

Institut für Mathematik, FB 08,
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Masterarbeit

Grothendiecks Chow-Motive

vorgelegt von
Josephine Krönke

zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science

29. April 2014

Betreuer:
Jun.-Prof. Dr. Nikita Semenov

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist eine Einführung in die Theorie der Motive, wie sie von Alexander Grothendieck entwickelt wurde. Als Einstieg werden wir Grundlagen aus der algebraischen Geometrie behandeln und insbesondere zu projektiven und zellulären Varietäten einige Beispiele präsentieren. Auf Basis der Schnitt-Theorie werden wir im Anschluss die Kategorie der Motive konstruieren sowie den zentralen Begriff des Tate-Motivs einführen. Anwendung findet die Theorie im letzten Teil, in welchem wir nach einer Einführung in die Theorie der quadratischen Formen beweisen, dass in der dritten Potenz des fundamentalen Ideals keine anisotropen quadratischen Formen der Dimension zehn existieren.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Einführung in die algebraische Geometrie	5
1.1 Affine Varietäten	5
1.1.1 Spektrum eines Ringes	8
1.1.2 Zariski-Topologie	9
1.1.3 Dimension	11
1.1.4 Glattheit	13
1.2 Projektive Varietäten	15
1.2.1 Beispiele von projektiven Varietäten	16
1.2.2 Glattheit	21
1.3 Zelluläre Varietäten	23
2 Schnitt-Theorie	29
2.1 Orientierte Kohomologie-Theorien	29
2.1.1 Kategorientheorie	29
2.1.2 Die Kategorien \mathbf{Sch}_K und \mathbf{Sm}_K	30
2.1.3 Definition der orientierten Kohomologie-Theorie	30
2.1.4 Chern-Klassen	32
2.1.5 Formales Gruppengesetz	33
2.1.6 Chow-Theorie und Grothendiecks K^0 -Funktork	34
2.1.7 Universelle Kohomologie-Theorie	35
2.2 Geometrische Definition der Schnitt-Theorie	36
2.2.1 Ordnung und Zykel	36
2.2.2 Definition der Schnitt-Theorie	36
2.2.3 Definition des Chow-Rings	38
2.2.4 Pull-back und Push-forward	40
2.2.5 Theorem über die Dekomposition von Chow-Gruppen	42
2.3 Grothendiecks Chow-Motive	45
2.3.1 Schritt 1: Die Kategorie der Korrespondenzen	45
2.3.2 Schritt 2: Die Kategorie der Motive	47
2.4 Tate-Motive	49
2.4.1 Motivation und Definition des Tate-Motivs	49
2.4.2 Tate-Twist	52
2.4.3 Theorem über die Dekomposition eines Motivs	52

3	Anwendungen von Chow-Motiven	55
3.1	Einführung in die Theorie der quadratischen Formen	55
3.1.1	Grundlegende Definitionen und Eigenschaften	55
3.1.2	Diagonalform	56
3.1.3	Isotropie und hyperbolische Ebene \mathbb{H}	57
3.1.4	Theoreme von Witt und Witt-Index	58
3.1.5	Witt-Ring und fundamentales Ideal	58
3.1.6	Funktionskörper	60
3.1.7	Höhere Witt-Indizes und Zerfallsstruktur	61
3.2	Quadratische Formen der Dimension 10 in I^3K	63
3.2.1	Shells	64
3.2.2	Die Menge der Tate-Motive $\Lambda(Q)$	65
3.2.3	Theorem über binäre Motive	67
3.2.4	Beschreibung von I^3K	70
3.2.5	Zerfallsstruktur einer 10-dimensionalen anisotropen Form in I^3K	71
3.2.6	Beweis der Behauptung 3.2.2	72
3.2.7	Vishik's Gap Theorem	76
3.3	Überblick von ausgewählten Anwendungen	77
3.3.1	Bloch-Kato-Vermutung	77
3.3.2	Kaplansky-Problem	77
3.3.3	Mögliche Dimensionen in I^nK und erster Witt-Index	78
	Literatur	82

Einleitung

Es ist nunmehr fünfzig Jahre her, dass Alexander Grothendieck die Idee zu der Theorie der Motive entwickelte. Wenngleich er selbst kaum etwas über Motive veröffentlichte, äußerte er seine Faszination dieser Idee in zahlreichen Briefwechseln mit Jean-Pierre Serre – erstmalig im Jahre 1964 ([Ser91]). Später schrieb Grothendieck in der Einleitung zu seinem Werk “Récoltes et Semailles” (1985):

“Parmi toutes les choses mathématiques que j’avais eu le privilège de découvrir et d’amener au jour, cette réalité des motifs m’apparaît encore comme la plus fascinante, la plus chargée de mystère – au même de l’identité profonde entre la “géométrie” et l’“arithmétique”. Et le “yoga des motifs” auquel m’a conduit cette réalité longtemps ignorée est peut-être le plus puissant instrument de découverte que j’aie dégagé dans cette première période de ma vie mathématicien.”

Übersetzt etwa:

“Unter allen mathematischen Dingen, zu welchen ich das Privileg hatte, sie zu entdecken und an den Tag zu bringen, erscheint mir diese Realität der Motive noch immer als das faszinierendste, am meisten mit Geheimnissen beladene – im wahren Kern der tiefen Identität zwischen der “Geometrie” und “Arithmetik”. Und das “Yoga¹ der Motive”, zu dem mich diese lang ignorierte Realität führte, ist vielleicht das mächtigste Entdeckungswerkzeug, das ich in dieser ersten Periode meines Lebens als Mathematiker hervorgebracht habe.”

Grothendiecks ausgesprochenes Ziel des Konzepts der Motive war es, eine universelle Kohomologie-Theorie für algebraische Varietäten zu entwickeln. Tatsächlich spielen Motive bis heute eine zentrale Rolle in der Untersuchung der Struktur von algebraischen Varietäten. Doch auch in der Bearbeitung von Fragestellungen aus anderen Bereichen der Mathematik haben sich Motive als sehr wertvoll erwiesen, wie in der Zahlentheorie oder der Darstellungstheorie. So fanden sie beispielsweise in den Beweisen der Milnor-Vermutung und der Hoffmann-Vermutung sowie in der Bearbeitung des Kaplansky-Problems Anwendung.

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Einführung in die Theorie der Motive zu präsentieren, sodass diese gut von Einsteigern in dieses Gebiet genutzt werden kann. Beginnend bei den Grundlagen aus der algebraischen Geometrie und der Kohomologie-Theorie

¹Der Begriff “Yoga” bedeutet ursprünglich “Vereinigung”, “Integration”.

Einleitung

soll es dem Leser möglich werden, ohne umfangreiche Vorkenntnisse ein gutes Basiswissen über das “Wesen” der Motive zu erlangen. Unterstützt durch zahlreiche Beispiele und anhand einer ausgearbeiteten Anwendung aus dem Gebiet der quadratischen Formen soll die Theorie greifbar werden und somit ein Grundgespür für Nutzen und Gebrauch der Motive vermitteln.

In Kapitel 1 werden wir in die algebraische Geometrie einführen, indem wir zunächst Eigenschaften von affinen und später projektiven Varietäten erläutern. Hierzu legen wir nach Erörterung des Spektrums die Zariski-Topologie zugrunde und untersuchen verschiedene Varietäten hinsichtlich ihrer Dimension und Glattheit. Nach ausführlichen Beispielen zu projektiven Varietäten betrachten wir schließlich einen wichtigen Spezialfall von diesen, nämlich die (relativ) zellulären Varietäten.

In Kapitel 2 beginnen wir mit einer Einführung der orientierten Kohomologietheorien. Die Chow-Theorie (oder auch Schnitt-Theorie) $\mathrm{CH}_l(X)$ einer Varietät X , dessen geometrische Definition bei uns auf dem Begriff der Zyklen beruht, ist hierfür das zentrale Beispiel. Daraus geht die Definition des Chow-Rings $\mathrm{CH}^*(X)$ hervor und nach Präsentation eines wichtigen Theorems über die Dekomposition von Chow-Gruppen können wir einige Chow-Ringe von relativ zellulären Varietäten konkret berechnen. Die Konstruktion von Grothendiecks Chow-Motiven erfolgt schließlich in zwei Stufen nach [Man68]: Zunächst wird die Kategorie der Korrespondenzen eingeführt, dessen Objekte glatte, projektive Varietäten und dessen Morphismen sogenannte Korrespondenzen aus $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_K}(X, Y) := \mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times Y)$ sind. In der im Anschluss definierten Kategorie der Motive besteht die Menge der Objekte aus Paaren (X, π) , wobei X eine projektive Varietät und π ein Projektor aus $\mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times X)$ ist. Das Paar $\mathcal{M}(X) := (X, \Delta_X)$, wobei Δ_X der Identitätsmorphismus ist, wird schließlich als Motiv von X definiert. Wir führen darauf aufbauend die Tate-Motive und den damit zusammenhängenden Tate-Twist ein. Diese Begriffe sowie wiederum ein wichtiges Theorem über die Dekomposition eines Motivs ermöglichen uns einige konkrete Berechnungen.

Schließlich wollen wir uns in Kapitel 3 auf Motive von Quadriken konzentrieren. Zu diesem Zweck führen wir als Grundlage in die Theorie der quadratischen Formen mit wichtigen Begriffen wie (An-)Isotropie, Witt-Ring und fundamentales Ideal IK sowie höhere Witt-Indizes und Zerfallsstruktur ein. Hauptziel ist es dann, einen Beweis mithilfe der Theorie der Motive für die Aussage zu liefern, dass in I^3K keine anisotropen 10-dimensionalen Formen existieren. Hierfür benötigen wir den von A. Vishik geprägten Begriff der Shells sowie das Theorem über binäre Motive. Solche Lücken in den möglichen Dimensionen von anisotropen Formen in $I^n K$ sind nicht zufällig und werden in Vishiks Gap Theorem allgemein beschrieben.

Als Abschluss dieser Arbeit möchten wir in Abschnitt 3.3 noch einen Überblick über ausgewählte Anwendungen von Motiven geben. Wir präsentieren hierbei die Bloch-Kato-Vermutung, für dessen allgemeinen Beweis das Rost-Motiv eine wesentliche Rolle spielt, und das langjährige Kaplansky-Problem, dessen Lösung mithilfe von Motiven erheblich vorangetrieben werden konnte. Auch die Antwort durch N. Karpenko auf die Frage nach den möglichen Dimensionen von quadratischen

Formen in $I^n K$, wie sie auch in Vishiks Gap Theorem formuliert wurde, sowie der Beweis der Hoffmann-Vermutung bezüglich des ersten Witt-Indexes beruhen auf der Bestimmung von Chow-Gruppen und Motiven.

1 Einführung in die algebraische Geometrie

Zunächst werden wir in einige Grundlagen aus der algebraischen Geometrie einführen. Im ersten Teil 1.1 untersuchen wir nach der Definition einer affinen Varietät und der Vorstellung erster Eigenschaften und Beispiele das Spektrum eines Ringes. Es wird gezeigt, dass es sich hierbei um einen topologischen Raum handelt, wobei wir zu diesem Zweck die Zariski-Topologie definieren. Nach der Einführung einiger Begriffe aus der Theorie der Schemata widmen wir uns anschließend einem neuen Dimensionsbegriff, der Krulldimension. Durch den Transzendenzgrad wird die Berechnung dieser Dimension vereinfacht werden, wodurch wir Dimensionen von affinen Varietäten bestimmen können. Zur weiteren Charakterisierung von affinen Varietäten führen wir des Weiteren den Begriff der Glattheit ein.

Im zweiten Abschnitt 1.2 befassen wir uns mit projektiven Varietäten, welche wir ebenfalls hinsichtlich Dimension und Glattheit untersuchen. Hierzu werden wir zahlreiche Beispiele vorstellen.

Schließlich behandeln wir in Kapitel 1.3 einen Spezialfall der projektiven Varietäten, die sogenannten (relativ) zellulären Varietäten. Diese Eigenschaft ist im Folgenden wichtig für die Bestimmung von Chow-Ringen und Motiven von projektiven Varietäten.

1.1 Affine Varietäten

Im Folgenden sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Der n -dimensionale *affine Raum* über K , bezeichnet durch \mathbb{A}_K^n oder kurz \mathbb{A}^n , entspricht in diesem Fall dem Vektorraum K^n , siehe auch [Har92, S. 3]. Ein Element $p \in \mathbb{A}^n$ nennen wir *Punkt* und falls $p = (a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i \in K$, so bezeichnen wir die Komponenten a_i als *Koordinaten* von p . Sei nun $A = K[x_1, \dots, x_n]$ der Polynomring in n Variablen über K . Intuitiv interpretieren wir die Elemente aus A als Funktionen aus dem n -dimensionalen affinen Raum in den Körper K , indem wir

$$f(p) = f(a_1, \dots, a_n)$$

definieren, wobei $f \in A$ und $p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ mit $a_i \in K$. Nun können wir f auf seine Nullstellen untersuchen und setzen hierbei $V(I) := \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0\}$ für die Menge ihrer Nullstellen, welche auch *Nullstellengebilde* genannt wird, vgl. [Hul12, S. 2]. Etwas allgemeiner wird für eine Untermenge T des Polynomrings A

1 Einführung in die algebraische Geometrie

das gemeinsame Nullstellengebilde mit $V(T)$ bezeichnet, d.h.

$$V(T) := \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0 \text{ für alle } f \in T\} \quad (1.1)$$

Zu diesen und den folgenden Definitionen siehe [Har77, Kap. 1].

Definition 1.1.1. Eine Untermenge $X \subset \mathbb{A}^n$ heißt (*affine*) *algebraische Menge*, falls eine Untermenge $T \subset A$ existiert, sodass $X = V(T)$.

Proposition 1.1.2. Die Vereinigung zweier algebraischer Mengen ist eine algebraische Menge. Genauso ist der Durchschnitt einer beliebigen Familie von algebraischen Mengen eine algebraische Menge. Die leere Menge und der ganze affine Raum sind algebraische Mengen.

Beweis. (Nach [Har77, Prop. 1.1]). Seien $X_1 = V(T_1)$ und $X_2 = V(T_2)$ algebraische Mengen mit $T_1, T_2 \subset A$. Dann ist $X_1 \cup X_2 = V(T_1 T_2)$, wobei $T_1 T_2$ die Menge aller Produkte eines Polynoms aus T_1 mit einem aus T_2 bezeichnet. Um diese Gleichheit zu zeigen, sei zunächst $P \in X_1 \cup X_2$. Dann liegt P entweder in X_1 oder in X_2 , ist also eine Nullstelle jedes Polynoms in $T_1 T_2$. Sei andererseits $P \in V(T_1 T_2)$ und ohne Einschränkung $P \notin X_1$. Dann gibt es ein Polynom $f \in T_1$, sodass $f(P) \neq 0$. Da aber $(fg)(P) = 0$ für alle $g \in T_2$ gelten muss, folgt, dass $g(P) = 0$. Also liegt P in X_2 .

Sei nun $X_\alpha = V(T_\alpha)$ eine Familie von algebraischen Mengen. Dann ist

$$\bigcap X_\alpha = V\left(\bigcup T_\alpha\right)$$

auch eine algebraische Menge. Für die leere Menge ist $\emptyset = V(1)$ und für den ganzen affinen Raum $\mathbb{A}^n = V(0)$. \square

Definition 1.1.3. Eine nichtleere algebraische Menge $X \subset \mathbb{A}^n$ heißt *irreduzibel*, falls sie nicht als Vereinigung zweier echter algebraischer Teilmengen geschrieben werden kann.

Definition 1.1.4. Eine *affine (algebraische) Varietät* ist eine irreduzible algebraische Menge $X \subset \mathbb{A}^n$.

Sei nun R ein kommutativer Ring mit 1. Normalerweise betrachten wir hierbei $R = K[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_k)$, den *Koordinatenring* einer affinen Varietät X mit $X = \{x \in K^n \mid f_1(x) = 0, \dots, f_k(x) = 0\}$. Das Ideal (f_1, \dots, f_k) aller Polynome, die auf ganz X verschwinden, wird als *Verschwindungsideal* $I(X)$ bezeichnet.

Bemerkung 1.1.5. Eine Folgerung aus dem *Hilbertschem Nullstellensatz* besagt, dass eine algebraische Menge X genau dann irreduzibel ist, wenn ihr Verschwindungsideal $I(X)$ ein Primideal ist (siehe [Har77, Kor. 1.4]).

Beispiel 1.1.6. 1. Die Polynome $f(x) = x$ und $g(x) = x^2$ besitzen dieselbe triviale Nullstelle. Hierbei handelt es sich jedoch eher um ein Negativbeispiel.

2. Der Lösungsraum der Polynomgleichung $\{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ über \mathbb{R} entspricht genau dem Einheitskreis. Hingegen besitzt $\{x^2 + y^2 + 1 = 0\}$ über \mathbb{R} keine Lösung, über \mathbb{C} jedoch unendlich viele. Dies ist ein Beispiel dafür, dass ohne Forderung der algebraischen Abgeschlossenheit des Körpers K manche Eigenschaften im affinen Raum nicht standhalten. In diesem Fall wird verletzt, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ gelten muss:

$$I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}},$$

wobei $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in A \mid f^r \in \mathfrak{a} \text{ für ein } r > 0\}$. Wird \mathfrak{a} von der Untermenge $T \subset A$ erzeugt, so stimmt hierbei $V(\mathfrak{a})$ mit dem Nullstellengebilde $V(T)$ überein (siehe [Har77, S. 3 f.]).

3. Eine Verallgemeinerung des letztgenannten Beispiels sind die *algebraischen Kurven*. Sie sind gegeben durch die Nullstellenmenge eines nichtkonstanten Polynoms in zwei Variablen,

$$V(f) = \{(x, y) \in K^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

Der *Grad der Kurve* ist gegeben durch den Grad des Polynoms. Falls wir voraussetzen, dass das Polynom irreduzibel ist, so ist auch die Kurve irreduzibel und somit affin. Noch allgemeiner können wir ein irreduzibles Polynom $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ betrachten. Für $n = 3$ erhalten wir als affine Varietät $V(f)$ die *affine Fläche* und für $n > 3$ eine *affine Hyperfläche*.

4. Der affine Raum \mathbb{A}^n ist irreduzibel, da er mit dem Nullideal in A korrespondiert, welches prim ist. Dadurch stellt der affine Raum selbst eine affine Varietät dar (siehe auch [Har77, Bsp. 1.4.1]).

Bemerkung 1.1.7. 1. Wir möchten an dieser Stelle bemerken, dass man den n -dimensionalen affinen Raum über K korrekterweise mit $\mathbb{A}_K^n(K)$ bezeichnet, damit dieser mit K^n übereinstimmt. In diesem Zusammenhang wird der Raum K^n auch als der Raum der K -Punkte von \mathbb{A}_K^n bezeichnet. Bei der Betrachtung einer beliebigen K -Algebra R ist dann R^n der Raum der R -Punkte von \mathbb{A}_K^n . Eine (affine) algebraische Menge $X \subset \mathbb{A}_K^n(K)$, d.h. die Menge der Lösungen von Gleichungen $f_i = 0$ in K mit $f_i \in K[x_1, \dots, x_n]$, wird ebenso korrekterweise mit $X(K)$ bezeichnet. Solange jedoch keine Unklarheit oder Uneindeutigkeit über den Sachverhalt besteht, möchten wir im Folgenden auf diese detaillierten Schreibweisen verzichten.

2. Wie eingangs bemerkt fordern wir algebraische Abgeschlossenheit des zugrundeliegenden Körpers K . Wir können jedoch all unsere behandelten Eigenschaften auf beliebige Körper erweitern, indem wir eine affine algebraische Varietät über dem nun nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körper K wie folgt konstruieren: Sei $\Gamma_K = \text{Gal}(K^{sep}/K)$ die absolute Galoisgruppe von K , wobei K^{sep} der separable Abschluss von K sei. Dann ist eine algebraische Varietät

1 Einführung in die algebraische Geometrie

X über K definiert als die Varietät $X(K^{sep})$ (im klassischen Sinne) zusammen mit der Aktion $\Gamma_K \curvearrowright X(K^{sep})$. Ist $K = K^{sep}$, so stimmt diese neue Definition offensichtlich mit der vorherigen überein, da in diesem Falle die Galoisgruppe trivial ist.

1.1.1 Spektrum eines Ringes

Wir wollen den zentralen Begriff des *Spektrums eines Ringes* einführen und werden zeigen, dass es sich hierbei um einen topologischen Raum handelt.

