir $m-1$ $n \times n$-Matrizen über F, die all diese Eigenschaften erfüllen?

Wir werden jetzt bereits vorgestellte Resultate aus der Darsellungstheorie verwenden, um die Lösung herzuleiten.

2.3.3. Darstellungstheoretische Argumentation

Sei G eine endliche Gruppe, welche durch die m Elemente $a_1, ..., a_{m-1}, \epsilon$ erzeugt wird und in der folgende Relationen gelten:

$$a_i^2 = \epsilon, \ \epsilon^2 = 1, \ a_i a_j = \epsilon a_j a_i \text{ für } i \neq j. \tag{2.46}$$

Unser Problem aus dem Abschnitt 2.3.2 wird nun gelöst, indem wir eine Darstellung für G durch $n \times n$-Matrizen mit geforderten Eigenschaften finden, sodass ϵ durch $-E$ dargestellt wird.
Wir erkennen sofort, dass $a_i \epsilon = \epsilon a_i$ und ϵ somit im Zentrum
$Z(G) := \{z \in G \mid \forall g \in G \text{ gilt} gz = zg\}$ liegt. Die Elemente aus G erhalten wir durch

$$a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_r}, \ \epsilon a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_r} \tag{2.47}$$

mit $r = 0, ..., m-1$. Die k_i durchlaufen dabei die Zahlen $0, ..., m-1$, sodass $k_1 < k_2 < ... < k_r$ und die Gruppenordnung von G somit $2 \cdot \sum_{l=1}^{m-1} \binom{m-1}{l} = 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m$ ergibt[3]. Die Kommutatorgruppe von G ist offensichtlich die Menge $\{1, \epsilon\}$ mit Ordnung 2. Wir können desweiteren noch drei weitere nützliche Beobachtungen anstellen:

1. Für ein Element $g \in G$, $g \notin Z(G)$, besteht seine Konjugationsklasse aus g und ϵg.

2. 1 und ϵ liegen im Zentrum von G.

3. Falls m gerade ist, so sind neben 1 und ϵ auch $a_1 a_2 \cdots a_{m-1}$ und $\epsilon a_1 a_2 \cdots a_{m-1}$ im Zentrum von G.

Wir möchten diese analog zu [Eck43] beweisen:

Beweis. 1. Sei $g = a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_r}$, $1 \leq r \leq m-1$ mit r gerade. Dass g zu sich selbst konjugiert ist, ist klar. Zu zeigen bleibt also $\epsilon g = hgh^{-1}$ für ein $h \in G$.
Betrachten wir $a_{k_1}^{-1} g a_{k_1}$:

$$\begin{aligned} a_{k_1}^{-1} g a_{k_1} &= a_{k_2} \cdots a_{k_r} a_{k_1} = \epsilon^{r-1} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_r} \\ &= \epsilon g, \end{aligned} \tag{2.48}$$

da wir a_{k_1} nach vorne getauscht haben und $r-1$ ungerade ist.

[3]Dass die Mächtigkeit von G nicht $< 2^m$ ist, folgt aus den Eigenschaften von ϵ.

Sei nun $g = a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_r}$, $1 \leq r \leq m-2$ mit r ungerade und $k \in \{1, 2, ..., m-1\}$ sei von den $k_1, k_2, ..., k_r$ verschieden. Dann folgt auf ähnliche Weise

$$\begin{aligned} a_k^{-1} g a_k &= \epsilon a_k a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_r} a_k = \epsilon \epsilon^r a_k^2 a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_r} = \epsilon^{r+2} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_r} \\ &= \epsilon g. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Somit ist Teil 1 bewiesen.
2. Dies ist klar.
3. Sei $g = a_1 a_2 \cdots a_{m-1}$ mit ungeradem m. Wir müssen zeigen, dass g zu sich selbst konjugiert ist, dass also $g = hgh^{-1}$ für jedes Element $h \in G$. Da es genügt, dies für die Erzeuger $a_1, a_2, ..., a_{m-1}, \epsilon$ zu beweisen, betrachten wir $h = a_k$ mit $k \in \{1, ..., m-1\}$. Für $h = \epsilon$ ist der Fall klar.