Definition 1.1.8. Sei R ein Ring. Das *Spektrum* von R , geschrieben $\text{Spec}(R)$, ist definiert als die Menge von Primidealen in R . Die Elemente aus $\text{Spec}(R)$ heißen *Punkte aus dem Spektrum* (siehe auch [Sha74, Kap. 5.1.1]).

Zur Erinnerung sei bemerkt, dass für ein (vollständiges) Primideal $\mathfrak{p} \neq R$ gilt:

$$\forall a, b \in R \quad \text{mit} \quad a \cdot b \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p} \quad \text{oder} \quad b \in \mathfrak{p}.$$

Falls R ein Integritätsbereich ist, so ist das Nullideal (0) definitionsgemäß ein Primideal. Wir können also festhalten, dass R genau dann ein Integritätsbereich ist, falls $(0) \in \text{Spec}(R)$. Dies ist äquivalent dazu, dass $\text{Spec}(R)$ reduziert und irreduzibel ist.

Beispiel 1.1.9. 1. Sei $R = \mathbb{Z}$. Dann ist für jede Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ das Ideal $p\mathbb{Z}$ prim in \mathbb{Z} . Da \mathbb{Z} ein Integritätsbereich ist, erhalten wir für das Spektrum $\text{Spec}(R) = \{(0), p\mathbb{Z} \mid p \text{ prim}\}$ (siehe auch [Sha74, S. 6, Bsp. 5.1]).

2. In $R = \mathbb{C}[X]$ sind die Primideale gegeben durch die irreduziblen Polynome über \mathbb{C} und das Nullideal, d.h. $\text{Spec}(R) = \{(0), (X - a) \mid a \in \mathbb{C}\}$.

3. In dem Restklassenkörper $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist ausschließlich das Nullideal prim, also $\text{Spec}(R) = \{(0)\}$. Bei einem beliebigen Körper besteht sein Spektrum ebenfalls aus genau diesem einzigen Punkt.

Definition 1.1.10. Sei \mathfrak{p} ein Punkt aus dem Spektrum $\text{Spec}(R)$. Dann ist sein Restklassenkörper definiert als $K(\mathfrak{p}) := \text{Quot}(R/\mathfrak{p})$, wobei $\text{Quot}(\cdot)$ den Quotientenkörper bezeichnet.

Wir verdeutlichen diese neue Definition anhand eines Beispiels, welches uns im Laufe dieses Kapitels mehrfach begegnen wird.

Beispiel 1.1.11. Wir betrachten die Polynomgleichung $\{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ aus Beispiel 1.1.6 und bilden den zugehörigen Koordinatenring $R = K[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$. Dann ist $(x - 1, y)$ ein maximales Ideal in R und somit ein Punkt aus dem Spektrum. Anhand der hierzu korrespondierenden Lösung $(1, 0)$ definieren wir die Abbildung

$$R/(x - 1, y) \rightarrow K, \quad x \mapsto 1, \quad y \mapsto 0,$$

welche sogar ein Isomorphismus ist. Da der Quotientenkörper eines Körpers bis auf Isomorphie der Körper selbst ist, ist somit der Restklassenkörper von dem Punkt $(x - 1, y)$ isomorph zu K .

Betrachten wir nun denselben Ring unter der Voraussetzung $K = \mathbb{R}$, so ist $(x^2 + 3, y - 2)$ ein maximales Ideal in R . Dann ist $(\sqrt{-3}, 2)$ eine Lösung, wodurch wie oben gilt:

$$R/(x^2 + 3, y - 2) \cong \mathbb{R}(\sqrt{-3}) \cong \mathbb{C}.$$

In diesem Fall ist der sogenannte *Grad* des Punktes $(x^2 + 3, y - 2)$ gleich zwei, da $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$. Entsprechend hat $(x - 1, y)$ im obigen Fall Grad eins.

Bemerkung 1.1.12. Punkte aus $\text{Spec}(R)$ vom Grad eins werden *rationale Punkte* genannt. Falls R ein Integritätsring ist, so ist das Nullideal $(0) \in \text{Spec}(R)$ definitionsgemäß ein *generischer Punkt* in $\text{Spec}(R)$, da der Abschluss $\overline{\{(0)\}}$ gleich dem Raum $\text{Spec}(R)$. Allgemein ist die Irreduzibilität des Spektrums eines Ringes notwendig und hinreichend für die Existenz eines generischen Punktes. Siehe hierzu auch [Mum99, S. 67 ff.].

1.1.2 Zariski-Topologie

Wir beginnen nun mit der Konstruktion der Topologie auf der Grundmenge $\text{Spec}(R)$, indem wir das System aller abgeschlossenen Untermengen des topologischen Raums definieren.

Definition 1.1.13. Sei S eine beliebige Untermenge von R . Dann bezeichnen wir mit $V(S) \subset \text{Spec}(R)$ die Menge aller Primideale in R , die S enthalten. Die Topologie, in welcher genau diese Mengen $V(S)$ alle *abgeschlossenen Untermengen* darstellen, heißt *Zariski-* oder *Spektraltopologie*. Für einen Punkt $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ ist sein *Abschluss* gegeben durch die Menge $\{\mathfrak{q} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}\}$.

Aus dieser Definition folgt, dass ein Punkt $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ bzw. die entsprechende einelementige Menge genau dann abgeschlossen ist, wenn \mathfrak{p} ein maximales Ideal in R ist.

Für beliebige Untermengen S_α, S' und $S'' \subset R$ gelten die Relationen

$$\begin{aligned} V\left(\bigcup_{\alpha} S_{\alpha}\right) &= \bigcap_{\alpha} V(S_{\alpha}), \\ V(I) &= V(S') \cup V(S''), \end{aligned}$$

wobei I der Schnitt der von S' und S'' erzeugten Ideale ist. Hiermit sind die Axiome für ein System abgeschlossener Mengen des topologischen Raums erfüllt (siehe auch [Sha74, Kap. 5.1.3]).

Bemerkung 1.1.14. 1. In derselben Notation wie für abgeschlossene Mengen bezeichnen wir *Untervarietäten* von $\text{Spec}(R)$ für ein beliebiges Ideal $I \subset R$ als

$$V(I) = \text{Spec}(R/I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \supset I\}.$$

1 Einführung in die algebraische Geometrie

Das Spektrum des in Beispiel 1.1.11 untersuchten Ringes $K[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ ist also eine Untervarietät von $\text{Spec}(K[x, y]) = \mathbb{A}^2$.

2. In der klassischen algebraischen Geometrie wird die Zariski-Topologie von einem affinen Raum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper getragen. Die abgeschlossenen Mengen sind hier die algebraischen Mengen aus Definition 1.1.1.

Bekanntermaßen heißt eine Teilmenge eines topologischen Raums abgeschlossen, sofern deren Komplement eine offene Menge ist. Der entsprechend dualisierten Definition folgend, möchten wir nach der Einführung der abgeschlossenen Untermengen nun die *offenen Untermengen* charakterisieren.

Definition 1.1.15. Sei f ein Element aus R und $X = \text{Spec}(R)$. Dann bezeichnen wir mit X_f die Menge aller Primideale in R , die f nicht enthalten, d.h.

$$X_f := \text{Spec}(R) \setminus V(\{f\}).$$

Wir möchten als nächstes einige Grundbegriffe aus der Theorie der *Schemata* einführen. Hierfür benötigen wir neben des Konzeptes des Spektrums eines Ringes die Definition der *Strukturgarbe*.

Definition 1.1.16. Sei X das Spektrum des Ringes R zusammen mit der Zariski-Topologie. Dann bezeichnen wir den Funktor \mathcal{O}_X , welcher offenen Untermengen X_f von X die Lokalisierung R_f zuordnet, als *Strukturgarbe*.

Ein Paar (X, \mathcal{O}) bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe \mathcal{O} von Ringen aus X wird *geringter Raum* genannt, siehe [Sha74, S. 25, Def. 5.1]. Für $X = \text{Spec}(R)$ zusammen mit seiner Strukturgarbe \mathcal{O}_X bildet dieses Paar einen sogenannten *lokal geringten Raum*, da alle auftretenden Ringe $\mathcal{O}_X(X_f) = R_f$ lokal sind.

Anhand der folgenden Definition können wir dieses Paar $(\text{Spec}(R), \mathcal{O}_{\text{Spec}(R)})$ außerdem als *affines Schema* charakterisieren.

Definition 1.1.17. Ein lokal geringter Raum, der lokal isomorph zum Spektrum eines Ringes ist, heißt *Schema*. Mit anderen Worten: Ein Schema ist ein lokal geringter Raum (X, \mathcal{O}) , in dem jeder Punkt eine offene Umgebung U besitzt, sodass der lokal geringte Raum $(U, \mathcal{O}|_U)$ isomorph zum Spektrum eines Ringes ist, siehe hierzu auch [Sha74, S. 28, Def. 5.4]. Ein Schema heißt *affin*, falls der lokal geringte Raum (nicht nur lokal) isomorph zum Spektrum eines Ringes ist.

Bemerkung 1.1.18. 1. Zu einem affinen Schema $X \simeq \text{Spec}(R)$ erhält man durch die Projektion $\text{Spec}(R) \longrightarrow \text{Spec}(R_{\text{red}})$ das *reduzierte Schema* X_{red} , wobei der *reduzierte Ring* R_{red} definiert ist als der Ring R modulo das Ideal der nilpotenten Elemente von R ($=$ *Nil-Radikal* von R). Die topologischen Räume von X bzw. X_{red} stimmen überein. Andersherum heißt ein Schema *reduziert*, falls für jede offene Menge U der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ keine nilpotenten Elemente besitzt, siehe [Sha74, Kap. 5.3.4].

2. Ein Schema X heißt *separiert*, falls das Bild des Morphismus

$$\Delta : X \longrightarrow X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} X \quad (1.2)$$

abgeschlossen ist. Dieser Morphismus wird auch *Diagonale* genannt, siehe auch [Sha74, Kap. 5.4.3].

3. Allgemein ist eine algebraische Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K definiert als ein reduziertes, separiertes Schema, welches über K endlich erzeugt ist. Eine Varietät X , die ein affines Schema ist, wird entsprechend als *affine Varietät* bezeichnet [Sha74, Kap. 6.1.1]. Ist also R endlich erzeugt und nilpotentfrei, d.h. $\text{Nilrad} = 0$, so ist $\text{Spec}(R)$ eine affine Varietät.

1.1.3 Dimension

Wir haben gesehen, dass das Spektrum eines Körpers K aus einem einzigen Punkt besteht. Wir möchten einen hierzu korrespondierenden Dimensionsbegriff verwenden, mit dem $\dim(K) = 0$ gilt. Andererseits möchten wir den Dimensionsbegriff auch auf algebraische Mengen anwenden, wobei tatsächlich $\dim(\mathbb{A}^n) = n$ gelten sollte. Dies motiviert die Einführung der sogenannten Krull-Dimension.

Definition 1.1.19. Die *Krulldimension* eines topologischen Raums X ist das Supremum aller Längen von Ketten $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n$ von nichtleeren, abgeschlossenen, irreduziblen Teilmengen.

Unter Betrachtung eines Ringes R definieren wir die Dimension von R als das Supremum der Höhe aller Primideale, d.h.

$$\dim(R) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists \text{Kette } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_n \text{ mit } \mathfrak{p}_i \in \text{Spec}(R)\}.$$

Die auf diese Weise definierte Dimension eines Ringes ist also nichts anderes als die Krulldimension seines Spektrums.

Beispiel 1.1.20. 1. Offensichtlich gilt mit dieser Definition für einen beliebigen Körper K : $\dim(K) = \dim(\text{Spec}(K)) = \dim(\{(0)\}) = 0$.

2. Das Spektrum von einem Polynomring $K[X]$ über einem Körper K ist die *affine Gerade* \mathbb{A}^1 . Falls K algebraisch abgeschlossen ist, z.B. im Fall $K = \mathbb{C}$, besteht das Spektrum, wie in Beispiel 1.1.9 gesehen, aus den irreduziblen Polynomen der Form $X - a$ und dem Nullideal. Die längste Kette von Primidealen ist hier $(0) \subset (X)$. Daher besitzt $K[X]$ die Dimension 1.
3. Der Ring der ganzen Zahlen ist ebenfalls von Dimension 1: Als längste Kette von Primidealen finden wir $(0) \subset (\mathfrak{p})$. Allgemein ist jeder Ring der algebraischen Ganzzahlen eines algebraischen Zahlkörpers eindimensional, da in diesem Ring jedes Primideal außer (0) schon maximal ist (siehe hierzu auch [Sha74, S. 14, Bsp. 5.9]).

1 Einführung in die algebraische Geometrie

Algebraische Ganzzahlen sind algebraische Zahlen, die sogar Nullstellen eines normierten Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten sind. Sie bilden einen Unterring der algebraischen Zahlen.

4. Falls R ein noetherscher Ring ist, so wird jede aufsteigende Kette von Idealen stationär. Die Dimension ist daher endlich. Des Weiteren ist dann nach dem Hilbertschen Basissatz auch jeder Polynomring $R[X_1, \dots, X_n]$ noethersch (siehe z.B. [Hun74, Thm. 4.9]) und es gilt

$$\dim(R[X_1, \dots, X_n]) = \dim(R) + n.$$

Daher hat beispielsweise der Ring $\mathbb{Z}[X]$ Dimension 2, siehe [Sha74, S. 14, Prop. C, Bsp. 5.10].

Folgende Proposition ermöglicht uns, die Krulldimension einer algebraischen Menge zu bestimmen.

Proposition 1.1.21. *Sei X eine affine algebraische Menge. Dann ist die Dimension von X gleich der Dimension seines Koordinatenrings R .*

Beweis. (Nach [Har77, Prop. 1.7]). Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge. Dann korrespondieren die abgeschlossenen irreduziblen Untermengen von X mit den Primidealen in $A = K[x_1, \dots, x_n]$, welche das Verschwindungsideal $I(X)$ enthalten. Diese wiederum korrespondieren mit den Primidealen von R . Somit ist die Dimension von X die Länge der längsten Kette von Primidealen in R , also die Dimension von R . \square

Anhand der gegebenen Definition die Krulldimension eines Ringes anzugeben, ist allerdings im Allgemeinen nicht die einfachste Variante. Wir werden eine äquivalente Definition einführen, die uns die Bestimmung der Dimension erleichtern kann (für Details siehe [Hul12, Kap. 3.2]). Hierzu benötigen wir den Begriff des *Transzendenzgrades*. Außerdem wird vorausgesetzt, dass R eine K -Algebra sowie ein Integritätsbereich ist.

Definition 1.1.22. Sei L/K eine Körpererweiterung. Dann existiert eine Untermenge $S \subset L$, die sogenannte *Transzendenzbasis*, sodass L die algebraische Erweiterung von $K(S)$ ist und die Elemente aus S über K algebraisch unabhängig sind. Die Mächtigkeit von S heißt *Transzendenzgrad von L/K* , abgekürzt durch $\text{trdeg}(L/K)$. Die Notation $K(S)$ bezeichnet den kleinsten Körper in L , der K und S enthält, vgl. [Hun74, Def. 1.4, 1.10].

Mithilfe dieser Definition können wir die Dimension von R wie folgt beschreiben:

$$\dim(R) = \text{trdeg}(\text{Quot}(R)/K), \tag{1.3}$$

wobei $\text{Quot}(R)$ den Quotientenkörper von R bzw. den Restklassenkörper von $(0) \in \text{Spec}(R)$ aus Definition 1.1.10 bezeichnet.

Beispiel 1.1.23. 1. Die Dimension von R ist genau dann gleich null, wenn $\text{Quot}(R)/K$ eine algebraische Erweiterung ist. Die Transzendenzbasis S ist in diesem Fall die leere Menge, siehe auch [Bos13, Kap. 7.2].

2. Für $R = K[X]$ ist der Quotientenkörper $\text{Quot}(K[X])$ der rationale Funktionenkörper $K(X)$. Eine Transzendenzbasis ist gegeben durch $\{X\}$ und wir erhalten $\dim(R) = 1$. Für einen Körperturm $K \subset M \subset L$ gilt die Formel

$$\text{trdeg}(L/K) = \text{trdeg}(L/M) + \text{trdeg}(M/K), \quad (1.4)$$

woraus folgt, dass $\dim(K[X_1, \dots, X_n]) = \text{trdeg}(K(X_1, \dots, X_n)/K) = n$ (siehe z.B. [Bos13, Kap. 7.1] oder [Hun74, Thm. 1.11]). Daher hat der affine Raum \mathbb{A}^n die Dimension n (mit obiger Proposition 1.1.21, vgl. [Har77, Prop 1.9]).

3. Wir betrachten wie in Beispiel 1.1.6 und 1.1.11 die Gleichung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ über K und erhalten als Quotientenkörper des Koordinatenrings

$$\text{Quot}(K[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)) = K(x)(\sqrt{1 - x^2}),$$

eine quadratische Erweiterung der transzendenten Erweiterung $K(x)$. Somit hat der Einheitskreis die Dimension 1.

Bemerkung 1.1.24. Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät mit dem Verschwindungsideal $I(X) = (f)$, d.h. X sei eine Hyperfläche. Der Koordinatenring ist gegeben durch $R = K[x_1, \dots, x_n]/(f)$. Wir können (nach Umnummerierung) annehmen, dass die Gleichung $f = 0$ die Variable x_1 enthält, wodurch wir

$$Q(R) = K(x_2, \dots, x_n)[x_1]/(f) \quad (1.5)$$

erhalten. Somit ist eine Transzendenzbasis S gegeben durch $\{x_2, \dots, x_n\}$, d.h.

$$\dim(X) = \text{trdeg}(Q(R)/K) = n - 1,$$

siehe auch [Hul12, Kap. 3.2].

1.1.4 Glattheit

Wir möchten uns in diesem Abschnitt noch einem weiteren Begriff zur Charakterisierung von Punkten aus einer affinen Varietät X widmen, dem der *Glattheit*.

Definition 1.1.25. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und X eine affine Varietät in \mathbb{A}^n , dem n -dimensionalen affinen Raum über K . Sei $I(X) = (f_1, \dots, f_t)$ das Verschwindungsideal von X . Dann heißt ein Punkt $x \in X$ *glatt* (oder *regulär*), falls folgende Gleichheit gilt:

$$\text{rank } J(x) = n - \dim(X), \quad (1.6)$$

1 Einführung in die algebraische Geometrie

wobei $J(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{i=1,\dots,t \\ j=1,\dots,n}}$ die Jacobi-Matrix im Punkt x und $\text{rank}(\cdot)$ den Rang einer Matrix bezeichnet. Die Dimension von X ist nach Proposition 1.1.21 die Krulldimension des Koordinatenrings, $\dim(X) := \dim(K[x_1, \dots, x_n]/I(X))$. Die Varietät X heißt glatt, falls X in jedem Punkt glatt ist.

Beispiel 1.1.26. 1. Wir betrachten wiederum

$$X = \{(x, y) \in K^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\} \subset \mathbb{A}^2,$$

also $I(X) = (f(x, y) = x^2 + y^2 - 1)$. Die Jacobi-Matrix von f ist hier $J(x, y) = (2x, 2y)$ mit

$$\text{rank}(J_f(x, y)) \leq 1 = 2 - 1 = n - \dim(X).$$

Der Rang ist genau dann gleich null, wenn $x = y = 0$. Jedoch liegt der Punkt $(0, 0)$ nicht auf dem Einheitskreis. Daher ist der Kreis eine glatte Varietät.

2. Sei $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0\}$ mit

$$f_1(x, y, z) := x + y + z \quad \text{und} \quad f_2(x, y, z) := x^2 + 2y + z^3,$$

d.h. $I(X) = (f_1, f_2)$. Die Jacobi-Matrix lautet dann

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2 & 3z^2 \end{pmatrix}$$

und besitzt im Punkt $p = (0, 0, 0) \in X$ Rang 2. Daher ist die Varietät X glatt in p . Daraus folgt sogar, dass X lokal isomorph zu \mathbb{C} ist: Hierzu definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, z) &\longmapsto x, \end{aligned}$$

welche nach dem Satz von der impliziten Funktion ein lokaler Isomorphismus ist (siehe [Far05, Bsp. 44]).

Bemerkung 1.1.27. 1. Ein Punkt $x \in X$ (oder ganz X) heißt *singulär*, falls er nicht glatt ist.

2. Sei K ein fester Körper. Ist L/K eine Körpererweiterung und X eine affine Varietät über K , so kann man die Eigenschaften der Varietät $X_L = X \times_K L$ durch den Basiswechsel $\text{Spec}(L) \rightarrow \text{Spec}(K)$ untersuchen. Beispielsweise sind die Varietäten X_K und X_L von derselben Dimension und es gilt: Falls X_K reduziert ist und L/K separabel, dann ist X_L reduziert. Siehe hierzu [Liu06, Kap. 3.1.2] und [Liu06, Kap. 3.2.2, Prop. 2.7].

1.2 Projektive Varietäten

Wir möchten im Folgenden *projektive Varietäten* untersuchen und hierzu einige Beispiele behandeln. Für die Einführung der Grundbegriffe orientieren wir uns an [Har77, S. 8 ff.].

Wieder sei K ein fester, algebraisch abgeschlossener Körper. Der n -dimensionale *projektive Raum* \mathbb{P}_K^n oder kurz \mathbb{P}^n ist definiert als die Menge der Äquivalenzklassen von $(n+1)$ -Tupeln (x_0, \dots, x_n) , wobei die Komponenten $x_i \in K$ nicht alle gleich Null sind, unter der Äquivalenzrelation

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \text{ für alle } \lambda \in K \setminus \{0\}.$$

Die Äquivalenzklasse von (x_0, \dots, x_n) wird mit $[x_0 : \dots : x_n]$ bezeichnet. Geometrisch betrachtet identifizieren wir also zwei Punkte aus dem affinen Raum genau dann miteinander, falls sie auf derselben Gerade durch den Ursprung liegen. Dies erlaubt uns, den projektiven Raum \mathbb{P}^n als Raum aller Geraden in \mathbb{A}^{n+1} durch den Ursprung aufzufassen.

Betrachten wir nun den Polynomring $S = K[x_0, \dots, x_n]$, so definiert wegen der Uneindeutigkeit der Koordinaten eines Punktes $p \in \mathbb{P}^n$ ein Element $f \in S$ noch keine Funktion auf \mathbb{P}^n . Ist jedoch f ein homogenes Polynom vom Grad d , so gilt $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n)$. Somit hängt die Eigenschaft, ob f null wird, nur von der Äquivalenzklasse von (x_0, \dots, x_n) ab. Durch das Polynom f erhalten wir eine Funktion von \mathbb{P}^n nach $\{0, 1\}$ mit $f(p) = 0$, wenn $f(x_0, \dots, x_n) = 0$, und $f(p) = 1$, wenn $f(x_0, \dots, x_n) \neq 0$. Wir können nun also von der Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms f auf \mathbb{P}^n sprechen, nämlich $Z(f) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0\}$. Für eine feste endliche Teilmenge I von homogenen Polynomen definieren wir die gemeinsame Nullstellenmenge durch

$$Z(I) := \{p \in \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0 \text{ für alle } f \in I\}. \quad (1.7)$$

Wir bezeichnen analog zu Abschnitt 1.1.1 eine Untermenge $X \subset \mathbb{P}^n$ als *algebraische Menge*, falls eine Menge I von homogenen Polynomen existiert, sodass $X = Z(I)$. In der *Zariski-Topologie* auf \mathbb{P}^n stellen sie die abgeschlossenen Mengen dar.

Die Untermenge $X = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\}$ ist abgeschlossen und isomorph zu \mathbb{P}^{n-1} . Ihr Komplement

$$\mathbb{P}^n \setminus X = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0\} \quad (1.8)$$

ist eine offene Untermenge und isomorph zum affinen Raum \mathbb{A}^n via

$$[x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \in \mathbb{A}^n. \quad (1.9)$$

Definition 1.2.1. Eine *projektive (algebraische) Varietät* ist eine irreduzible algebraische Menge $X \subset \mathbb{P}^n$, wobei die Irreduzibilität analog zum affinen Fall zu

1 Einführung in die algebraische Geometrie

verstehen ist.

Das (homogene) Verschwindungsideal $I(X)$ sowie der (homogene) Koordinatenring R einer projektiven Varietät X sind ebenfalls analog zum affinen Fall definiert. Die Dimension von X ist die Dimension von X als topologischer Raum.

Proposition 1.2.2 ([Har77], S. 11 f., Exercise 2.6). *Sei X eine projektive Varietät und R der homogene Koordinatenring. Dann gilt:*

$$\dim(R) = \dim(X) + 1. \quad (1.10)$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Dimension des projektiven Raums \mathbb{P}^n gleich n ist und daher $\dim(\mathbb{P}^n) = \dim(\mathbb{A}^n)$.

1.2.1 Beispiele von projektiven Varietäten

1. Der ganze projektive Raum \mathbb{P}^n ist eine projektive Varietät (analog zu Beispiel 1.1.6).
2. Hyperebenschnitte, d.h. Schnitte der Form $\mathbb{P}^n \cap \{p \in \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0\}$ mit einem homogenen Polynom f vom Grad 1, sind projektive Varietäten. Ein Beispiel hierfür ist der Schnitt $X = \mathbb{P}^n \cap \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 = 0\}$, welcher isomorph zu \mathbb{P}^{n-1} ist:

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^{n-1} \\ [x_0 : \dots : x_n] &\mapsto [x_1 : \dots : x_n]. \end{aligned}$$

3. *Segre-Einbettung*: Sei $\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^N$ jene Abbildung, welche das Paar $([x], [y])$ auf einen Punkt in \mathbb{P}^N abbildet, dessen Koordinaten die paarweisen Produkte der Koordinaten von $[x]$ und $[y]$ sind:

$$\sigma([x_0 : \dots : x_n], [y_0 : \dots : y_m]) \mapsto [x_0y_0 : x_0y_1 : \dots : x_iy_j : \dots : x_ny_m]$$

mit x_iy_j in lexikographischer Ordnung. Hierbei ist also

$$N = (n + 1)(m + 1) - 1 = nm + n + m.$$

Die Abbildung σ ist wohldefiniert sowie injektiv und wird *Segre-Einbettung* genannt. Das Bild dieser Abbildung ist eine projektive Varietät, die sogenannte *Segre-Varietät* und wird manchmal mit $\Sigma_{n,m}$ bezeichnet: Benennen wir das Bild $\sigma([x], [y])$ mit $[z]$ mit Koordinaten $z_{i,j} = x_iy_j$, so sehen wir, dass dieses der gemeinsame Nullstellenraum der quadratischen Polynome $z_{i,j}z_{k,l} - z_{i,l}z_{k,j}$ ist. Für $n = m = 1$ beispielsweise erhalten wir eine Einbettung des Produkts der *projektiven Gerade* \mathbb{P}^1 mit sich selbst in \mathbb{P}^3 durch

$$\sigma : ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \mapsto [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1] =: [z_0 : \dots : z_3].$$

Das Bild von σ ist hier die Segre-Varietät $\Sigma_{1,1}$ und ist der gemeinsame Nullstellenraum des quadratischen Polynoms $z_0z_3 - z_1z_2$, welches der Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ entspricht.

Ein weiteres bekanntes Beispiel einer Segre-Varietät ist das Bild

$$\Sigma_{2,1} = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5,$$

welches *Segre Threefold* genannt wird. Der Schnitt der Segre Threefold mit \mathbb{P}^3 ist eine Twisted Cubic Curve. Zu der Segre-Einbettung siehe auch [Har77, S. 13, Exercise 2.14] und [Har92, Bsp. 2.11].

4. *Projektive Quadrik*: Sei q eine $((n+1)$ -fache) quadratische Form über K , d.h. ein homogenes quadratisches Polynom in x_0, \dots, x_n :

$$q(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad a_{ij} \in K.$$

Dann definieren wir die projektive Quadrik als

$$Q := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid q(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

Sie ist eine projektive Varietät der Dimension $n - 1$. Ist der Grundkörper K von Charakteristik ungleich 2, so ist Q genau dann glatt, wenn die zugehörige Matrix $A = (a_{ij})$ den maximalen Rang $n + 1$ besitzt (siehe auch [Hul12, Lem. 5.6] und [Har77, S. 38, Exercise 5.12]). Zu der Theorie der quadratischen Formen siehe auch Abschnitt 3.1.

5. *Graßmannsche Varietät* (engl. *Grassmannian*): Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum. Dann bezeichnet $\text{Gr}(l, n)$ die Menge aller l -dimensionalen Untervektorräume in V . Für $l = 1$ beispielsweise ist $\text{Gr}(l, n) = \mathbb{P}^{n-1}$. Die Menge $\text{Gr}(l, n)$ ist folgendermaßen in einen projektiven Raum eingebettet: Sei zunächst $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine feste Basis von V . Dann sei die Basis eines l -dimensionalen Untervektorraums $U \in \text{Gr}(l, n)$ gegeben durch $\{a_1, \dots, a_l\}$ mit $a_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$. Diese Basis kann in eine Matrix A zusammengefasst werden, in welcher die Basisvektoren zeilenweise übereinander gelistet werden:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \end{pmatrix}.$$

Nun wird $U = \langle a_1, \dots, a_l \rangle$ auf die Folge aller $\binom{n}{l}$ $(l \times l)$ -Minoren der Matrix A (modulo Skalare) abgebildet, wodurch wir die sogenannten *Graßmann-Koordinaten* von U erhalten. Hiermit ist $\text{Gr}(l, n)$ eingebettet in den projekti-

1 Einführung in die algebraische Geometrie

ven Raum $\mathbb{P}^{\binom{n}{l}-1}$. Die zugehörige Abbildung wird *Plücker-Einbettung* genannt. Zusammen mit den *Plücker-Gleichungen* ist $\text{Gr}(l, n)$ eine glatte algebraische projektive Varietät der Dimension $ln - l^2 = l \cdot (n - l)$ (siehe [BRW13] oder [Har92, Lecture 6]).

Wir möchten hierzu ein kurzes Beispiel geben. Mit $l = 2$ und $n = 4$ erhalten wir eine Einbettung von $\text{Gr}(2, 4)$ in \mathbb{P}^5 durch

$$\langle a, b \rangle \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \mapsto [x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5]$$

mit den (2×2) -Minoren $x_0 = a_1b_2 - a_2b_1$, $x_1 = a_1b_3 - a_3b_1$, \dots , $x_5 = a_3b_4 - a_4b_3$. Diese erfüllen die Gleichung

$$x_0x_5 - x_1x_4 + x_2x_3 = 0,$$

d.h. die Graßmannsche Varietät $\text{Gr}(2, 4)$ ist isomorph zu der 4-dimensionalen Quadrik

$$Q = \{[x_0 : \dots : x_5] \in \mathbb{P}^5 \mid q(x_0, \dots, x_5) = 0\} \quad (1.11)$$

mit der quadratischen Form $q(x_0, \dots, x_5) = x_0x_5 - x_1x_4 + x_2x_3$.

6. *Severi-Brauer-Varietät*: Sei K diesmal ein beliebiger Körper. Sei A eine (endlich-dimensionale) zentral einfache Algebra über K , d.h. ihr Zentrum ist $K \cdot 1_A$ und sie besitzt keine nicht-trivialen zweiseitigen Ideale. Dann definieren wir die (allgemeine) *Severi-Brauer-Varietät* $\text{SB}_l(A)$ als die Menge aller Rechtsideale I von A mit Dimension $\dim_K I = l \cdot \sqrt{\dim A}$. Für $l = 1$ schreiben wir kurz $\text{SB}(A)$; dies ist die eigentliche Severi-Brauer-Varietät von A , wie sie erstmals von F. Châtelet definiert wurde (siehe [KMRT98, Def. 1.16]).

Für den Spezialfall $A = M_n(K)$ besteht die Severi-Brauer-Varietät $\text{SB}(A)$ aus allen Rechtsidealen I von $M_n(K)$ der Dimension n . Dies entspricht der Menge

$$\{B \in M_n(K) \mid \text{rank } B = 1\}, \quad (1.12)$$

welche isomorph zu dem projektiven Raum \mathbb{P}^{n-1} ist, indem $B \in M_n(K)$ auf eine nicht-triviale Spalte von B abgebildet wird. Wie wir im letzten Beispiel gesehen haben, ist also $\text{SB}(M_n(K)) \simeq \text{Gr}(1, n)$. Dieses Resultat lässt sich verallgemeinern zu:

$$\text{SB}_l(M_n(K)) \simeq \text{Gr}(l, n). \quad (1.13)$$

Der Beweis findet sich z.B. bei [KMRT98, Thm 1.18].

Des Weiteren existiert für jede zentral einfache Algebra A des Grades $\deg A = \sqrt{\dim A} = n$ ein kanonischer Isomorphismus

$$\alpha : \text{SB}_l(A) \xrightarrow{\sim} \text{SB}_{n-l}(A^{\text{op}}), \quad (1.14)$$

welcher das Rechtsideal $I \subset A$ der Dimension $l \cdot n$ auf $(I^0)^{\text{op}}$ abbildet. Hierbei

bezeichnet A^{op} die oppositionelle Algebra von A , also $A^{\text{op}} = \{a^{\text{op}} \mid a \in A\}$ mit den Operationen

$$a^{\text{op}} + b^{\text{op}} = (a + b)^{\text{op}}, \quad a^{\text{op}} \cdot b^{\text{op}} = (ba)^{\text{op}}, \quad \gamma \cdot a^{\text{op}} = (\gamma a)^{\text{op}}$$

für $a, b \in A$ und $\gamma \in K$. Die Notation I^0 bezeichnet den *Annihilator* des Ideals I , welcher (für Rechtsideale) durch

$$I^0 := \{x \in A \mid x \cdot I = 0\}$$

definiert wird und ein Linksideal in A ist. Somit lassen sich durch die Severi-Brauer-Varietät, welche formal über die Rechtsideale von A definiert ist, ebenso Informationen über ihre Linksideale ableiten (vgl. [KMRT98, S. 11 f.]).

Wir möchten nun noch die Dimension der Severi-Brauer-Varietät untersuchen. Hierzu stellen wir direkt folgende Behauptung auf:

Lemma 1.2.3. *Sei A eine zentral einfache Algebra mit $\deg A = n$. Dann gilt*

$$\dim \text{SB}_l(A) = \dim \text{Gr}(l, n) = l \cdot (n - l). \quad (1.15)$$

Beweis. Nach Bemerkung 1.1.27 gilt allgemein bei einer beliebigen Körpererweiterung L/K für die K -Varietät X und die L -Varietät X_L Gleichheit in der Dimension. Sei L nun der Zerfällungskörper von A , d.h. $A \otimes_K L \simeq M_n(L)$. Dann gilt wegen $(\text{SB}_l(A))_L \simeq \text{Gr}(l, n)$

$$\dim \text{SB}_l(A) = \dim (\text{SB}_l(A))_L = \dim \text{Gr}(l, n).$$

Dass die Dimension der Graßmannschen Varietät $\text{Gr}(l, n)$ genau $l \cdot (n - l)$ beträgt, wurde bereits im letzten Beispiel bemerkt, jedoch nicht erläutert. Den Beweis hierfür werden wir an dieser Stelle nachholen.

Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum mit fester Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ und $U \in \text{Gr}(l, n)$, also ein l -dimensionaler Untervektorraum von V mit Basis $\{a_1, \dots, a_l\}$, wobei $a_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ und $a_{ij} \in K$. Wie in Beispiel 5 fassen wir die Koordinaten der Basiselemente in eine $(l \times n)$ -Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ln} \end{pmatrix} \in M_{l \times n}(K).$$

Jeder Untervektorraum aus $\text{Gr}(l, n)$ korrespondiert also mit einer $(l \times n)$ -Matrix. Andersherum betrachtet ergibt eine solche $(l \times n)$ -Matrix M von Rang l einen Unterraum U . Zwei Matrizen M_1 und M_2 ergeben denselben Unterraum genau dann, wenn $M_1 = C \cdot M_2$ für ein $C \in \text{GL}_l(K)$. Daraus folgt, dass $\text{Gr}(l, n)$

1 Einführung in die algebraische Geometrie

genau aus den Orbits von der Varietät solcher Matrizen bzgl. der Aktion von GL_l besteht, d.h.

$$\mathrm{Gr}(l, n) = \{M \in M_{l \times n} \mid \mathrm{rank} M = l\} / \mathrm{GL}_l. \quad (1.16)$$

Allgemein ist die Dimension eines Bahnenraums $\dim X/G = \dim X - \dim G$. Da die Dimension von $M_{l \times n}$ gleich $l \cdot n$ und jene von GL_l gleich l^2 beträgt, erhalten wir in unserem Fall

$$\dim \mathrm{Gr}(l, n) = \dim M_{l \times n} - \dim \mathrm{GL}_l = l \cdot n - l^2 = l \cdot (n - l).$$

□

Der Beweis lässt sich auch über den *Stabilisator* von $U_0 = \langle e_1, \dots, e_l \rangle$ aus $\mathrm{Gr}(l, n)$ führen. Da die Gruppe GL_n transitiv auf $\mathrm{Gr}(l, n)$ wirkt, erhalten wir

$$\mathrm{Stab} U_0 = \{g \in \mathrm{GL}_n \mid g(U_0) = U_0\}. \quad (1.17)$$

Der Stabilisator besteht also aus Matrizen der Form

$$g = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \in \mathrm{GL}_n$$

mit $A \in M_{l \times l}(K)$, $B \in M_{l \times (n-l)}(K)$, $0 \in M_{(n-l) \times l}(K)$ und $C \in M_{(n-l) \times (n-l)}(K)$. Wegen

$$\mathrm{Gr}(l, n) \simeq \mathrm{GL}_n / \mathrm{Stab} U_0 \quad (1.18)$$

berechnet sich die Dimension von $\mathrm{Gr}(l, n)$ als

$$\dim \mathrm{Gr}(l, n) = \dim \mathrm{GL}_n - \dim \mathrm{Stab} U_0 = n^2 - (l^2 + (n-l)^2 + l(n-l)) = l(n-l).$$

7. Wir betrachten als Spezialfall die Graßmannschen Varietät $\mathrm{Gr}(l, n)$ für $l = 1$ und $n = 2$. Mit B bezeichnen wir die *Borel-Untergruppe* von GL_2 , welche aus oberen Dreiecksmatrizen besteht. Die Gruppe GL_2 operiert transitiv auf der projektiven Gerade \mathbb{P}^1 durch die Linksmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [x_0 : x_1]^T = [ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1] \in \mathbb{P}^1. \quad (1.19)$$

Das Element $[1 : 0] \in \mathbb{P}^1$ besitzt dann den Stabilisator

$$\mathrm{Stab} [1 : 0] = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

also die Borel-Untergruppe B . Daher gilt nach Gleichung 1.18 die Isomorphie

$$\mathbb{P}^1 \simeq \mathrm{GL}_2 / B. \quad (1.20)$$

8. Kommen wir zuletzt noch einmal kurz auf die Segre-Einbettung zurück. Für die in Beispiel 6 behandelten Severi-Brauer-Varietäten betrachten wir die Abbildung

$$\mathrm{SB}_l(A) \times \mathrm{SB}_m(B) \longrightarrow \mathrm{SB}_{lm}(A \otimes_K B) \quad (1.21)$$

$$(I, J) \mapsto I \otimes J \quad (1.22)$$

für zwei verschiedene zentral einfache K -Algebren A und B . Dann entspricht diese im Spezialfall $l = m = 1$ für $A = M_{n+1}(K)$, $B = M_{s+1}(K)$ der Segre-Einbettung

$$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^s \longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(s+1)-1}.$$

1.2.2 Glattheit

Ebenso wie für affine Varietäten können wir auch im projektiven Fall den Begriff der *Glattheit* definieren.

Definition 1.2.4. Seien $X \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät und x ein Punkt aus X . Mit $I(X) = (f_1, \dots, f_t)$ sei das homogene Verschwindungsideal von X bezeichnet. Dann heißt X *glatt* in x , falls

$$\mathrm{rank} J(x) = n - \dim(X). \quad (1.23)$$

$J(x)$ bezeichnet hierbei wieder die Jacobi-Matrix der homogenen Funktionen f_i im Punkt $x \in X$.

Beispiel 1.2.5. Wir zeigen, dass der *Twisted Cubic* $X \subset \mathbb{P}^3$ glatt ist [Hul12]. Dieser ist gegeben durch die Punkte, auf denen die (2×2) -Minoren verschwinden:

$$\det_2 \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.24)$$

Mit $x = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ entspricht dies der Nullstellenmenge der drei quadratischen Formen

$$\begin{aligned} q_1(x) &= x_0x_2 - x_1^2, \\ q_2(x) &= x_0x_3 - x_1x_2, \\ q_3(x) &= x_1x_3 - x_2^2. \end{aligned}$$

Der Twisted Cubic X der Dimension 1 wird also durch drei Quadriken der Dimension 2 ausgeschnitten. Als Jacobi-Matrix erhalten wir

$$J(x) = \begin{pmatrix} x_2 & -2x_1 & x_0 & 0 \\ x_3 & -x_2 & -x_1 & x_0 \\ 0 & x_3 & -2x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

1 Einführung in die algebraische Geometrie

welche von Rang 2 ist. Damit erfüllt die Twisted Cubic die Bedingung der Formel 1.23 aus Definition 1.2.4 einer glatten projektiven Varietät.