$$\begin{aligned} a_k^{-1} g a_k &= \epsilon a_k a_1 a_2 \cdots a_{m-1} a_k = \epsilon \epsilon^{m-2} a_k^2 a_1 a_2 \cdots a_{m-1} = \epsilon^m a_1 a_2 \cdots a_{m-1} \\ &= g. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Für $g = \epsilon a_1 a_2 \cdots a_{m-1}$ verläuft die Argumentation analog. □

Insgesamt können wir jetzt folgern:

1. Falls m ungerade ist, besitzt G genau $2 + (2^m - 2)/2 = 2^{m-1} + 1$ Konjugationsklassen.

2. Falls m gerade ist, besitzt G genau $4 + (2^m - 4)/2 = 2^{m-1} + 2$ Konjugationsklassen.

Da G/G' nach dem Satz von Lagrange die Ordnung 2^{m-1} besitzt, folgt mit Satz 2.3.5, dass G genau 2^{m-1} lineare Darstellungen besitzt. Insgesamt entspricht die Anzahl der nicht äquivalenten irreduziblen Darstellungen von G nach Satz 2.3.6 genau der Anzahl der Konjugationsklassen, also sind dies in unserem Fall entweder $2^{m-1} + 1$ oder $2^{m-1} + 2$.
Sei m zunächst ungerade. Die Gruppe G besitzt offensichtlich nur eine irreduzible Darstellung vom Grad $f \neq 1$ und da nach Satz 2.3.7 die Summe über die Quadrate der Grade aller irreduziblen Darstellungen exakt der Ordnung von G entspricht, gilt

$$2^{m-1} \cdot 1^2 + f^2 = 2^m, \text{ also } f = 2^{\frac{m-1}{2}}. \tag{2.51}$$

Ist m gerade, so existieren zwei irreduzible Darstellungen von G mit Graden $f_1, f_2 \neq 1$ und wir erhalten analog zum ungeraden Fall

$$2^{m-1} \cdot 1^2 + f_1^2 + f_2^2 = 2^m. \tag{2.52}$$

Da nach Satz 2.3.8 jedes f_i ein Teiler der Gruppenordnung 2^m von G ist, sind diese von der Form $f_1 = 2^\mu$ und $f_2 = 2^\nu$, also

$$\begin{aligned} 2^{m-1} \cdot 1^2 + 2^{2\mu} + 2^{2\nu} &= 2^m, \\ \text{äquivalent zu} \quad 2^{2\mu} + 2^{2\nu} &= 2^{m-1}. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \mu = \nu &= \frac{m-2}{2} \\ \text{und somit} \quad f_1 = f_2 &= 2^{\frac{m-2}{2}}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Wir können nun den Zusammenhang zu unserem Matrizenproblem herstellen.
Das Element ϵ liegt in der Kommutatorgruppe G', also gilt $\epsilon ba = ab$. Dies bedeutet, dass in allen linearen Darstellungen ϵ durch 1 dargestellt wird. Folglich muss unsere gesuchte Darstellung eine direkte Summe der irreduziblen Darstellungen höheren Grades sein, damit ϵ wie gefordert durch $-E$ dargestellt wird.
Wir haben daher bei ungeradem m genau eine brauchbare Darstellung mit Grad $f = 2^{\frac{m-1}{2}}$ und im geraden Fall zwei solcher Darstellungen mit Graden $f_1 = f_2 = 2^{\frac{m-2}{2}}$. Wir können hiermit an eine beliebige Darstellung von G mit Grad n, welche unsere Aufgabe löst, folgende Bedingungen stellen:

1. Falls m ungerade ist: $n = k \cdot 2^{\frac{m-1}{2}}$.
2. Falls m gerade ist: $n = k \cdot 2^{\frac{m-2}{2}}$.

Unsere Ergebnisse lassen sich in folgendem Satz zusammenfassen, den wir durch unsere Motivation bereits bewiesen haben:

Satz 2.3.9. *Sei F ein beliebiger algebraisch abgeschlossener Körper mit Charakteristik* 0 *und sei $m > 2$. Ist $n = 2^t s$ mit s ungerade, so können wir m $n \times n$-Matrizen über F finden, welche 2.45 erfüllen, genau dann, wenn $2^{\frac{m-2}{2}} \leq 2^t$, also wenn $m \leq 2t + 2$.*

Hieraus können wir für den Fall $n = m$ schließlich das Theorem von Hurwitz folgern:

Theorem 2.3.10 (Hurwitz)**.** *Sei F ein beliebiger Körper mit Charakteristik* 0*. Falls*

$$(x_1^2 + ... + x_n^2) \cdot (y_1^2 + ... + y_n^2) = z_1^2 + ... + z_n^2 \tag{2.55}$$

mit in den x, y bilinearen z_i, so muss gelten: $n = 1, 2, 4$ oder 8.

Beweis. Nehmen wir an, 2.55 ist in einem beliebigem Körper F mit Charakteristik 0 erfüllt, so gilt dies auch für seinen algebraischen Abschluss und wir können Satz 2.3.9 anwenden. Ist $n = 1$ oder 2, so sind wir fertig. Wir betrachten daher die Gleichung 2.55 für $n > 2$, wodurch Satz 2.3.9 greift. Sei $n = 2^t s$ mit s ungerade. Dann sind die geforderten Eigenschaften nur erfüllt, wenn auch $n \leq 2t+2$ gilt. Wir möchten im ersten Schritt feststellen, dass n dadurch nur gerade sein kann.
Wir nehmen an, dass n ungerade ist und können daraus folgern, dass $t = 0$ sein muss. Offensichtlich gilt dann $n > 2t + 2$, wodurch eine Identität der Art 2.55 nicht möglich ist. Als nächstes möchten wir zwei Fälle für den Wert von s unterscheiden. Sei s als erstes von Eins verschieden (also $s \geq 3$) und $t > 0$. Per Induktion über t folgt dann leicht, dass $n = 2^t s > 2t + 2$. Es kommt also nur der Fall $s = 1$ infrage.
Nehmen wir nun an, dass $t \geq 4$ und somit $n \geq 16$, so zeigt sich ebenfalls durch Induktion über t, dass wieder $n = 2^t > 2t + 2$.
Zusammengefasst haben wir jetzt gezeigt, dass $n = 4$ oder 8 sein muss. □

Literaturverzeichnis

[Con10] CONRAD, K.: *The Hurwitz Theorem on Sums of Squares*. `http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/linmultialg/hurwitzlinear.pdf`, 2010.

[DI07] DUGGER, D. und D. C. ISAKSEN: *The Hopf condition for bilinear forms over arbitrary fields*. Annals of Mathematics, 165:943–964, 2007.

[Eck43] ECKMANN, B.: *Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition quadratischer Formen*. Commentarii mathematici Helvetici, 15:358 – 366, 1942/43.

[FH91] FULTON, W. und J. HARRIS: *Representation Theory – A First Course*, Band 129 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1991.

[Her68] HERSTEIN, I. N.: *Noncommutative Rings*, Band 15 der Reihe *The Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, 1968.

[Kah09] KAHN, B.: *Formes Quadratiques sur un Corps*, Band 15 der Reihe *Cours Specialises–Collection SMF*. American Mathematical Society, 2009.

[Lam04] LAM, T. Y.: *Introduction to quadratic Forms over fields*, Band 67 der Reihe *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2004.

[Wei] WEISSTEIN, E. W.: *Degen's Eight-Square Identity*. `http://mathworld.wolfram.com/DegensEight-SquareIdentity.html`.

[Wik11a] WIKIPEDIA: *Brahmagupta-Fibonacci Identity*. `http://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta-Fibonacci_identity`, September 2011.