1.3 Zelluläre Varietäten

Wir definieren nun die (relativ) zelluläre Varietät und betrachten einige Beispiele. Im Folgenden sei K ein Körper.

Definition 1.3.1. Eine Varietät X über K heißt *Zelle*, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass X isomorph zum n -dimensionalen affinen Raum \mathbb{A}_K^n ist. Eine *zelluläre Varietät* ist eine projektive Varietät, die eine endliche disjunkte Vereinigung von Zellen ist. Das heißt, sie besitzt eine zelluläre Dekomposition.

Beispiel 1.3.2. 1. Die projektive Gerade $\mathbb{P}^1 = \{[x_0 : x_1]\}$ ist eine zelluläre Varietät: Die Untermenge $X = \{[x_0 : x_1] \mid x_0 = 0\} = \{[0 : 1]\} \subset \mathbb{P}^1$ ist als Punkt isomorph zu \mathbb{A}^0 . Das Komplement $\mathbb{P}^1 \setminus X$ ist wie in Gleichung 1.9 isomorph zum affinen Raum \mathbb{A}^1 , indem wir es mit $\{[1 : \frac{x_1}{x_0}]\}$ identifizieren. Also ist \mathbb{P}^1 zellulär mit der Dekomposition

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A} \sqcup pt.$$

2. Der n -dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}^n = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n]\}$ lässt sich zerlegen in

$$\mathbb{P}^n = \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mid x_0 = 0\} \sqcup \{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mid x_0 \neq 0\}. \quad (1.26)$$

Diese Zerlegung ist isomorph zu $\mathbb{P}^{n-1} \sqcup \mathbb{A}^n$, sodass wir durch Wiederholung von 1.26 induktiv erhalten:

$$\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup pt.$$

Daher ist \mathbb{P}^n eine zelluläre Varietät.

Bemerkung 1.3.3. Die Zerlegung des projektiven Raums $X = \mathbb{P}^n$ lässt sich als eine Filtrierung durch abgeschlossenen Untervarietäten

$$X_0 = \mathbb{P}^n \supset X_1 = \mathbb{P}^{n-1} \supset \dots \supset X_{n-1} = \mathbb{P}^1 \supset X_n = pt \supset X_{n+1} = \emptyset \quad (1.27)$$

mit $X_i \setminus X_{i+1} \simeq \mathbb{A}^i$ für $1 \leq i \leq n$ darstellen. Diese Eigenschaft der Filtrierung von $X = X_0$ wird hin und wieder als Definition der *zellulären Dekomposition* verwendet.

Definition 1.3.4. Sei X eine glatte, projektive Varietät über K . Dann heißt X *relativ zellulär*, falls eine endliche, absteigende Filtration von abgeschlossenen Untervarietäten

$$X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset X_{n+1} = \emptyset \quad (1.28)$$

existiert, sodass jedes Komplement $E_i = X_i \setminus X_{i+1}$ eine *affine Faserung* der *relativen Dimension* r_i über einer glatten, projektiven Varietät Y_i ($=$ *Basis*) ist, d.h. für alle Punkte $y \in Y_i$ ist $f_i^{-1}(y) \simeq \mathbb{A}_{K(y)}^{r_i}$ ($=$ der affine Raum über dem Restklassenkörper

1 Einführung in die algebraische Geometrie

von y), wobei f_i mit

$$\begin{array}{ccc} & E_i & \\ & \downarrow f_i & \\ & \mathbb{A}_{K(y)}^{r_i} & \\ & \downarrow & \\ & Y_i & \end{array} \quad (1.29)$$

den projektiven Morphismus der Faserung bezeichnet. Es wird vorausgesetzt, dass $Y_n = X_n$ (siehe auch [NZ06, Kap. 4]).

Bemerkung 1.3.5. Folgendes Diagramm zeigt, wie wir die Filtrierung zusammen mit den affinen Faserungen darstellen möchten:

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset X_{n+1} & & & & & & \\ \downarrow \mathbb{A}^{r_0} \quad \downarrow \mathbb{A}^{r_1} \quad \dots \quad \downarrow \mathbb{A}^{r_n} & & & & & & \\ Y_0 \quad Y_1 \quad \dots \quad Y_n. & & & & & & \end{array}$$

Des Weiteren sei bemerkt, dass es sich bei den abgeschlossenen Untervarietäten X_i für $i > 0$ nicht notwendigerweise um glatte Varietäten handelt (siehe auch [Kar01, Def. 6.19]).

Beispiel 1.3.6. 1. Jede zelluläre Varietät ist relativ zellulär: Nehme $Y_i = pt$ für alle i .

2. Konkret für den projektiven Raum \mathbb{P}^n haben wir z.B.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n \supset pt = \{[1 : 0 : \dots : 0]\} \supset \emptyset & & \\ \downarrow \mathbb{A}^1 & & \downarrow \mathbb{A}^0 \\ \mathbb{P}^{n-1} & & pt, \end{array}$$

wobei bei der ersten affinen Faserung $f_0([x_0 : \dots : x_n]) = [x_1 : \dots : x_n]$ ist.

3. *Rost-Filtrierung:* Wir möchten nun statt eines projektiven Raums eine projektive Quadrik Q betrachten. Hierfür verwenden wir die isotrope quadratische Form

$$q(x_0, \dots, x_n) = x_0x_1 + q'(x_2, \dots, x_n),$$

wobei q' wiederum eine quadratische Form sei. Damit erhalten wir die Quadrik $Q = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid q(x_0, \dots, x_n) = 0\}$ der Dimension $n - 1$. Eine Filtrierung von $X_0 = Q$ ist gegeben durch

$$X_0 \supset X_1 = \{[x_0 : \dots : x_1] \in Q \mid x_0 = 0\} \supset X_2 = pt = \{[0 : 1 : 0 : \dots : 0]\} \supset \emptyset.$$

Für die erste Differenz erhalten wir nun die Menge

$$X_0 \setminus X_1 = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0, x_0x_1 + q'(x_2, \dots, x_n) = 0\},$$

welche durch die Definition $y_i := \frac{x_i}{x_0}$ isomorph zu

$$\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{A}^n \mid y_1 + q'(y_2, \dots, y_n) = 0\}$$

ist. Via $(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_2, \dots, y_n)$ erhalten wir wiederum einen Isomorphismus nach \mathbb{A}^{n-1} . Insgesamt haben wir

$$\begin{array}{ccc} Q \supset \{[x_0 : \dots : x_1] \in Q \mid x_0 = 0\} \supset pt = \{[0 : 1 : 0 : \dots : 0]\} \supset \emptyset \\ \downarrow \mathbb{A}^{n-1} & & \downarrow \mathbb{A}^1 & & \downarrow \mathbb{A}^0 \\ pt & & Q' & & pt \end{array}$$

mit $Q' = \{[x_2 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^{n-2} \mid q'(x_2, \dots, x_n) = 0\}$. Die projektive Quadrik Q ist also eine relativ zelluläre Varietät.

4. *Hyperbolische Quadrik:* Sei nun $X_0 = Q$ eine hyperbolische Quadrik der Dimension $2n$,

$$Q = \{[x_0 : y_0 : x_1 : y_1 : \dots : x_n : y_n] \in \mathbb{P}^{2n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i y_i = 0\}.$$

Dann erhalten wir als Folge von abgeschlossenen Untervarietäten:

$$X_0 \supset X_1 = \{[x_0 : y_0 : \dots : x_n : y_n] \in \mathbb{P}^{2n+1} \mid x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0\} \supset \emptyset.$$

Die Varietät X_1 ist isomorph zu $\{[y_0 : \dots : y_n]\} = \mathbb{P}^n$ und für die Differenz $X_0 \setminus X_1$ finden wir die Faserung

$$f_0 : X_0 \setminus X_1 \xrightarrow{\mathbb{A}^n} \{[x_0 : y_0 : \dots : x_n : y_n] \mid y_0 = \dots = y_n = 0\} \simeq \mathbb{P}^n.$$

Insgesamt haben wir

$$\begin{array}{ccc} Q \supset \{[x_0 : y_0 : \dots : x_n : y_n] \in \mathbb{P}^{2n+1} \mid x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0\} \supset \emptyset \\ \downarrow \mathbb{A}^n & & \downarrow \mathbb{A}^0 \\ \mathbb{P}^n & & \mathbb{P}^n. \end{array}$$

Siehe zu diesem Beispiel auch [NZ06, 7.1].

5. Sei $\text{Gr}(d, n)$ die Grassmannsche Varietät von d -dimensionalen Untervektorräumen im affinen Raum \mathbb{A}^n . Dann besitzt $\text{Gr}(d, n)$ eine zelluläre Filtration, nämlich

$$\text{Gr}(d, n) \supset \text{Gr}(d, n-1) \supset \emptyset.$$

Zur Betrachtung der affinen Faserung sei V ein fester $(n-1)$ -dimensionaler Unterraum von \mathbb{A}^n . Dann existiert eine abgeschlossene Einbettung

$$\text{Gr}(d, n-1) \rightarrow \text{Gr}(d, n)$$

1 Einführung in die algebraische Geometrie

von glatten, projektiven Varietäten, wobei $\text{Gr}(d, n - 1)$ mit der Varietät der d -dimensionalen Unterräume in V identifiziert wird. Dann ist das Komplement $E = \text{Gr}(d, n) \setminus \text{Gr}(d, n - 1)$ ein Vektorbündel über $\text{Gr}(d - 1, n - 1)$. Ein Element aus E ist ein d -dimensionaler Unterraum, der V entlang eines linearen Unterraums der Dimension $d - 1$ schneidet und somit einen Punkt in $\text{Gr}(d - 1, n - 1)$ bildet. Die Menge all dieser Elemente aus E , die V entlang eines festen $(d - 1)$ -dimensionalen Unterraums schneiden, kann sogar mit dem affinen Raum der Dimension $n - d$ identifiziert werden (siehe [NZ06, 7.3]). Wir erhalten also

$$\begin{array}{c} \text{Gr}(d, n) \supset \text{Gr}(d, n - 1) \supset \emptyset \\ \downarrow \mathbb{A}^{n-d} \\ \text{Gr}(d - 1, n - 1). \end{array}$$

Bemerkung 1.3.7. Zu der Filtration der Graßmannschen Varietät aus Beispiel 1.3.6 möchten wir eine weitere Herangehensweise präsentieren. Zunächst schreiben wir $\text{Gr}(d, n) = \text{GL}_n/\text{P}_d$, wobei $\text{P}_d \subset \text{GL}_n$ die parabolische Untergruppe von GL_n ist, welche aus Matrizen der Art

$$\left. \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array} \right\} = d$$

$$\left. \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right\} = n - d$$

besteht. Dann ist $\text{GL}_n/\text{P}_d \supset \text{GL}_{n-1}/\text{P}_d \simeq \text{P}_{n-1}/(\text{P}_{n-1} \cap \text{P}_d) \simeq \text{Gr}(d, n - 1)$. Durch das Entfernen der ersten Zeile und der ersten Spalte erhalten wir schließlich

$$\begin{array}{c} \text{GL}_n/\text{P}_d \supset \text{P}_{n-1}/(\text{P}_{n-1} \cap \text{P}_d) \supset \emptyset \\ \downarrow \mathbb{A}^{n-d} \\ \text{P}_1/(\text{P}_1 \cap \text{P}_d) \end{array}$$

und $\text{P}_1/(\text{P}_1 \cap \text{P}_d) \simeq \text{GL}_{n-1}/\text{P}_{d-1} \simeq \text{Gr}(d - 1, n - 1)$.

Unter der Voraussetzung $d \leq n - d$ existiert auch eine Filtration von $\text{Gr}(d, n)$ mit affinen Faserungen folgender Art:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Gr}(d, n) & \supset & \dots & \supset & \dots & \supset & \dots & \supset & \dots & \supset & \dots & \supset & \emptyset \\ & & \downarrow \mathbb{A}^{d^2} & & \downarrow \mathbb{A}^{m^2} & & \downarrow \mathbb{A}^1 & \downarrow \mathbb{A}^0 & & & & & \\ & & \text{Gr}(d, n - d) & & Y_m & & Y_1 & pt & & & & & \end{array}$$

mit $Y_m = \text{Gr}(d - m, d) \times \text{Gr}(m, n - d)$. Für die Quadrik $\text{Gr}(2, 4)$ erhalten wir also

wegen $\text{Gr}(1, 2) \simeq \mathbb{P}^1$:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Gr}(2, 4) & \supset & X_1 & \supset & pt & \supset & \emptyset \\ & & \downarrow \mathbb{A}^4 & & \downarrow \mathbb{A}^1 & & \downarrow \mathbb{A}^0 \\ & & pt & & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & & pt. \end{array}$$

Betrachten wir nun $X = \text{Sp}_{2n}/\text{P}_n$, wobei Sp_{2n} die symplektische Gruppe ist, d.h. eine Untergruppe von GL_{2n} , welche für $\text{char}(K) \neq 2$ definiert ist als:

$$\text{Sp}_{2n} := \{A \in \text{GL}_{2n} \mid A^T I_n A = I_n\},$$

wobei $I_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ mit der $(n \times n)$ -Einheitsmatrix E_n ist. Dann haben wir die Filtration

$$\text{Sp}_{2n}/\text{P}_n = X_{n+1} \cup X_n \cup \dots \cup X_1 \supset X_n \cup \dots \cup X_1 \supset \dots \supset X_1 = pt \supset \emptyset$$

mit $X_{d+1} \xrightarrow{\mathbb{A}^{\frac{d(d+1)}{2}}} \text{Gr}(d, n)$. Zu diesem und dem vorhergehenden Beispiel siehe auch [CGM05, § 9].

2 Schnitt-Theorie

In diesem Kapitel ist unser Ziel die Definition der Schnitt-Theorie sowie darauf aufbauend die Konstruktion der Kategorie der Motive. Hierzu starten wir in Abschnitt 2.1 mit der Einführung der orientierten Kohomologie-Theorien. Wir untersuchen die beiden Kategorien \mathbf{Sch}_K und \mathbf{Sm}_K und definieren schließlich den Begriff der orientierten Kohomologie-Theorie. Im Anschluss beschäftigen wir uns mit den Chern-Klassen sowie den formalen Gruppengesetzen.

Zentrales Beispiel einer orientierten Kohomologie-Theorie ist die Schnitt-Theorie, auch Chow-Theorie genannt. Diese leiten wir in Abschnitt 2.2 basierend auf dem Begriff der l -Zykel und der rationalen Äquivalenz her. Wir untersuchen schließlich auch den Pull-back sowie den Push-forward von Chow-Gruppen und präsentieren das wichtige Theorem 2.2.10 über die Dekomposition von Chow-Gruppen relativ zellulärer Varietäten. Mithilfe dieses Theorems lassen sich einige Chow-Ringe bestimmen.

Die Konstruktion der Chow-Motive in Kapitel 2.3 erfolgt in zwei Schritten. Erst wird die Kategorie der Korrespondenzen definiert, worauf die Kategorie der Motive schließlich aufbaut. In Abschnitt 2.4 führen wir die Tate-Motive und den Tate-Twist ein. Dies und das Theorem 2.4.8 über die Dekomposition des Motivs einer relativ zellulären Varietät sind sehr nützlich für die Untersuchung und Bestimmung von Motiven.

2.1 Orientierte Kohomologie-Theorien

Wir beginnen dieses Kapitel mit einigen Notationen und Vereinbarungen, wobei wir uns eng an [LM07] orientieren. Zunächst möchten wir jedoch einige Begriffen aus der Kategorientheorie wiederholen.

2.1.1 Kategorientheorie

Eine *Kategorie* \mathcal{C} besteht zum einen aus einer Klasse $\text{Ob}(\mathcal{C})$ von *Objekten* und zu je zwei Objekten $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ einer Menge $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von Morphismen von X nach Y . Diese Morphismenmengen sind paarweise disjunkt. Zum anderen enthält die Kategorie die Verknüpfungsabbildungen

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad (2.1)$$

mit $(g, f) \mapsto g \circ f$, welche assoziativ sind. Des Weiteren existiert zu jedem Objekt $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ein Identitätsmorphismus $\text{id}_X \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$. Eine *Unterkategorie* \mathcal{D}

von \mathcal{C} ist eine Kategorie, deren Objekte $\text{Ob}(\mathcal{D})$ eine Teilklasse von $\text{Ob}(\mathcal{C})$ und deren Morphismenmenge $\text{Mor}_{\mathcal{D}}(X, Y)$ zu je zwei Objekten X, Y in \mathcal{D} eine Teilmenge von $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ist. Stimmen die Morphismenmengen von \mathcal{D} mit jenen von \mathcal{C} überein, so heißt \mathcal{D} *volle* Unterkategorie. Die *duale Kategorie* \mathcal{C}^{op} zu einer Kategorie \mathcal{C} besteht aus denselben Objekten $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$, jedoch zeigen in \mathcal{C}^{op} alle Pfeile der Morphismen in die andere Richtung: Ein Pfeil $f : X \rightarrow Y$ in \mathcal{C}^{op} ist ein Pfeil $f : Y \rightarrow X$ in \mathcal{C} , d.h. $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Für Details siehe z.B. [Awo08].

2.1.2 Die Kategorien \mathbf{Sch}_K und \mathbf{Sm}_K

Sei K ein beliebiger Körper. Dann bezeichnen wir die Kategorie der separierten Schemata über K mit \mathbf{Sch}_K und dessen Unterkategorie der glatten und quasi-projektiven Varietäten über K mit \mathbf{Sm}_K . Eine Varietät heißt dabei *quasi-projektiv*, falls sie offene Teilmenge einer projektiven Varietät ist, vgl. [Har77, S. 10].

Für einen Punkt $z \in Z \in \mathbf{Sm}_K$ bezeichnen wir mit $\dim_K(Z, z)$ die Dimension der zusammenhängenden Komponente von Z , die z enthält, über K . Ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ in \mathbf{Sm}_K ist von *relativer Dimension* d , falls für alle $y \in Y$ gilt: $\dim(Y, y) - \dim(X, f(y)) = d$. Es ist ebenso gebräuchlich, in diesem Fall zu sagen, f sei von *relativer Kodimension* $-d$. Sei nun \mathcal{V} eine volle Unterkategorie von \mathbf{Sch}_K , welche folgende Eigenschaften besitzt:

1. Sowohl das Spektrum $\text{Spec}(K)$ als auch die leere Menge liegen in \mathcal{V} .
2. Für zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{V}$ gilt, dass auch das Produkt $X \times_K Y$ in \mathcal{V} liegt.
3. Genauso soll die disjunkte Vereinigung $X \sqcup Y$ zweier Objekte aus \mathcal{V} in \mathcal{V} enthalten sein.
4. Ist $Y \rightarrow X$ ein glatter, quasi-projektiver Morphismus in \mathbf{Sch}_K mit $X \in \mathcal{V}$, so folgt daraus $Y \in \mathcal{V}$.

Eine solche Unterkategorie \mathcal{V} wird manchmal als *zulässig* (engl. *admissible*) bezeichnet. Die aufgezählten Eigenschaften werden beispielsweise von \mathbf{Sm}_K erfüllt. Insbesondere enthält jede zulässige Unterkategorie \mathcal{V} von \mathbf{Sch}_K die Kategorie \mathbf{Sm}_K . Das Kürzel \mathbf{R}^* bezeichne die Kategorie der kommutativen, graduierten Ringe mit Einselement. Ein *graduierter* Ring ist ein Ring R zusammen mit einer Dekomposition $R = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ von R in eine direkte Summe von abelschen Gruppen S_d , sodass für $d, e \geq 0$ gilt, dass $S_d \cdot S_e \subset S_{d+e}$ (vgl. z.B. [Har77, S. 9]). Wir nennen einen Funktor $A^* : \mathbf{Sm}_K^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{R}^*$ *additiv*, falls $A^*(\emptyset) = 0$ und für alle $(X, Y) \in \mathbf{Sm}_K^2$ die kanonische Abbildung $A^*(X \sqcup Y) \rightarrow A^*(X) \times A^*(Y)$ ein Isomorphismus ist.

2.1.3 Definition der orientierten Kohomologie-Theorie

Wir präsentieren nun die Definition und Axiome einer orientierten Kohomologie-Theorie (siehe [LM07, Def. 1.1.2]). Zu den verwendeten Begriffen der (algebraischen) Vektorbündel siehe z.B. [Har77, Kap. 2, § 5] oder [Sha74, Kap. 6.1.2].