[Wik11b] WIKIPEDIA: *Vier-Quadrate-Satz*. `http://de.wikipedia.org/wiki/Vier-Quadrate-Satz`, Dezember 2011.

[ZE66] ZASSENHAUS, H. und W. EICHHORN: *Herleitung von Acht- und Sechzehn-Quadrate-Identitäten mit Hilfe von Eigenschaften der verallgemeinerten Quaternionen und der Cayley-Dicksonschen Zahlen*. Arch. Math., 17:492 – 496, 1966.

A. Anhang

Quellcode zur Berechnung der Sechzehn-Quadrate-Identität

```
reset()
```

Erstelle Liste mit Basiselementen e_i

```
e:=[1,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7]:
```

Hilfsprozedur zum Erstellen von Elementen aus D

```
S:=proc(e,gr)
local z,s,i,j;
begin

s:=0;
z:=[0,0,0,0,0,0,0,0];

for i from 1 to 8 do
   z[i]:=e[i]*gr[i]
end_for;

for j from 1 to 8 do
   s:=s+z[j]
end_for;

return(s)
end_proc:
```

Erstelle Liste mit x_i

```
xi:=[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7]:
```

Erstelle Element x

```
x:=S(e,xi):
```

Prozedur zur Berechnung der Norm

```
N:=proc(x,a,b,c)
local i, gr, n;
begin

gr:=[x[1]^2,0,0,0,0,0,0,0];

for i from 2 to 8 do
   gr[i]:=((x[i])[2])^2;
end_for;

n:= gr[1] - a*gr[2] - b*gr[3] + a*b*gr[4] - c*gr[5] + a*c*gr[6] + b*c*gr[7]
    - a*b*c*gr[8];
return(n);

end_proc:
```

Prozedur zur Berechnung des konjugierten Elements

```
quer:=proc(x)
begin

xquer:= 2*x[1] - x;

return(xquer);
end_proc:
```

Prozedur zur Berechnung des inversen Elements

```
inv:=proc(x)
begin

xinv:= quer(x) / N(x,a,b,c);
```

```
return(xinv);
end_proc:
```

Bilde die Elemente y, z, t aus D

```
yi:=[y_0,y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6,y_7]:
zi:=[z_0,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6,z_7]:
ti:=[t_0,t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7]:
```

```
y:=S(e,yi):
z:=S(e,zi):
t:=S(e,ti):
```

Jetzt wird es etwas kompliziert.
Manche Zwischenergebnisse habe ich ausgedruckt und per Hand unter Benutzung der Multiplikationstabelle zusammengefasst.

Stelle Rechnungen an für Summand2 = N(xt - (xz)(x^-1 y))

```
N(y,a,b,c):
x*quer(z) + y*quer(t):
eq:=expand(x*quer(z) + y*quer(t)):
xinv:= inv(x):
Teilb:=xinv*y:
Teila:=x*z:
exa:=expand(Teila):
exb:=expand(Teilb):
Teildavor:=x*t:
exTD:=expand(Teildavor):
```

Bilde Summand1 = N(x quer(Z) + y quer(t))

```
Klammer:=[0,0,0,0,0,0,0]:
```

```
for i from 2 to 8 do
   Klammer[i-1]:=(y[i])[2]*(t[1]) - (y[1])*(t[i])[2] - (x[1])*(z[i])[2]
                 + (x[i])[2]*(z[1]);
end_for:
```

```
Summand1:=[0,0,0,0,0,0,0,0]:
```

```
for i from 2 to 8 do
   Summand1[i]:= e[i]*Klammer[i-1];
end_for:
```

```
Fakte0:=[-a,-b,a*b,-c,a*c,b*c,-(a*b*c)]:
Summand1[1]:= y[1]*t[1] + x[1]*z[1]:
```

```
for i from 2 to 8 do
   Summand1[1]:= Summand1[1] + Fakte0[i-1]*((y[i])[2]*(t[i])[2]
                 + (x[i])[2]*(z[i])[2]);
end_for:
```