Definition 2.1.1. Sei \mathcal{V} eine zulässige Unterkategorie von \mathbf{Sch}_K . Dann ist eine *orientierte Kohomologie-Theorie* auf \mathcal{V} gegeben durch

D1 Einen additiven Funktor $A^* : \mathcal{V}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{R}^*$.

D2 Für jeden projektiven Morphismus $f : Y \rightarrow X$ in \mathcal{V} von relativer Kodimension d existiert ein Homomorphismus von graduierten $A^*(X)$ -Moduln:

$$f_* : A^*(Y) \rightarrow A^{*+d}(X). \quad (2.2)$$

Durch den Ringhomomorphismus $f^* : A^*(X) \rightarrow A^*(Y)$ erhält $A^*(Y)$ die Struktur eines $A^*(X)$ -Moduls.

Die orientierte Kohomologie-Theorie erfüllt

A1 Für jedes $X \in \mathcal{V}$ gilt $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{A^*(X)}$. Sind darüber hinaus zwei projektive Morphismen gegeben durch $f : Y \rightarrow X$ und $g : Z \rightarrow Y$ in \mathcal{V} , wobei f von relativer Kodimension d und g von relativer Kodimension e sei, so gilt

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_* : A^*(Z) \rightarrow A^{*+d+e}(X). \quad (2.3)$$

A2 Seien $f : X \rightarrow Z$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei *transversale*¹ Morphismen in \mathcal{V} mit dem Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array} .$$

Vorausgesetzt, f ist projektiv und von relativer Kodimension d (und somit auch f'), so gilt $g^* f_* = f'_* g'^*$.

PB Sei $E \rightarrow X$ ein Vektorbündel von Rang n über X in \mathcal{V} und $O(1) \rightarrow \mathbb{P}(E)$ das kanonische Quotienten-Geradenbündel mit Nullschnitt $s : \mathbb{P}(E) \rightarrow O(1)$. Sei $1 \in A^0(\mathbb{P}(E))$ das multiplikative neutrale Element und definiere

$$\xi := s^*(s_*(1)) \in A^1(\mathbb{P}(E)).$$

Dann ist $A^*(\mathbb{P}(E))$ ein freier $A^*(X)$ -Modul mit der Basis

$$(1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}).$$

¹Zwei Morphismen $f : X \rightarrow Z$ und $g : Y \rightarrow Z$ heißen *transversal* in \mathcal{V} , falls einerseits $\text{Tor}_q^{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) = 0$ für alle $q > 0$ und andererseits das Faserprodukt $X \times_Z Y$ in \mathcal{V} liegt. Tor_q bezeichnet hierbei die q -te Linksableitung des Tensorfunktors und \mathcal{O}_V die Strukturgarbe eines Schemas V .

2 Schnitt-Theorie

EH Sei $E \rightarrow X$ ein Vektorbündel über X in \mathcal{V} und sei $p : V \rightarrow X$ ein E -Torsor. Dann ist $p^* : A^*(X) \rightarrow A^*(V)$ ein Isomorphismus.

Ein Morphismus von orientierten Kohomologie-Theorien auf \mathcal{V} ist eine natürliche Transformation von Funktoren $\mathcal{V}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{R}^*$, welche mit den Abbildungen f_* kommutieren. Morphismen der Form f^* werden *Pull-backs* und jene der Form f_* werden *Push-forwards* genannt.

Bemerkung 2.1.2. 1. Aus Eigenschaft **D2** folgt die *Projektionsformel*:
Für $y \in A^*(Y)$ und $x \in A^*(X)$ gilt

$$f_*(y \cdot f^*(x)) = x \cdot f_*(y). \quad (2.4)$$

2. Das Axiom **PB** wird in der Literatur als *projective bundle formula* und **EH** als *extended homotopy property* bezeichnet.

2.1.4 Chern-Klassen

Sei nun $\mathcal{V} = \mathbf{Sm}_K$, A^* eine orientierte Kohomologie-Theorie darauf und $E \rightarrow X$ ein Vektorbündel von Rang n über X . Dann folgt aus Axiom **PB**, dass eindeutige Elemente $c_i(E) \in A^i(X)$, $i \in \{0, \dots, n\}$, existieren, sodass $c_0(E) = 1$ und

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i c_i(E) \xi^{n-i} = 0. \quad (2.5)$$

Das Element $c_i(E)$ heißt *i-te Chern-Klasse* des Vektorbündels (siehe [LM07, S. 2 f.]). Die Chern-Klassen lassen sich durch eine Reihe von Eigenschaften charakterisieren:

1. Für jedes Geradenbündel L über $X \in \mathbf{Sm}_K$ ist $c_1(L) = s^*s_*(1) \in A^1(X)$, wobei $s : X \rightarrow L$ den Nullschnitt bezeichnet.
2. Für jeden Morphismus $f : Y \rightarrow X$ aus \mathbf{Sm}_K und jedes Vektorbündel E über X gilt für alle $i \geq 0$:

$$c_i(f^*(E)) = f^*(c_i(E)). \quad (2.6)$$

3. *Whitney-Produkt*: Falls

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Vektorbündeln ist, dann gilt für ein $n \geq 0$:

$$c_n(E) = \sum_{i=0}^n c_i(E')c_{n-i}(E''). \quad (2.7)$$

Sind zwei Geradenbündel L und M über $X \in \mathbf{Sm}_K$ gegeben, so gilt nach A. Grothendieck folgende Formel:

$$c_1(L \otimes M) = c_1(L) + c_2(M). \quad (2.8)$$

Laut D. Quillen ist diese Aussage jedoch im Allgemeinen *nicht* gültig. Nach Einführung der sogenannten *formalen Gruppengesetze* können wir allerdings ein Resultat von D. Quillen präsentieren, welches $c_1(L \otimes M)$ allgemein gültig beschreibt.

2.1.5 Formales Gruppengesetz

Ein (*kommutatives*) *formales Gruppengesetz von Rang 1* mit Koeffizienten in A ist ein Paar (A, F) bestehend aus einem kommutativen Ring A und einer *formalen Potenzreihe* F ,

$$F(u, v) = \sum_{i,j} a_{i,j} u^i v^j \in A[[u, v]],$$

sodass folgende Eigenschaften gelten:

1. $F(u, 0) = F(0, u) = u \in A[[u]]$.
2. $F(u, v) = F(v, u) \in A[[u, v]]$.
3. $F(u, F(v, w)) = F(F(u, v), w) \in A[[u, v, w]]$.

Die symmetrische Eigenschaft 2. ist für ein formales Gruppengesetz, welches nicht notwendig kommutativ ist, optional. Ein einfaches Beispiel für ein formales Gruppengesetz ist das *additive formale Gruppengesetz*, welches gegeben ist durch:

$$F_a(u, v) = u + v. \quad (2.9)$$

Es folgt nun ein Lemma mit der Aussage von Quillen, siehe auch [LM07, Lem. 1.1.3] und [Qui71, Prop. 2.7].

Lemma 2.1.3. *Sei A^* eine orientierte Kohomologie-Theorie auf \mathbf{Sm}_K . Dann verschwindet für jedes Geradenbündel L über $X \in \mathbf{Sm}_K$ die Klasse $c_1(L)^n$ für genügend großes n . Ferner existiert eine eindeutige Potenzreihe*

$$F_A(u, v) = \sum_{i,j} a_{i,j} u^i v^j \in A^*(pt)[[u, v]]$$

mit $a_{i,j} \in A^{1-i-j}(pt)$, sodass für jedes $X \in \mathbf{Sm}_K$ und für jedes Paar von Geradenbündel L, M über X gilt:

$$F_A(c_1(L), c_1(M)) = c_1(L \otimes M). \quad (2.10)$$

Des Weiteren handelt es sich bei dem Paar $(A^*(pt), F_A)$ um ein kommutatives formales Gruppengesetz von Rang 1.

2.1.6 Chow-Theorie und Grothendiecks K^0 -Funktork

Wir möchten nun zwei Beispiele für orientierte Kohomologie-Theorien anführen, wobei ersteres, die Chow-Theorie, im weiteren Verlauf dieser Arbeit wesentlicher Gegenstand unserer Untersuchungen sein wird.

Beispiel 2.1.4. 1. Die *Chow-Theorie* CH^* ist eine orientierte Kohomologie-Theorie auf \mathbf{Sm}_K . Der Ring $\text{CH}^*(X)$ für ein $X \in \mathbf{Sm}_K$ wird auch *Chow-Ring* von X genannt. Das formale Gruppengesetz, welches wir auf $\text{CH}(pt) = \mathbb{Z}$ erhalten, ist in diesem Fall gegeben durch das *additive* Gruppengesetz

$$F_a(u, v) = u + v.$$

2. Eine weitere orientierte Kohomologie-Theorie ist gegeben durch *Grothendiecks K^0 -Funktork* $X \mapsto K^0(X)$, wobei eine glatte Varietät X auf die Grothendieck-Gruppe $K^0(X)$ von lokal freien kohärenten Garben auf X abgebildet wird. Das Tensorprodukt von Garben induziert hierbei eine kommutative, unitäre Ringstruktur auf $K^0(X)$. Jedoch betrachten wir an seiner Stelle den graduierten Ring

$$K^0(X)[\beta, \beta^{-1}] := K^0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}],$$

wobei $\mathbb{Z}[\beta, \beta^{-1}]$ der Ring der sogenannten *Laurent-Polynome* in der Variablen β von Grad -1 ist. Ein Laurent-Polynom p über \mathbb{Z} ist von der allgemeinen Form $p(\beta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \beta^k$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{Z}$, von denen nur endlich viele von Null verschieden sind. Für jeden Morphismus $f : Y \rightarrow X$ finden wir dann Pull-backs f^* und Push-forwards f_* , anhand derer man die notwendigen Eigenschaften einer orientierten Kohomologie-Theorie überprüfen kann. Weiter erhalten wir als Potenzreihe F_{K^0} das *multiplikative* formale Gruppengesetz

$$F_m(u, v) = u + v - \beta uv.$$

Details zu diesem Beispiel sind zu finden in [LM07, Bsp. 1.1.5].

Eine orientierte Kohomologie-Theorie A^* auf \mathbf{Sm}_K , deren formales Gruppengesetz F_A dem additiven Gruppengesetz entspricht, wird *normal* genannt. Ist F_A hingegen wie in Beispiel 2 gegeben durch $F_A(u, v) = u + v - buv$ für ein eindeutig bestimmtes $b \in A^{-1}(pt)$, so heißt A^* *multiplikativ*. Falls b eine Einheit in $A^*(pt)$ ist, so heißt die orientierte Kohomologie-Theorie *periodisch*. Es gibt zwei Theoreme, zu finden in [LM07, Thm. 1.2.2] und [LM07, Thm. 1.2.3], welche besagen, dass in Charakteristik Null der Chow-Ring-Funktork CH^* die universelle normale orientierte Kohomologie-Theorie auf \mathbf{Sm}_K und $K^0[\beta, \beta^{-1}]$ die universelle multiplikative und periodische orientierte Kohomologie-Theorie auf \mathbf{Sm}_K ist. Die Charakterisierung aus Beispiel 2.1.4 zusammen mit der universellen Eigenschaft können wir als unsere erste Definition von CH^* ansehen.

2.1.7 Universelle Kohomologie-Theorie

Wir möchten zum Schluss dieses Abschnitts zwei Resultate präsentieren, welche in [LM07] in deren Hauptuntersuchungen einführen.

Theorem 2.1.5 ([LM07], Thm. 1.2.6). *Sei der Körper K von Charakteristik Null. Dann existiert eine universelle orientierte Kohomologie-Theorie auf \mathbf{Sm}_K , welche wir mit*

$$X \mapsto \Omega^*(X)$$

bezeichnen. Dann existiert für jede orientierte Kohomologie-Theorie A^ auf \mathbf{Sm}_K ein eindeutiger Morphismus*

$$\vartheta : \Omega^* \rightarrow A^*$$

von orientierten Kohomologie-Theorien.

Diese universelle Theorie Ω^* wird im Englischen *algebraic cobordism* genannt. Eine charakteristische Eigenschaft von Ω^* , welche nicht auf offensichtliche Weise aus der Universaleigenschaft folgt, ist gegeben durch dieses Theorem:

Theorem 2.1.6 ([LM07], Thm. 1.2.8). *Sei $i : Z \rightarrow X$ eine abgeschlossene Einbettung von glatten Varietäten über K und d die Kodimension von Z in X , also $d = \dim X - \dim Z$. Sei $U := X \setminus Z$ und $j : U \rightarrow X$ die offene Einbettung des Komplements von Z . Dann ist die Sequenz*

$$\Omega^{*-d}(Z) \xrightarrow{i_*} \Omega^*(X) \xrightarrow{j^*} \Omega^*(U) \rightarrow 0$$

exakt.

Dieses Theorem werden wir im Zusammenhang mit der Chow-Theorie in Abschnitt 2.2 aufgreifen.

2.2 Geometrische Definition der Schnitt-Theorie

In diesem Abschnitt wollen wir eine bestimmte orientierte Kohomologie-Theorie definieren, die sogenannte *Schnitt-Theorie* oder auch *Chow-Theorie*. Dies ist nach Abschnitt 2.1.6 die zweite mögliche Definition von CH^* . Hierzu benötigen wir einige Vorbereitungen und nutzen im Wesentlichen das Werk von W. Fulton [Ful98] als Grundlage.

2.2.1 Ordnung und Zykel

Im Folgenden sei X ein algebraisches Schema über dem Körper K . Mit $K(X)$ bezeichnen wir den rationalen Funktionenkörper von dem Schema X , wobei dessen Elemente, die von Null verschieden sind, die multiplikative Gruppe $K(X)^\times$ bilden. Des Weiteren bezeichnen wir nun mit $\mathcal{O}_{V,X}$ den lokalen Ring von X entlang der Untervarietät V von X , d.h. die Lokalisierung des Koordinatenrings in dem zu V korrespondierenden Primideal. Dieser lokale Ring ist ein eindimensionaler diskreter Bewertungsring, wenn X glatt ist. Für eine Funktion $r \in K(X)^\times$ definieren wir die *Ordnung* $\text{ord}_V(r)$ des Verschwindens von r auf V dann wie folgt: Jedes $r \in K(X)^\times$ kann als Quotient $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in A = \mathcal{O}_{V,X}$ geschrieben werden und wir setzen

$$\text{ord}_V(r) = \text{ord}_V(a) - \text{ord}_V(b).$$

Hierbei ist dann $\text{ord}_V(a)$ bzw. $\text{ord}_V(b)$ definiert als die diskrete Bewertung von a bzw. b . Diese ordnet einem Element c aus A , welches wiederum geschrieben werden kann als $c = u \cdot t^m$, wobei u eine Einheit in A und t ein Erzeuger des maximalen Ideals von A sind, die natürliche Zahl m zu.

Definition 2.2.1. Ein l -Zykel auf X ist eine endliche formale Summe

$$\sum_i n_i [V_i] \tag{2.11}$$

mit $n_i \in \mathbb{Z}$, wobei V_i abgeschlossene l -dimensionale Untervarietäten von X sind. Die Gruppe aller l -Zykel von X ist eine freie abelsche Gruppe, welche von allen l -dimensionalen abgeschlossenen Untervarietäten von X erzeugt wird, und wird mit $Z_l(X)$ bezeichnet. Eine Untervarietät V von X korrespondiert mit $[V]$ in $Z_l(X)$.

2.2.2 Definition der Schnitt-Theorie

Essentiell für die Einführung der Schnitt-Theorie ist die Definition der rationalen Äquivalenz.

Definition 2.2.2. Sei W eine $(l + 1)$ -dimensionale Untervarietät von X und $r \in K(W)^\times$ eine rationale Funktion ungleich Null auf W . Dann definieren wir den l -Zykel $[\text{div}(r)]$ als

$$[\text{div}(r)] := \sum \text{ord}_V(r) [V],$$

2.2 Geometrische Definition der Schnitt-Theorie

die Summe über alle Untervarietäten V von W der Kodimension $\text{codim}(V) = 1$ in W . Ein l -Zykel α ist *rational äquivalent zu Null*, geschrieben $\alpha \sim 0$, falls eine endliche Menge von $(l+1)$ -dimensionalen Untervarietäten W_i von X und Funktionen $r_i \in K(W_i)^\times$ existieren, sodass

$$\alpha = \sum_i [\text{div}(r_i)].$$

Bemerkung 2.2.3. Auch wenn X glatt ist, sind die Untervarietäten W und V in den letzten beiden Definition nicht unbedingt glatt. Dies verkompliziert im Allgemeinen die Verwendung des Ordnungsbegriffs $\text{ord}_V(r)$. Wir möchten hierzu auf [Ful98, § 1.3] und [Mur10, § 1] verweisen.

Wegen $[\text{div}(r^{-1})] = -[\text{div}(r)]$ bilden jene l -Zykel, die rational äquivalent zu Null sind, eine Untergruppe von $Z_l(X)$, welche wir mit $\text{Rat}_l(X)$ bezeichnen wollen. Die Gruppe von l -Zykeln modulo rationaler Äquivalenz auf X ist die Faktorgruppe

$$\text{CH}_l(X) := Z_l(X)/\text{Rat}_l(X).$$

Diese Faktorgruppe $\text{CH}_l(X)$ ist die *Schnitt-Theorie* bzw. *Chow-Theorie* oder auch *Chow-Gruppe*.

Definition 2.2.4. Sei $Z_*(X)$ bzw. $\text{CH}_*(X)$ definiert als die direkte Summe von $Z_l(X)$ bzw. $\text{CH}_l(X)$ für $l = 0, 1, \dots, \dim(X)$. Dann heißt ein Element aus $Z_*(X)$ bzw. $\text{CH}_*(X)$ *Zykel* bzw. *Zykel-Klasse* auf X .

Ist α eine Zykel-Klasse in $\text{CH}_*(X)$, so bezeichnen wir mit $\{\alpha\}_l$ jeweils die Komponente von α in $\text{CH}_l(X)$, also $\alpha = \sum_{l \geq 0} \{\alpha\}_l$. Ein Zykel heißt des Weiteren *positiv*, falls er nicht Null ist und jeder seiner Koeffizienten n_i eine positive ganze Zahl ist. Folglich heißt eine Zykel-Klasse *positiv*, falls sie durch einen positiven Zykel repräsentiert werden kann.

Beispiel 2.2.5 ([Ful98], Bsp. 1.3.1). 1. Ein Schema X und sein reduziertes Schema X_{red} besitzen dieselben Untervarietäten, weshalb die Gruppen der Zykel und somit die Gruppen der Klassen der rationalen Äquivalenz isomorph sind:

$$\text{CH}_l(X) \simeq \text{CH}_l(X_{\text{red}}).$$

2. Sei X eine disjunkte Vereinigung von Schemata X_1, \dots, X_t . Dann gilt $Z_*(X) = \bigoplus Z_*(X_i)$ sowie

$$\text{CH}_l(X) = \bigoplus_{i=1}^t \text{CH}_l(X_i).$$

3. Sind X_1 und X_2 abgeschlossene Unterschemata von X , so existiert eine exakte

Sequenz

$$\mathrm{CH}_l(X_1 \cap X_2) \rightarrow \mathrm{CH}_l(X_1) \oplus \mathrm{CH}_l(X_2) \rightarrow \mathrm{CH}_l(X_1 \cup X_2) \rightarrow 0.$$

2.2.3 Definition des Chow-Rings

Sei im Folgenden X eine glatte Varietät der Dimension n . Dann setzen wir

$$\mathrm{CH}^p(X) := \mathrm{CH}_{n-p}(X).$$

Falls $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus ist mit glattem Y , so existiert ein Pull-back f^* , welcher die Graduierung erhält:

$$f^* : \mathrm{CH}^p(Y) \rightarrow \mathrm{CH}^p(X).$$

Für Näheres zu Pull-back und Push-forward siehe Abschnitt 2.2.4.

Wir können nun den *Chow-Ring* $\mathrm{CH}^*(X)$ wie folgt definieren:

$$\mathrm{CH}^*(X) := \bigoplus_{i=0}^{\dim(X)} \mathrm{CH}^i(X). \quad (2.12)$$

Hierbei handelt es sich um einen kommutativen Ring bzgl. des *Schnitt-Produkts*, welches eine Abbildung

$$\mathrm{CH}^k(X) \otimes \mathrm{CH}^l(X) \rightarrow \mathrm{CH}^{k+l}(X)$$

für alle l, m auf folgende Weise definiert: Für glattes X ist die *Diagonale* $\Delta : X \rightarrow X \times X$ eine reguläre Einbettung der Kodimension n mit $n = \dim X$. Das (globale) Schnitt-Produkt ist die Komposition

$$\mathrm{CH}_m(X) \otimes \mathrm{CH}_p(X) \xrightarrow{\times} \mathrm{CH}_{m+p}(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} \mathrm{CH}_{m+p-n}(X),$$

wobei Δ^* auch *Gysin-Homomorphismus* genannt wird (siehe [Ful98, § 8.1]). Wir schreiben dann $x \cdot y := \Delta^*(x \times y)$ für $x \in \mathrm{CH}_m(X)$ und $y \in \mathrm{CH}_p(X)$. Nach entsprechender Umbenennung der Indizes erhalten wir die oben angegebene Produkt-Abbildung für $\mathrm{CH}^k(X)$ und $\mathrm{CH}^l(X)$. Des Weiteren setzen wir noch $\mathrm{CH}^l(X) = 0$ für alle $l < 0$ und $l > \dim(X)$.

Beispiel 2.2.6. 1. Sei X eine glatte, irreduzible Varietät. Dann ist

$$\mathrm{CH}^0(X) = \mathbb{Z}.$$

2. Sei $X = \mathbb{A}^1$ die affine Gerade. Da \mathbb{A}^1 glatt und irreduzibel ist, gilt zunächst $\mathrm{CH}^0(\mathbb{A}^1) = \mathbb{Z}$. Um den Chow-Ring von \mathbb{A}^1 zu bestimmen, fehlt uns nach der Definition

$$\mathrm{CH}^*(\mathbb{A}^1) = \mathrm{CH}^0(\mathbb{A}^1) \oplus \mathrm{CH}^1(\mathbb{A}^1)$$

2.2 Geometrische Definition der Schnitt-Theorie

noch die Chow-Gruppe $\text{CH}^1(\mathbb{A}^1) = \text{CH}_0(\mathbb{A}^1)$. Die Gruppe der 0-Zykel auf \mathbb{A}^1 ist $Z_0(\mathbb{A}^1) = \{\sum n_i[V_i]\}$, wobei V_i 0-dimensionale Punkte sind. Mit den Bezeichnungen aus Definition 2.2.2 ist $W = X = \mathbb{A}^1$ der Dimension 1 und $[\text{div}(r)] = \sum_i \text{ord}_{V_i}(r)[V_i]$ die Summe über genau diese abgeschlossenen 0-dimensionalen Punkte V_i . Wir möchten nun diese Summe genauer bestimmen. Den Raum \mathbb{A}^1 können wir nach Abschnitt 1.1 mit dem Spektrum $\text{Spec}(K[x])$ identifizieren. Die abgeschlossenen Punkte V_i entsprechen hier nicht-trivialen Primidealen (bzw. den hierzu korrespondierenden irreduziblen Polynomen). Das benötigte $r \in K(x)^\times = \text{Quot}^\times(K[x])$ ist eine rationale Funktion; wir schreiben $r = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in K[x]$. Nun setzen wir f_j für jenes Polynom, welches zu V_j korrespondiert. Dann ist die Bewertung $\text{ord}_{V_j}(a)$ die höchste Potenz von f_j , die a teilt. Bei der Wahl $r := f_j$ folgt dann

$$[\text{div}(r)] = \sum_i \text{ord}_{V_i}(f_j)[V_i] = [V_j] \sim 0.$$

Da wir dies bei variierendem Polynom f_i für jedes Primideal V_i erhalten, folgt insgesamt $\text{CH}_0(\mathbb{A}^1) = 0$ und somit

$$\text{CH}^*(\mathbb{A}^1) \simeq \mathbb{Z}.$$

Es sei bemerkt, dass allgemein für den n -dimensionalen affinen Raum \mathbb{A}^n gilt, dass $\text{CH}_k(\mathbb{A}^n) = 0$ für $k < n$ und $\text{CH}_n(\mathbb{A}^n) = \text{CH}^*(\mathbb{A}^n) = \mathbb{Z}$.

3. Bei der projektiven Geraden \mathbb{P}^1 sieht der Chow-Ring anders aus: Einerseits gilt für die erste Chow-Gruppe wieder $\text{CH}^0(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}$, jedoch verschwindet die Gruppe $\text{CH}^1(\mathbb{P}^1)$ nicht wie im affinen Fall. Denn wir erhalten für den 0-Zykel wegen $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$:

$$[\text{div}(r)] = \sum_i \text{ord}_{V_i}(r)[V_i] + \text{ord}_\infty(r)[\infty],$$

wobei die Summe über alle 0-dimensionalen abgeschlossenen Punkte V_i von \mathbb{A}^1 gebildet wird. Für die letztere Ordnung setzen wir durch den Übergang $t \mapsto \frac{1}{t}$:

$$\text{ord}_\infty(a(t)) = \text{ord}_0(a(1/t)) = -\text{deg}(a).$$

Mit derselben Methode wie im affinen Fall erhalten wir

$$[\text{div}(f_j)] = [V_j] - \text{deg}(f_j) \cdot [\infty] \sim 0$$

bzw. $[V_j] = \text{deg}(f_j) \cdot [\infty]$ für alle j und schließlich $\text{CH}^1(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}[\infty] \simeq \mathbb{Z}$. Der Chow-Ring von \mathbb{P}^1 ist demnach

$$\text{CH}^*(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

2 Schnitt-Theorie

Auch hier lässt sich eine allgemeine Formel für den Chow-Ring des n -dimensionalen projektiven Raums \mathbb{P}^n finden, nämlich $\text{CH}^*(\mathbb{P}^n) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{Z}$.

Bemerkung 2.2.7. Für ein Schema X über K und $p \in \mathbb{Z}$ existiert eine dritte Definition der Chow-Gruppe $\text{CH}_p(X)$:

$$\text{CH}_p(X) = \text{Coker} \left(\bigsqcup_{x \in X_{(p+1)}} K_1(K(x)) \xrightarrow{d_X} \bigsqcup_{x \in X_{(p)}} K_0(K(x)) \right). \quad (2.13)$$

Hierbei bezeichnet $X_{(p+1)}$ bzw. $X_{(p)}$ die Menge aller Punkte von X der Dimension $p+1$ bzw. p . Des Weiteren ist $K_1(K(x)) = K(x)^\times$ und $K_0(K(x)) = \mathbb{Z}$, wobei $K_*(K)$ den graduierten *Milnor-Ring* von K bezeichnet, siehe [EKM08, S. 261].

2.2.4 Pull-back und Push-forward

Wir werden nun noch etwas genauer auf den Pull-back f^* und Push-forward f_* von Chow-Gruppen eingehen (siehe hierzu auch [Ful98, 1.4, 1.7]). Sei hierfür zunächst ein flacher Morphismus $f : X \rightarrow Y$ der relativen Dimension n gegeben. Ein Morphismus f heißt dabei *flach*, falls für affine offene Mengen $U \subset Y$ und $U' \subset X$ mit $f(U') \subset U$ die induzierte Abbildung $f^* : A(U) \rightarrow A(U')$ von K -Algebren den Zielraum $A(U')$ zu einem flachen $A(U)$ -Modul werden lässt. Die Bezeichnung $A(U)$ steht für den Koordinatenring von U . Beispiele hierfür sind:

1. eine offene Einbettung; hier ist $n = 0$.
2. die Projektion eines Vektorbündels, eines \mathbb{A}^n -Bündels oder eines projektiven Bündels zu seiner Basis.
3. die Projektion von einem kartesischen Produkt $Z = X \times Y$ auf die erste Komponente.
4. jeder *dominante* Morphismus (d.h. das Bild $f(X)$ ist dicht in Y) von einer $(n+1)$ -dimensionalen Varietät in eine glatte Kurve.

Für eine solche Abbildung f und jede Untervarietät V von Y setzen wir dann

$$f^*[V] := [f^{-1}(V)],$$

wodurch wir den Pull-back $f^* : \text{CH}^*(Y) \rightarrow \text{CH}^*(X)$ erhalten. Diese Abbildung wird auch *flacher Pull-back* genannt. Für allgemeine Morphismen ist es wesentlich schwieriger, den Pullback zu definieren.

Sei nun $f : X \rightarrow Y$ ein *echter* (oder auch *eigentlicher*) Morphismus, also separiert und *universell abgeschlossen*, d.h. für alle $Y' \rightarrow Y$ bildet der induzierte Morphismus $X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen ab. Für jede Untervarietät V von X ist dann das Bild $W = f(V)$ eine abgeschlossene Untervarietät von Y . Es existiert dann eine induzierte Einbettung von $K(W)$ in $K(V)$, bei welcher

es sich um eine endliche Körpererweiterung handelt, falls W und V von derselben Dimension sind. Wir setzen daher

$$\deg(V/W) := \begin{cases} [K(V) : K(W)], & \text{falls } \dim(W) = \dim(V), \\ 0, & \text{falls } \dim(W) < \dim(V), \end{cases}$$

wobei mit $[K(V) : K(W)]$ der Grad der Körpererweiterung bezeichnet wird. Nun definieren wir

$$f_*[V] := \deg(V/W)[W]$$

und erhalten hierdurch den Push-forward $f_* : \text{CH}_*(X) \rightarrow \text{CH}_*(Y)$.

Beispiel 2.2.8. Wir betrachten die Abbildung $f : X \rightarrow \text{Spec}(K)$ von einer projektiven Varietät X in das Spektrum des Körpers K , welches einem Punkt bzw. dem 0-dimensionalen affinen Raum \mathbb{A}^0 entspricht. Daher ist die Chow-Gruppe $\text{CH}_l(\text{Spec}(K)) = \mathbb{Z}$ für $l = 0$ und Null sonst. Wir haben also für $l = 0$ den Push-forward

$$f_* : \text{CH}_0(X) \rightarrow \mathbb{Z},$$

bei welchem ein 0-Zykel $[V] \in \text{CH}_0(X)$ auf den Grad der Körpererweiterung $[K(V) : K(f(V))] = [K(V) : K(pt)] = [K(V) : K]$ abgebildet wird. Dies ist die sogenannte *Gradabbildung* für 0-Zykel $\alpha = \sum_P n_P [P]$ von X mit 0-dimensionalen Punkten P in X und wird geschrieben als

$$\deg(\alpha) = \int_X \alpha := \sum_P n_P [K(P) : K],$$

wobei $K(P)$ der Restklassenkörper von P ist.

Für die Chow-Theorie sind alle Axiome der orientierten Kohomologie-Theorien erfüllt, insbesondere das Theorem 2.1.6 über die Lokalisierungsfolge der universellen Theorie Ω^* . Sei hierfür X glatt und $i : Z \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Einbettung von Varietäten. Sei U das Komplement von Z in X mit der offenen Einbettung $j : U \hookrightarrow X$. Dann ist die Folge

$$\text{CH}_l(Z) \xrightarrow{i_*} \text{CH}_l(X) \xrightarrow{j^*} \text{CH}_l(U) \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz (siehe auch [Ful98, Prop. 1.8]).

Des Weiteren lässt sich eine nützliche Aussage über die flachen Pull-backs von affinen Bündeln formulieren. Hierzu sei wiederholt, dass ein Schema E zusammen mit einem Morphismus $p : E \rightarrow X$ ein *affines Bündel* vom Rang n über X ist, falls X eine offene Überdeckung U_α besitzt und ein Isomorphismus

$$p^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times \mathbb{A}^n$$

existiert, sodass p eingeschränkt auf das Urbild $p^{-1}(U_\alpha)$ mit der Projektion von $U_\alpha \times \mathbb{A}^n$ nach U_α korrespondiert.

Proposition 2.2.9. *Sei $p : E \rightarrow X$ ein affines Bündel vom Rang n . Dann ist der flache Pull-back*

$$p^* : \mathrm{CH}^l(X) \rightarrow \mathrm{CH}^l(E)$$

surjektiv für alle l .

Beweis. Siehe [Ful98, Prop. 1.9]. □

Man kann zeigen, dass der Pull-back $p^* : \mathrm{CH}^l(X) \rightarrow \mathrm{CH}^l(E)$ sogar immer ein Isomorphismus ist (siehe [Ful98, Thm. 3.3(a)]). Somit entspricht diese Eigenschaft der Homotopieinvarianz, d.h. Axiom **EH** aus Definition 2.1.1. Hieraus folgen zusammen mit der Eigenschaft der Lokalisierungsfolge beispielsweise die Aussagen bezüglich der Chow-Gruppen von \mathbb{A}^n und \mathbb{P}^n des Beispiels 2.2.6. Insbesondere gilt für $X = \mathrm{Spec}(K) = pt$, dass $\mathrm{CH}^l(pt) \simeq \mathrm{CH}^l(\mathbb{A}^n)$.

2.2.5 Theorem über die Dekomposition von Chow-Gruppen

Ein wichtiges Resultat, welches für die Bestimmung des Chow-Rings einer Varietät sehr nützlich ist, ist das

Theorem 2.2.10 (Dekomposition von Chow-Gruppen). *Sei X eine glatte, projektive Varietät über K . Des Weiteren sei X relativ zellulär mit der Filtration*

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_n \supset \emptyset.$$

Mit r_i sei die relative Dimension der affinen Faserung $E_i = X_i \setminus X_{i+1}$ über der glatten, projektiven Varietät Y_i bezeichnet. Dann existiert ein Isomorphismus

$$\mathrm{CH}^l(X) \simeq \bigoplus_{i=0}^n \mathrm{CH}^{l-r_i}(Y_i).$$

von Gruppen.

Für Details und den Beweis siehe [Kar01, Thm. 6.5].

Beispiel 2.2.11. 1. Betrachten wir die Filtrierung des n -dimensionalen projektiven Raums \mathbb{P}^n aus Bemerkung 1.3.3,

$$\mathbb{P}^n \supset \mathbb{P}^{n-1} \supset \mathbb{P}^{n-2} \supset \dots \supset \emptyset.$$

Setzen wir $X_i = \mathbb{P}^{n-i}$, so ist jede Differenz $E_i = X_i \setminus X_{i+1}$ isomorph zu \mathbb{A}^i und somit eine affine Faserung der relativen Dimension $r_i = n - i$ über dem Punkt $Y_i = pt$. Da wir bereits wissen, dass $\mathrm{CH}^0(pt) \simeq \mathrm{CH}^0(\mathbb{A}^k) = \mathbb{Z}$ und $\mathrm{CH}^l(pt) = 0$ für $l \neq 0$, erhalten wir mit Theorem 2.2.10 die Formel

$$\mathrm{CH}^l(\mathbb{P}^n) = \mathrm{CH}^l(pt) \oplus \mathrm{CH}^{l-1}(pt) \oplus \dots \oplus \mathrm{CH}^{l-n+1}(pt) \oplus \mathrm{CH}^{l-n}(pt),$$

2.2 Geometrische Definition der Schnitt-Theorie

also $\mathrm{CH}^l(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}$ für $0 \leq l \leq n$. Somit erhalten wir nach Definition des Chow-Rings die bereits in Beispiel 2.2.6 erwähnte Gleichung

$$\mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z},$$

wobei die direkte Summe aus $n + 1$ Komponenten besteht. Alternativ kann man für die Herleitung von $\mathrm{CH}^l(\mathbb{P}^n)$ die kürzere Filtrierung $\mathbb{P}^n \supset \mathbb{P}^{n-1} \supset \emptyset$ betrachten. Hier ist dann $Y_0 = pt$ mit $r_0 = n$ und $Y_1 = \mathbb{P}^{n-1}$ mit $r_1 = 0$ und wir erhalten $\mathrm{CH}^l(\mathbb{P}^n) = \mathrm{CH}^{l-n}(pt) \oplus \mathrm{CH}^l(\mathbb{P}^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$ für $0 \leq l \leq n$.

2. Wir möchten nun die Rost-Filtrierung aus Beispiel 1.3.6 des Abschnitts 1.3 mit denselben Notationen betrachten. Sei Q jene glatte, projektive Quadrik über K der Dimension $n - 1$ mit isotroper quadratischer Form

$$q(x_0, \dots, x_n) = x_0 y_0 + q'(x_2, \dots, x_n)$$

und der Filtrierung $Q \supset X_1 \supset pt \supset \emptyset$. Dann sind die affinen Faserungen über den glatten Varietäten $Y_0 = pt$, $Y_1 = Q'$ und $Y_2 = pt$ von den relativen Dimensionen $r_0 = n - 1$, $r_1 = 1$ und $r_2 = 0$ (Q' ist von der Dimension $n - 3$). Mit Theorem 2.2.10 folgt dann die Formel

$$\mathrm{CH}^l(Q) = \mathrm{CH}^{l-(n-1)}(pt) \oplus \mathrm{CH}^{l-1}(Q') \oplus \mathrm{CH}^l(pt).$$

Es gilt $\mathrm{CH}^{l-(n-1)}(pt) = \mathbb{Z}$, falls $l = n - 1$, und $\mathrm{CH}^l(pt) = 0$, falls $l = 0$; diese Chow-Gruppen sind jeweils Null in allen anderen Fällen. Daher ergibt sich für den Chow-Ring

$$\mathrm{CH}(Q) = \mathbb{Z} \oplus \mathrm{CH}(Q') \oplus \mathbb{Z}.$$

Falls Q' wiederum eine isotrope Quadrik ist, d.h. falls q' isotrop ist, so kann man an dieser Stelle induktiv auf selbe Weise weiter verfahren.

3. Sei Q eine hyperbolische Quadrik der Dimension $2n$ wie in Beispiel 1.3.6 mit der Filtrierung $Q \supset X_1 \supset \emptyset$. Wir haben also eine Faserung über $Y_0 = \mathbb{P}^n$ der relativen Dimension $r_0 = n$ und eine über $Y_1 = \mathbb{P}^n$ mit $r_1 = 0$. Hieraus ergibt sich

$$\mathrm{CH}^l(Q) = \mathrm{CH}^{l-n}(\mathbb{P}^n) \oplus \mathrm{CH}^l(\mathbb{P}^n).$$

Daher ist (unter der Voraussetzung $0 \leq l \leq 2n$) $\mathrm{CH}^l(Q) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, falls $l = n$, und $\mathrm{CH}^l(Q) = \mathbb{Z}$ sonst. Insgesamt folgt also für den Chow-Ring:

$$\mathrm{CH}^*(Q) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$$

bzw. $\mathrm{CH}^*(Q) = \bigoplus_{0 \leq i \leq 2n+1} \mathbb{Z}$.

Aus Theorem 2.2.10 erhält man folgendes

2 Schnitt-Theorie

Korollar 2.2.12. *Seien X und Y zwei glatte, projektive und zelluläre Varietäten über K . Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathrm{CH}^*(X) \otimes \mathrm{CH}^*(Y) &\rightarrow \mathrm{CH}^*(X \times Y) \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto \alpha \times \beta = pr_X^*(\alpha) \cdot pr_Y^*(\beta) \end{aligned}$$

ein Ringisomorphismus, wobei pr_X bzw. pr_Y die Projektion auf X bzw. Y ist.

Siehe hierzu auch [Ful98, 8.3.7]. Die Formel

$$\mathrm{CH}^*(X \times Y) \simeq \mathrm{CH}^*(X) \otimes \mathrm{CH}^*(Y) \tag{2.14}$$

heißt *Künneth-Formel* bzw. *Chow-Künneth-Formel*. Im Allgemeinen ist diese Formel falsch, z.B. für das Produkt einer elliptischen Kurve mit sich selbst, siehe auch [Tot99, S. 17 f.].

2.3 Grothendiecks Chow-Motive

Im Folgenden sei erneut K ein Körper. Mit \mathbf{Var}_K möchten wir die Kategorie der glatten, projektiven Varietäten über K bezeichnen. Bei der Konstruktion der *Chow-Motive* gehen wir schrittweise vor und beginnen mit der Einführung der Kategorie der Korrespondenzen (siehe [Man68] und [EKM08, S. 295 ff.]).

2.3.1 Schritt 1: Die Kategorie der Korrespondenzen

Wir definieren die *Kategorie der Korrespondenzen* \mathcal{C}_K oder kurz \mathcal{C}_K durch die Klasse von Objekten $\text{Ob}(\mathcal{C}_K)$, welche aus glatten, projektiven Varietäten über K besteht, d.h. $\text{Ob}(\mathcal{C}_K) = \text{Ob}(\mathbf{Var}_K)$ und eine Morphismenmenge folgender Art: Seien $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}_K)$ zwei irreduzible Varietäten, dann setzen wir

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}_K}(X, Y) := \text{CH}_{\dim(X)}(X \times Y) = \text{CH}^{\dim(Y)}(X \times Y).$$

Für beliebige Varietäten X, Y ist dann

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}_K}(X, Y) := \bigoplus_{i=1}^k \text{CH}_{\dim(X_i)}(X_i \times Y),$$

wobei X_1, \dots, X_k irreduzible Komponenten von X sind.