Bilde Summand2
Schreibe Teil1 = xt

```
NegFakte0:=[a,b,-(a*b),c,-(a*c),-(b*c),a*b*c]:
```

```
Klammer2:=[0,0,0,0,0,0,0]:
for i from 2 to 8 do
   Klammer2[i-1]:=(x[i])[2]*(t[1]) + (x[1])*(t[i])[2];
end_for:
```



```
Summand2Teil1:=[0,0,0,0,0,0,0,0]:
for i from 2 to 8 do
```

```
    Summand2Teil1[i]:= e[i]*Klammer2[i-1];
end_for:
```

```
Summand2Teil1[1]:= x[1]*t[1]:
for i from 2 to 8 do
    Summand2Teil1[1]:= Summand2Teil1[1] + NegFakte0[i-1]*((x[i])[2]*(t[i])[2]);
end_for:
```

Jetzt das Produkt = (xz)(x^-1 y)

- Prod1 = (xz)

```
Klammer3:=[0,0,0,0,0,0,0]:
for i from 2 to 8 do
    Klammer3[i-1]:=(x[i])[2]*(z[1]) + (x[1])*(z[i])[2];
end_for:
```

```
Summand2Prod1:=[0,0,0,0,0,0,0,0]:
for i from 2 to 8 do
    Summand2Prod1[i]:= e[i]*Klammer3[i-1];
end_for:
```

```
Summand2Prod1[1]:= x[1]*z[1]:

for i from 2 to 8 do
    Summand2Prod1[1]:= Summand2Prod1[1] + NegFakte0[i-1]*((x[i])[2]*(z[i])[2]);
end_for:
```

- Prod2 = (x^-1 y)

```
Summand2Prod2:= -x[1]*y[1]:
for i from 2 to 8 do
    Summand2Prod2:= Summand2Prod2 + Fakte0[i-1]*((x[i])[2]*(y[i])[2]);
end_for:
```

```
Summand2Prod2:=Summand2Prod2 / N(x,a,b,c):
Summand2Teil2:=[0,0,0,0,0,0,0,0]:
```

Berechne (xz)(x^-1 y)

```
for i from 1 to 8 do
    Summand2Teil2[i]:= Summand2Prod2 *Summand2Prod1[i] ;
end_for:
```

```
Summand2:=[0,0,0,0,0,0,0,0]:
Summand2[1]:= Summand2Teil1[1] - Summand2Teil2[1]:
Hilfsliste:=[0,0,0,0,0,0,0]:
```

```
for i from 1 to 7 do
    Hilfsliste[i]:=(((Summand2Teil2[i+1])[1])/((Summand2Teil2[i+1])[1])[1])
    / (Summand2Teil2[i+1])[2] ;
end_for:
for i from 1 to 7 do
    Hilfsliste[i]:= (Summand2Teil1[i+1])[2] - Hilfsliste[i] ;
end_for:
for i from 2 to 8 do
    Summand2[i]:= e[i] * Hilfsliste[i-1] ;
end_for:
```

Endergebnis

```
Ergebnis:=(N(x,a,b,c) + N(y,a,b,c)) * (N(z,a,b,c) + N(t,a,b,c))
         = N(Summand1,a,b,c) + N(Summand2,a,b,c):
```

Erklärung:

Hiermit versichere ich an Eides statt und durch meine Unterschrift, dass die vorliegende Arbeit von mir selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt worden ist. Inhalte und Passagen, die aus fremden Quellen stammen und direkt oder indirekt übernommen worden sind, wurden als solche kenntlich gemacht. Ferner versichere ich, dass ich keine andere, außer der im Literaturverzeichnis angegebenen Literatur verwendet habe. Diese Versicherung bezieht sich sowohl auf Textinhalte sowie alle enthaltenden Abbildungen, Skizzen und Tabellen. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ort, Datum

Unterschrift