Ein Element $f \in \text{CH}_{\dim(X)}(X \times Y)$ heißt *Korrespondenz* zwischen den Varietäten X und Y aus \mathbf{Var}_K . Seien $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_K}(X, Y)$ und $g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_K}(Y, Z)$. Wir erhalten durch die drei Projektionen

- $pr_{12} : X \times Y \times Z \longrightarrow X \times Y$
- $pr_{13} : X \times Y \times Z \longrightarrow X \times Z$
- $pr_{23} : X \times Y \times Z \longrightarrow Y \times Z$

die Pull-backs bzw. den Push-forward

- $(pr_{12})^* : \text{CH}_{\dim(X)}(X \times Y) \longrightarrow \text{CH}_{\dim(X)}(X \times Y \times Z)$
- $(pr_{13})_* : \text{CH}_{\dim(X)}(X \times Y \times Z) \longrightarrow \text{CH}_{\dim(X)}(X \times Z)$
- $(pr_{23})^* : \text{CH}_{\dim(Y)}(Y \times Z) \longrightarrow \text{CH}_{\dim(X)}(X \times Y \times Z)$

und setzen

$$g \circ f := (pr_{13})_*((pr_{12})^*(f) \cdot (pr_{23})^*(g)) \in \text{CH}_{\dim(X)}(X \times Z).$$

Dies ist die Komposition der Korrespondenzen f und g .

2 Schnitt-Theorie

Bemerkung 2.3.1. Es gilt $\mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times Y \times Z) = \mathrm{CH}^{\dim(Y)+\dim(Z)}(X \times Y \times Z)$. Außerdem sei bemerkt, dass wir bei gegebener zellulärer Varietät X und ihrem Chow-Ring $\mathrm{CH}^*(X)$ wegen der Künneth-Formel automatisch

$$\mathrm{CH}^*(X \times X) = \langle a \times b \mid a, b \in \mathrm{CH}^*(X) \rangle$$

und dadurch alle Morphismen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_K}(X, X) = \mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times X) = \mathrm{CH}^{\dim(X)}(X \times X)$ kennen.

Den Identitätsmorphismus $\Delta_X \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}_K}(X, X) = \mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times X)$ definieren wir durch die *Diagonale*

$$\Delta_X := (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)_*(1_X),$$

wobei $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) : X \rightarrow X \times X$ bezeichnet und 1_X aus $\mathrm{CH}^0(X)$ ist.

Lemma 2.3.2. 1. Sei $\Delta_X \in \mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times X)$ der Identitätsmorphismus. Dann gilt für alle Korrespondenzen $f \in \mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times Y)$ und $g \in \mathrm{CH}_{\dim(Y)}(Y \times X)$:

$$f \circ \Delta_X = f, \quad \Delta_X \circ g = g.$$

2. Die Komposition von Korrespondenzen ist assoziativ, d.h. für alle Korrespondenzen $f \in \mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times Y)$, $g \in \mathrm{CH}_{\dim(Y)}(Y \times Z)$ und $h \in \mathrm{CH}_{\dim(Z)}(Z \times V)$ gilt:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis von 1. Zunächst zur Bezeichnung der Projektionen: Wir haben

$$\begin{aligned} pr_X &: X \times Y \rightarrow X, \\ pr_{12} &: X \times X \times Y \rightarrow X \times X, \\ pr_{13}, pr_{23} &: X \times X \times Y \rightarrow X \times Y \end{aligned}$$

und schließlich

$$((\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) \times \mathrm{id}_Y) : X \times Y \rightarrow X \times X \times Y,$$

wobei $(\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) : X \rightarrow X \times X$ ist. Wir setzen $g := ((\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X) \times \mathrm{id}_Y)$. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} f \circ \Delta_X &= (pr_{13})_*((pr_{12})^*(\Delta_X) \cdot (pr_{23})^*(f)) \\ &= (pr_{13})_*(g_*((pr_X)^*(1_X)) \cdot (pr_{23})^*(f)) \end{aligned}$$

wegen der Kompatibilität von Produkten. Für $x := (pr_{23})^*(f)$ und $y := (pr_X)^*(1_X)$ haben wir mit der Projektionsformel

$$(pr_{13})_*(x \cdot g_*(y)) = (pr_{13})_*(g_*(y \cdot g^*(x))).$$

Wegen $pr_{13} \circ g = id_{X \times Y} = pr_{23} \circ g$ erhalten wir schließlich

$$f \circ \Delta_X = (id_{X \times Y})_*((pr_X)^*(1_X) \cdot (id_{X \times Y})^*(f))$$

und die Behauptung folgt mit $(pr_X)^*(1_X) = 1_{X \times Y}$.

Der Beweis der zweiten Aussage des Lemmas funktioniert durch Verwendung ähnlicher Methoden, indem $h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ unter anderem mithilfe der Projektionsformel auf exakt dieselbe Form gebracht werden. Eine Erläuterung hierzu findet sich beispielsweise in [Man68, S. 446, Lem.]. \square

Mit diesem Lemma sind schließlich alle Eigenschaften einer Kategorie für \mathcal{C}_K gezeigt und wir gelangen zum nächsten Schritt.

2.3.2 Schritt 2: Die Kategorie der Motive

Wir kommen nun zu der Definition der Kategorie \mathcal{M}_K der *Motive*. Die Klasse der Objekte ist die Menge aller Paare (X, π) , wobei X eine Varietät aus \mathbf{Var}_K und π ein Projektor aus $\text{Mor}_{\mathcal{C}_K}(X, X) = \text{CH}_{\dim(X)}(X \times X)$ ist, d.h. es gilt $\pi \circ \pi = \pi$. Für zwei Paare (X, π) und (Y, ζ) aus $\text{Ob}(\mathcal{M}_K)$ definieren wir

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{\mathcal{M}_K}((X, \pi), (Y, \zeta)) &:= \zeta \circ \text{Mor}_{\mathcal{C}_K}(X, Y) \circ \pi \\ &= \zeta \circ \text{CH}_{\dim(X)}(X \times Y) \circ \pi. \end{aligned}$$

Zwischen den beiden Kategorien \mathbf{Var}_K und \mathcal{M}_K existiert ein Funktor F , welcher eine Varietät $X \in \text{Ob}(\mathbf{Var}_K)$ auf das Paar (X, Δ_X) abbildet. Hier handelt es sich bei $\Delta_X \in \text{CH}_{\dim(X)}(X \times X)$ wieder um die Diagonale. Das Paar (X, Δ_X) wird auch mit $\mathcal{M}(X)$ bezeichnet und heißt *Motiv von X*. Andererseits wird durch den Funktor ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ von zwei glatten, projektiven Varietäten auf den *Graphen von f* abgebildet. Dieser liegt in $\text{CH}_{\dim(X)}(X \times Y) = \text{Mor}_{\mathcal{M}_K}(\mathcal{M}(X), \mathcal{M}(Y))$ und ist definiert als das Bild $(id_X, f)_*(1_X)$ mit $(id_X, f) : X \rightarrow X \times Y$ und $1_X \in \text{CH}^0(X)$.

Des Weiteren verfügt die Kategorie über folgende universelle Eigenschaft: Sei $\mathbb{Z} - Ab$ die Kategorie der \mathbb{Z} -graduierten abelschen Gruppen und $\mathbf{Var}_K \rightarrow \mathbb{Z} - Ab$ ein Funktor, bei welchem einer Varietät X die Chow-Gruppe $\text{CH}_*(X)$ zugeordnet wird. Dann existiert ein Funktor von der Kategorie \mathcal{M}_K nach $\mathbb{Z} - Ab$, die sogenannte (*Chow*)-*Realisierung*, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Var}_K & \xrightarrow{\text{CH}^*} & \mathbb{Z} - Ab \\ & \searrow F & \nearrow \text{Realisierung} \\ & \mathcal{M}_K & \end{array}$$

kommutiert, wobei $F : X \mapsto \mathcal{M}(X)$. Die Realisierung bildet ein Paar $(X, \pi) \in \mathcal{M}_K$ auf das Bild $\text{Im}(\pi_X)$ ab, wobei π_X wie folgt definiert ist:

$$\pi_X : \text{CH}^*(X) \xrightarrow{(pr_1)^*} \text{CH}^*(X \times X) \xrightarrow{\cdot \pi} \text{CH}^{*+\dim(X)}(X \times X) \xrightarrow{(pr_2)^*} \text{CH}^*(X)$$

2 Schnitt-Theorie

mit $\pi \in \text{CH}_{\dim(X)}(X \times X)$ und $pr_1, pr_2 : X \times X \rightarrow X$. Für ein $\alpha \in \text{CH}^*(X)$ ist dann $\pi_X(\alpha) = (pr_2)_*((\alpha \times 1) \cdot \pi)$.

Definition 2.3.3. Wir definieren das Tensorprodukt zweier Paare (X, π) und (Y, ζ) aus $\text{Ob}(\mathcal{M}_K)$ durch

$$(X, \pi) \otimes (Y, \zeta) := (X \times Y, \pi \times \zeta).$$

Die direkte Summe zweier Paare wird definiert durch

$$(X, \pi) \oplus (Y, \zeta) := (X \sqcup Y, \pi + \zeta).$$

Bemerkung 2.3.4. Mit obigen Bezeichnungen gilt

$$\mathcal{M}(X) \simeq (X, \pi) \oplus (X, \Delta_X - \pi)$$

für alle π mit $\pi \circ \pi = \pi$. Allgemein gilt $(X, \pi) \simeq (X, \pi_1) \oplus (X, \pi_2)$, falls $\pi = \pi_1 + \pi_2$ sowie $\pi_1 \circ \pi_2 = 0$ und $\pi_2 \circ \pi_1 = 0$. Siehe hierzu auch [Vis09b, D2, S. 5].

Lemma 2.3.5 ([Kar00], Lem. 1.1). *Seien X, Y und Z Varietäten aus \mathbf{Var}_K sowie $(a \times b) \in \text{CH}^*(Y \times Z)$ und $(c \times d) \in \text{CH}^*(X \times Y)$. Dann ist*

$$(a \times b) \circ (c \times d) = \deg(a \cdot d) \cdot (c \times b).$$

Beweis. Wir haben zunächst $\text{CH}^*(Y) \times \text{CH}^*(Z) \rightarrow \text{CH}^*(Y \times Z)$ mit

$$(a, b) \mapsto (pr_Y)^*(a) \cdot (pr_Z)^*(b) = a \times b$$

und genauso $c \times d = (pr_X)^*(c) \cdot (pr_Y)^*(d)$. Nach der Definition der Komposition von Korrespondenzen erhalten wir

$$\begin{aligned} (a \times b) \circ (c \times d) &= (pr_{1,3})_*((pr_{1,2})^*(c \times d) \cdot (pr_{2,3})^*(a \times b)) \\ &= (pr_{1,3})_*((c \times d \times 1) \cdot (1 \times a \times b)) \\ &= (pr_{1,3})_*(c \times (a \cdot d) \times b). \end{aligned}$$

Schließlich folgt die Behauptung direkt mit der Definition des Push-Forwards von Chow-Gruppen. \square

Definition 2.3.6. Sei $\pi \in \text{CH}^*(X \times Y)$. Dann heißt $\pi^t \in \text{CH}^*(Y \times X)$ die *Transposition* von π .

Beispiel 2.3.7. Sei $(a \times b) \in \text{CH}^*(X \times Y)$ wie im Lemma gegeben. Dann ist

$$(a \times b)^t = (b \times a) \in \text{CH}^*(Y \times X).$$

2.4 Tate-Motive

In den 60er Jahren hat unter anderem Y. I. Manin in [Man68] die Tate-Motive vorgestellt. Zur Motivation von diesen möchten wir mit dem Beispiel eines Motivs beginnen.

2.4.1 Motivation und Definition des Tate-Motivs

Beispiel 2.4.1. Sei $X = \mathbb{P}^n$ der projektive Raum über K . Wir wissen bereits, dass $\mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n) = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}$. Wie sieht nun das Motiv von \mathbb{P}^n aus? Wir werden dies zunächst für den Fall $n = 1$ untersuchen. Der Definition zufolge haben wir

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = (\mathbb{P}^1, \Delta_{\mathbb{P}^1}) \in \mathcal{M}_K.$$

Wir möchten daher die Diagonale $\Delta_{\mathbb{P}^1}$ näher bestimmen. Der Raum \mathbb{P}^1 besitzt die Filtrierung $X_0 = \mathbb{P}^1 \supset X_1 = pt \supset \emptyset$ mit den affinen Faserungen $E_0 \xrightarrow{\mathbb{A}^1} pt$ und $E_1 \xrightarrow{\mathbb{A}^0} pt$ der relativen Dimension 1 bzw. 0. Daher schreiben wir für den Chow-Ring

$$\mathrm{CH}_*(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathbb{Z} \cdot h,$$

wobei $h = h^1$ ein rationaler Punkt aus $\mathrm{CH}^1(\mathbb{P}^1)$ und $1 = h^0$ aus $\mathrm{CH}^0(\mathbb{P}^1)$ ist. Nach der Künneth-Formel ist dann $\mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z}\langle 1 \times h, h \times 1 \rangle$. Der Chow-Ring ist $\mathrm{CH}_*(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z}\langle 1 \times 1, 1 \times h, h \times 1, h \times h \rangle$. Die Diagonale $\Delta_{\mathbb{P}^1} \in \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ ist dann von der Form

$$\Delta_{\mathbb{P}^1} = (1 \times h) + (h \times 1),$$

da zum einen $(1 \times h) \circ (1 \times h) = (1 \times h)$ sowie $(h \times 1) \circ (h \times 1) = (h \times 1)$ nach Lemma 2.3.5. Zum anderen gilt dann für alle $\alpha \in \mathrm{CH}_1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, dass $\alpha \circ \Delta_{\mathbb{P}^1} = \Delta_{\mathbb{P}^1} \circ \alpha = \alpha$. Da $h = pt$ schreiben wir auch $\Delta_{\mathbb{P}^1} = (1 \times pt) + (pt \times 1)$. Somit erhalten wir mithilfe der Formel aus Bemerkung 2.3.4 die Darstellung

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = (\mathbb{P}^1, 1 \times pt) \oplus (\mathbb{P}^1, pt \times 1)$$

für das Motiv von \mathbb{P}^1 . Der erste Summand $(\mathbb{P}^1, 1 \times pt)$ ist isomorph zu dem Motiv $\mathcal{M}(pt) = \mathcal{M}(\mathrm{Spec}(K))$, welches wir als $\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}$ definieren. Der zweite Summand $(\mathbb{P}^1, pt \times 1)$ wird mit $\mathbb{Z}(1)$ bezeichnet und heißt *Tate-Motiv* (siehe auch [Man68, §6] und [Vis04, S. 2]). Es gilt also:

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1).$$

Bemerkung 2.4.2. 1. Allgemein sind zwei Paare (X, π) und (Y, ζ) genau dann isomorph, wenn $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{M}_K}((X, \pi), (Y, \zeta))$ und $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{M}_K}((Y, \zeta), (X, \pi))$ existieren, d.h.

$$(X, \pi) \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} (Y, \zeta),$$

2 Schnitt-Theorie

sodass $\alpha \circ \beta = \zeta$ und $\beta \circ \alpha = \pi$.

2. Für den n -dimensionalen projektiven Raum \mathbb{P}^n gilt, dass der Chow-Ring $\text{CH}^*(\mathbb{P}^n)$ ein freier \mathbb{Z} -Modul mit Basis $\{1, h, \dots, h^n\}$ ist, wobei $h^i \in \text{CH}^i(\mathbb{P}^n)$ und $h^{n+1} = 0$. Man erhält also $\text{CH}^*(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$ als Isomorphismus von Ringen [Vis09b, D2, S. 7].

Definition 2.4.3. Das i -fache Produkt

$$\mathbb{Z}(i) := \mathbb{Z}(1) \otimes \mathbb{Z}(1) \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}(1)$$

mit $i \in \mathbb{N}$ heißt *Tate-Motiv*. Wir setzen $\mathbb{Z}(0) := \mathbb{Z} := \mathcal{M}(\text{Spec}(K))$ für das *triviale Tate-Motiv* (vgl. [Vis04, S. 2]).

Bemerkung 2.4.4. Eine klassische, alternative Notation des Tate-Motivs $\mathbb{Z}(1)$, wie sie z.B. bei Manin zu finden ist, ist $L = (\mathbb{P}^1, p_1^{\mathbb{P}^1})$. Das triviale Tate-Motiv wird hier mit $L^0 = \tilde{e}$ bezeichnet, sodass wir $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \tilde{e} \oplus L$ erhalten. Das Tate-Motiv $\mathbb{Z}(i)$ ist dann definiert durch $L^n (= L^{\otimes n})$ (siehe [Man68, S. 455]). Eine weitere Schreibweise ist beispielsweise durch V. Voevodsky gegeben: Hier ist $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{Z}(1)[2]$ und es wird definiert: $\mathbb{Z}(n)[2n] := (\mathbb{Z}(1)[2])^{\otimes n}$ [Vis04, S. 2].

Allgemein gilt:

$$\mathbb{Z}(i) = (\mathbb{P}^n, h^i \times h^{n-i}) \quad (2.15)$$

mit $0 \leq i \leq n$ und die Realisierung des Tate-Motivs $\mathbb{Z}(i)$ ist gleich \mathbb{Z}_i , wobei $\text{CH}_*(\mathbb{P}^n) = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}_i$ und $h^n = pt$. Für $\text{CH}_*(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}_0 \oplus \mathbb{Z}_1$ ist, wie wir gezeigt haben, $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}(0) \oplus \mathbb{Z}(1)$. Die Realisierung ordnet also tatsächlich dem Motiv $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ die Chow-Gruppen $\text{CH}_0(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}_0$ und $\text{CH}_1(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}_1$ zu.

Beispiel 2.4.5. Für den 2-dimensionalen projektiven Raum \mathbb{P}^2 haben wir wie in Beispiel 2.4.1 den Chow-Ring $\text{CH}_*(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z} 1 \oplus \mathbb{Z} h \oplus \mathbb{Z} h^2$. Die Berechnung der Diagonale ergibt $\Delta_{\mathbb{P}^2} = 1 \times h^2 + h \times h + h^2 \times 1$. Dies steht in Übereinstimmung mit den Tate-Motiven $\mathbb{Z}(0) = (\mathbb{P}^2, 1 \times h^2)$, $\mathbb{Z}(1) = (\mathbb{P}^2, h \times h)$ und $\mathbb{Z}(2) = (\mathbb{P}^2, h^2 \times 1)$, die wir aus obiger Formel 2.15 erhalten. Demnach ist das Motiv von \mathbb{P}^2 gegeben durch

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1) \oplus \mathbb{Z}(2).$$

Dieses Resultat lässt sich zu der Aussage

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^n) = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}(i)$$

verallgemeinern (siehe auch Beispiel 2.4.9 oder [Man68, S. 455]).

Satz 2.4.6. Sei X eine glatte, projektive Varietät über K . Dann enthält das Motiv $\mathcal{M}(X)$ genau dann das triviale Tate-Motiv \mathbb{Z} als direkten Summanden, wenn X einen 0-Zykel α vom Grad $\deg(\alpha) = 1$ besitzt.

Beweis. Sei zunächst α ein 0-Zykel mit $\deg(\alpha) = 1$ auf X , d.h. $\alpha \in \text{CH}_0(X)$. Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{Z} = \mathcal{M}(pt) = (pt, \Delta_{pt})$ isomorph zu einem Summanden (X, π) mit $\pi \in \text{CH}_{\dim(X)}(X \times X)$ aus $\mathcal{M}(X)$ ist. Nach Bemerkung 2.4.2 benötigen wir also $f \in \text{Mor}_{\mathcal{M}_K}((pt, \Delta_{pt}), (X, \pi))$ und $g \in \text{Mor}_{\mathcal{M}_K}((X, \pi), (pt, \Delta_{pt}))$ mit $f \circ g = \pi$ und $g \circ f = \Delta_{pt}$. Wähle vorher noch $\pi = (1_X \times \alpha) \in \text{CH}_{\dim(X)}(X \times X)$, dann ist π tatsächlich ein Projektor: Nach Lemma 2.3.5 und wegen $\deg(\alpha) = 1$ gilt, dass

$$(1_X \times \alpha) \circ (1_X \times \alpha) = \deg(\alpha) \cdot (1_X \times \alpha) = (1_X \times \alpha).$$

Wir nehmen nun $f = (1_{pt} \times \alpha) \in \pi \circ \text{CH}_0(pt \times X)$ und $g = (1_X \times 1_{pt}) \in \text{CH}^0(X \times pt)$. Dann haben wir einerseits

$$g \circ f = (1_X \times 1_{pt}) \circ (1_{pt} \times \alpha) = \deg(\alpha) \cdot (1_{pt} \times 1_{pt}) = \Delta_{pt}$$

und andererseits

$$f \circ g = (1_{pt} \times \alpha) \circ (1_X \times 1_{pt}) = \deg(1_{pt}) \cdot (1_X \times \alpha) = (1_X \times \alpha) = \pi.$$

Somit gilt $\mathbb{Z} \simeq (X, \pi)$ und die Behauptung ist gezeigt.

Sei nun andersherum $\mathbb{Z} \simeq (X, \pi)$ für ein $\pi \in \text{CH}_{\dim(X)}(X \times X)$ vorausgesetzt. Es existieren also $f \in \text{CH}_0(X) \simeq \text{CH}_0(pt \times X)$ und $g \in \text{CH}^0(X) \simeq \text{CH}^0(X \times pt)$ mit $g \circ f = \Delta_{pt} = 1_{pt} \times 1_{pt}$. Allgemein gilt $\text{CH}_0(X) \xrightarrow{\sim} \text{CH}_0(pt \times X)$ mit $\alpha \mapsto 1_{pt} \times \alpha$ und $\text{CH}_0(X) \xrightarrow{\sim} \text{CH}_0(X \times pt)$ mit $\alpha \mapsto \alpha \times 1_{pt}$. Durch diese Identifizierung erhalten wir $f \simeq 1_{pt} \times f$ und $g \simeq g \times 1_{pt}$ sowie

$$\begin{aligned} g \circ f &\simeq (g \times 1_{pt}) \circ (1_{pt} \times f) \\ &= \deg(fg) \cdot (1_{pt} \times 1_{pt}). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung muss $\deg(fg) = 1$ gelten und damit ist fg ein 0-Zykel auf X vom Grad 1. \square

Bemerkung 2.4.7. 1. Falls die Varietät X aus Satz 2.4.6 einen rationalen Punkt besitzt, so ist klar, dass X einen 0-Zykel von Grad 1 hat. Eine Quadrik X_q besitzt genau dann einen rationalen Punkt, wenn X_q isotrop (d.h. q isotrop) ist. Außerdem ist für eine Quadrik die Gradabbildung $\deg : \text{CH}_0(X_q) \rightarrow \mathbb{Z}$ injektiv und es gilt für dessen Bild

$$\deg(\text{CH}_0(X_q)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } X \text{ isotrop ist,} \\ 2\mathbb{Z}, & \text{falls } X \text{ anisotrop ist,} \end{cases}$$

siehe [EKM08, Cor. 71.3, 71.4] und [Ros98, Lem. 5]. Daher gilt für eine glatte projektive Quadrik X_q nach Satz 2.4.6: Das Motiv $\mathcal{M}(X_q)$ enthält genau dann \mathbb{Z} als direkten Summanden, falls X_q einen rationalen Punkt hat. Im Allgemeinen folgt aus der Existenz eines 0-Zykels von Grad 1 auf der Varietät X *nicht* die Existenz eines rationalen Punktes.

2 Schnitt-Theorie

2. Nach derselben Methode wie im ersten Teil des Beweises von Satz 2.4.6 lässt sich die Isomorphie $\mathcal{M}(pt) \simeq (\mathbb{P}^1, 1 \times pt)$ zeigen.

2.4.2 Tate-Twist

Ist $\mathcal{M}(X)$ das Motiv von X , so bezeichnet

$$\mathcal{M}(X)(i) := \mathcal{M}(X) \otimes \mathbb{Z}(i)$$

den *Tate-Twist* von $\mathcal{M}(X)$ (siehe auch [Man68, §8]). Genauso sei für ein beliebiges Objekt $N = (X, \pi)$ der Tate-Twist durch $N(i) = N \otimes \mathbb{Z}(i)$ gegeben. Schließlich setzen wir

$$\text{Mor}_{\mathcal{M}_K}((X, \pi)(m), (Y, \zeta)(l)) := \zeta \circ \text{CH}_{\dim(X)+m-l}(X \times Y) \circ \pi.$$

Des Weiteren gilt unabhängig von dem Körper K für die Morphismengruppe

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}_K}(\mathbb{Z}(n), \mathbb{Z}(m)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{falls } n = m, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(siehe [CGM05, §7]).

2.4.3 Theorem über die Dekomposition eines Motivs

Das sehr nützliche Theorem 2.2.10 über die Dekomposition der Chow-Gruppe bei gegebener Filtration der glatten, projektiven Varietät X lässt sich in ähnlicher Weise auch für Motive formulieren (siehe hierzu [Kar01, Thm. 6.5, Cor. 6.11] oder auch [CGM05, Thm. 7.2]):

Theorem 2.4.8 (Dekomposition eines Motivs). *Sei X eine relativ zelluläre Varietät über K mit der Filtration $X = X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_n \supset \emptyset$ von abgeschlossenen Untervarietäten. Mit r_i sei die relative Dimension der affinen Faserung $E_i = X_i \setminus X_{i+1}$ über der glatten, projektiven Varietät Y_i bezeichnet. Dann gilt:*

$$\mathcal{M}(X) \simeq \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{M}(Y_i)(r_i). \quad (2.16)$$

Beispiel 2.4.9. 1. Sei $X = \mathbb{P}^n$ der n -dimensionale projektive Raum mit der Filtrierung wie in 2.2.11, d.h. $Y_i = \text{Spec}(K) = pt$ und $r_i = n - i$. Dann gilt nach obigem Theorem die Formel

$$\mathcal{M}(\mathbb{P}^n) \simeq \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{M}(pt)(r_i) = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}(i).$$

2. Sei Q eine hyperbolische Quadrik der geraden Dimension $2n$ mit der Filtration

wie in Beispiel 1.3.6, $X_0 = Q \supset X_1 \supset X_2 = \emptyset$, wobei

$$X_1 = \{[x_0 : y_0 : \dots : x_n : y_n] \in \mathbb{P}^{2n+1} \mid x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0\}.$$

In Beispiel 2.2.11 haben wir bereits gesehen, dass der Chow-Ring dieser Quadrik eine direkte Summe von $2n + 1$ Kopien von \mathbb{Z} ist, da $\text{CH}^l(Q) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, falls $l = n$, und ansonsten $\text{CH}^l(Q) = \mathbb{Z}$ gilt. Bei dem Motiv von Q verhält es sich nun ähnlich. Nach der Formel 2.16 aus dem Theorem erhalten wir wegen $Y_0 = Y_1 = \mathbb{P}^n$ und $r_0 = n$, $r_1 = 0$:

$$\mathcal{M}(Q) \simeq \mathcal{M}(\mathbb{P}^n)(n) \oplus \mathcal{M}(\mathbb{P}^n)(0).$$

Bei dem zweiten Summanden $\mathcal{M}(\mathbb{P}^n)(0)$ handelt es sich um das Motiv von \mathbb{P}^n , also $\mathcal{M}(\mathbb{P}^n) = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}(i)$. Der erste hingegen lässt sich schreiben als $\mathcal{M}(\mathbb{P}^n) \otimes \mathbb{Z}(n) = (\bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}(i)) \otimes \mathbb{Z}(n) = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{Z}(i+n)$. Wir erhalten somit insgesamt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(Q) &\simeq \mathbb{Z}(0) \oplus \mathbb{Z}(1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(n) \oplus \mathbb{Z}(n) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(2n-1) \oplus \mathbb{Z}(2n) \\ &\simeq \bigoplus_{i=0}^{2n} \mathbb{Z}(i) \oplus \mathbb{Z}(n). \end{aligned}$$

3. Für eine zerfallende Quadrik ungerader Dimension lässt sich zeigen, dass ihr Motiv mit jenem des projektiven Raums derselben Dimension übereinstimmt (siehe auch [Ros98] und [Vis04]).
4. *Rost-Filtrierung*: Sei Q wieder jene Quadrik der Dimension $n - 1$ aus Beispiel 1.3.6 mit isotroper quadratischer Form $q(x_0, \dots, x_n) = x_0 y_0 + q'(x_2, \dots, x_n)$ und der Rost-Filtrierung

$$X_0 = Q \supset X_1 = \{[x_0 : \dots : x_1] \in Q \mid x_0 = 0\} \supset X_2 = \{[0 : 1 : 0 : \dots : 0]\} \supset \emptyset.$$

Es ergeben sich Faserungen mit den Basen $Y_0 = pt$,

$$Y_1 = Q' = \{[x_2 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid q'(x_2, \dots, x_n) = 0\}$$

und $Y_2 = pt$ und den relativen Dimensionen $r_0 = n - 1$, $r_1 = 1$ und $r_2 = 0$. Schließlich folgt nach Anwendung des Theorems

$$\mathcal{M}(Q) = \mathcal{M}(pt)(n-1) \oplus \mathcal{M}(Q')(1) \oplus \mathcal{M}(pt)(0).$$

Wegen $\text{Spec}(K) = pt$ haben wir an erster und an letzter Stelle die Tate-Motive $\mathbb{Z}(n-1)$ und $\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}$, also

$$\mathcal{M}(Q) = \mathbb{Z}(n-1) \oplus \mathcal{M}(Q')(1) \oplus \mathbb{Z}.$$

2 Schnitt-Theorie

Wieder gilt, dass auf dieselbe Weise weiterverfahren werden kann, sofern Q' ebenfalls eine isotrope Quadrik ist. Siehe zu diesem Beispiel auch die allgemeine Proposition von M. Rost für isotrope Quadriken, [Ros98, Prop. 2].

3 Anwendungen von Chow-Motiven

Dieses letzte Kapitel behandelt einige Anwendungen von Chow-Motiven. Hierzu wird zu Beginn in Abschnitt 3.1 in die Theorie der quadratischen Formen eingeführt. Speziell die Begriffe der (An-)Isotropie und des fundamentalen Ideals IK sowie die höheren Witt-Indizes als auch die Zerfallsstruktur einer quadratischen Form werden im Folgenden benötigt werden.

Auf Grundlage des Theorems 3.2.15 über binäre Motive und von sogenannten *Shells* wird dann in Abschnitt 3.2 in mehreren Schritten gezeigt, dass in I^3K keine anisotropen quadratischen Formen der Dimension 10 existieren. Vishik's Gap Theorem 3.2.30 fasst die Lücken in der Folge möglicher Dimensionen von anisotropen Formen in I^nK allgemein zusammen.

Abschließen möchten wir diese Arbeit in Abschnitt 3.3 mit einem Überblick über weitere Anwendungsbeispiele wie den allgemeinen Beweis der Bloch-Kato-Vermutung.

3.1 Einführung in die Theorie der quadratischen Formen

In diesem Abschnitt, dem als Hauptquellen [EKM08], [Lam05] und [Kah09] dienen, sei K stets ein Körper von Charakteristik ungleich 2. Wir beginnen mit ersten Grundlagen und elementaren Eigenschaften einer quadratischen Form über K .

3.1.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Eine (n -fache) *quadratische Form* über einer Körper K ist ein homogenes Polynom q von Grad 2 in n Variablen x_1, \dots, x_n über K . Die allgemeine Form ist:

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j \in K[x_1, \dots, x_n].$$

Durch das Setzen von $a'_{ij} := \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ erhalten wir symmetrische Koeffizienten und können mit der durch q eindeutig festgelegten symmetrischen $(n \times n)$ -Matrix $M_q = (a'_{ij})$ die Schreibweise

$$q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot M_q \cdot (x_1, \dots, x_n)^T$$

3 Anwendungen von Chow-Motiven

verwenden.

Die Abbildung $\phi_q : K^n \rightarrow K$, welche ein Tupel $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ auf die Form $x \cdot M_q \cdot x^T \in K$ abbildet, heißt *quadratische Abbildung*. Die quadratische Abbildung legt die quadratische Form q eindeutig fest und besitzt folgende Eigenschaften:

1. $\phi_q(ax) = a^2\phi_q(x)$ für alle $x \in K^n$ und $a \in K$.
2. Die Abbildung $B_q : K^n \times K^n \rightarrow K$, definiert durch

$$B_q(x, y) := \frac{1}{2}(\phi_q(x + y) - \phi_q(x) - \phi_q(y)),$$

ist eine symmetrische Bilinearform.

Bei gegebener Bilinearform B_q erhält man die quadratische Abbildung ϕ_q durch $\phi_q(x) = B_q(x, x)$ (für alle $x \in K^n$).

Sei nun V ein beliebiger endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $B : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform auf V . Dann nennen wir das Paar (V, B) einen *quadratischen Raum*, mit welchem die quadratische Form $q = q_B : V \rightarrow K$, gegeben durch $q(x) = B(x, x)$ ($x \in V$), einhergeht. Daher ist auch die Schreibweise (V, q) , wie beispielsweise bei [Kah09], üblich. Falls bei gegebenem $x \in V$ gilt, dass aus $B(x, y) = 0$ (für alle $y \in V$) folgt, dass $x = 0$ ist, so heißt der quadratische Raum *regulär* (oder *nichtsingulär*) bzw. q_B eine *nichtsinguläre* quadratische Form. Diese Definition ist äquivalent zu der Aussage, dass die Matrix M_q regulär ist. Wir möchten außerdem bemerken, dass der quadratische Raum (V, B) eindeutig eine Äquivalenzklasse von quadratischen Formen bestimmt ($q \simeq q' \Leftrightarrow M_q = C^T M_{q'} C$).

Seien (V_1, B_1) und (V_2, B_2) zwei quadratische Räume. Dann bilden wir den Raum (V, B) aus $V = V_1 \oplus V_2$ und $B : V \times V \rightarrow K$ mit

$$B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = B_1(x_1, y_1) + B_2(x_2, y_2).$$

Da B ebenfalls symmetrisch und bilinear ist, handelt es sich bei (V, B) wiederum um einen quadratischen Raum. Es gilt $B(V_1, V_2) = 0$ und $B|_{(V_i \times V_i)} = B_i$ für $i = 1, 2$. Der Raum (V, B) wird auch als $V_1 \perp V_2$ geschrieben und heißt *orthogonale Summe* von (V_1, B_1) und (V_2, B_2) . Für die quadratische Form q_B gilt dann

$$q_B(x_1, x_2) = q_{B_1}(x_1) + q_{B_2}(x_2).$$

3.1.2 Diagonalform

Nun bezeichnen wir mit $\langle d \rangle$ die Isometrieklasse des eindimensionalen Raums, der mit der quadratischen Form dx^2 korrespondiert.

Lemma 3.1.1. *Sei (V, B) ein quadratischer Raum über K . Dann existieren d_1, \dots, d_n aus K , sodass $V \simeq \langle d_1 \rangle \perp \dots \perp \langle d_n \rangle$. Insbesondere ist jede n -fache quadratische Form äquivalent zu einer Diagonalform, d.h. $d_1x_1^2 + \dots + d_nx_n^2$.*

3.1 Einführung in die Theorie der quadratischen Formen

Beweis. Siehe [Lam05, S. 7, Cor. 2.4]. \square

Die Diagonalform $\langle d_1 \rangle \perp \dots \perp \langle d_n \rangle$ wird abgekürzt mit $\langle d_1, \dots, d_n \rangle$ und die n -fache Form $\langle d, \dots, d \rangle$ kurz $n\langle d \rangle$ geschrieben. Die orthogonale Summe zweier Diagonalformen ist $\langle a_1, \dots, a_m \rangle \perp \langle b_1, \dots, b_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \rangle$.

Es existiert neben der orthogonalen Summe eine weitere Operation auf quadratischen Räumen, das Tensorprodukt (siehe [Kah09, S. 3 f.]): Seien wiederum (V_1, B_1) und (V_2, B_2) zwei quadratische Räume. Dann haben wir

$$(V_1, B_1) \otimes (V_2, B_2) = (V_1 \otimes V_2, B_1 \otimes B_2),$$

wobei $(B_1 \otimes B_2)(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = B_1(x_1, y_1) \cdot B_2(x_2, y_2)$. Das Tensorprodukt zweier Diagonalformen lautet dann

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle \otimes \langle b_1, \dots, b_n \rangle = \langle a_1 b_1, \dots, a_1 b_n, a_2 b_1, \dots, a_2 b_n, \dots, a_m b_1, \dots, a_m b_n \rangle.$$

Sei n die Dimension von V , dann definieren wir auch $\dim(q_B) = n$. Für $q_1 \simeq \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ und $q_2 \simeq \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ erhalten wir demnach:

$$\begin{aligned} \dim(q_1 \perp q_2) &= \dim(q_1) + \dim(q_2), \\ \dim(q_1 \otimes q_2) &= \dim(q_1) \cdot \dim(q_2). \end{aligned}$$

3.1.3 Isotropie und hyperbolische Ebene \mathbb{H}

Es folgt die Definition eines weiteren wichtigen Begriffs zur Charakterisierung von quadratischen Formen, nämlich die der *(An-)Isotropie*.

Definition 3.1.2. Sei (V, B) ein quadratischer Raum über K und q die quadratische Form $q(x) = B(x, x)$. Ein Vektor $v \in V$ heißt *anisotrop*, falls $q(v) \neq 0$, und *isotrop*, falls $v \neq 0$ und $q(v) = 0$. Wir nennen q *anisotrop*, falls V keine isotropen Vektoren enthält, und *isotrop* andernfalls.

Ein wichtiger quadratischer Raum ist die *hyperbolische Ebene* \mathbb{H} :

Definition 3.1.3. Der 2-dimensionale Raum (V, B) mit $B(x, y) = xy$ heißt *hyperbolische Ebene* und wird mit \mathbb{H} bezeichnet. Die orthogonale Summe von hyperbolischen Ebenen heißt *hyperbolischer Raum*.

Es gelten folgende Eigenschaften für \mathbb{H} , vgl. [Kah09, Lem. 1.2.8]:

1. Für alle $a \in K^\times$ gilt $\mathbb{H} \simeq \langle a, -a \rangle$. Zuweilen wird $\mathbb{H} \simeq \langle 1, -1 \rangle$ auch als Definition verwendet, siehe [Lam05, S. 9 f.].
2. Jeder 2-dimensionale isotrope quadratische Raum ist isometrisch zu \mathbb{H} .

Lemma 3.1.4. *Sei (V, B) ein regulärer quadratischer Raum. Dann gilt: V ist genau dann isotrop, wenn V eine hyperbolische Ebene als orthogonalen Summanden enthält.*

3 Anwendungen von Chow-Motiven

Beweis. Siehe [Lam05, S. 10, Thm. 3.4(2)] □

Diesem Lemma entsprechend ist die quadratische Form q genau dann isotrop, wenn $q \simeq \mathbb{H} \perp q'$.

Definition 3.1.5. Wir nennen eine Form h *hyperbolisch*, falls

$$h \simeq m\mathbb{H} = \mathbb{H} \perp \dots \perp \mathbb{H}$$

für ein geeignetes m .

3.1.4 Theoreme von Witt und Witt-Index

Es folgen zwei Resultate von E. Witt, zuerst der Kürzungssatz (engl. *Witt's cancellation theorem*) und im Anschluss der Satz über die Witt-Zerlegung (*Witt's decomposition theorem*).

Theorem 3.1.6 (Kürzungssatz von Witt). *Seien q, q_1 und q_2 drei quadratische Formen über K . Falls $q \perp q_1 \simeq q \perp q_2$, so gilt $q_1 \simeq q_2$.*

Beweis. Siehe z.B. [Kah09, Thm. 1.2.5] oder [Lam05, S. 12, Thm. 4.2]. □

Theorem 3.1.7 (Witt-Zerlegung). *Jede quadratische Form q lässt sich eindeutig in eine direkte orthogonale Summe $q \simeq h \perp q_{an}$ zerlegen, wobei h hyperbolisch und q_{an} anisotrop ist. Der Summand q_{an} heißt anisotroper Teil von q .*

Beweis. Siehe z.B. [Kah09, Thm. 1.2.9]. □

Kommen wir nun zu der Definition einer Größe, welche für spätere Untersuchungen von zentraler Bedeutung sein wird.

Definition 3.1.8. Sei $q \simeq h \perp q_{an}$ eine quadratische Form über K mit $h \simeq m\mathbb{H}$. Dann heißt $\mathfrak{w}(q) = m$ der *Witt-Index* von q .

Korollar 3.1.9. *Mit obiger Bezeichnung gilt:*

$$0 \leq \mathfrak{w}(q) \leq \frac{\dim(q)}{2}.$$

Die quadratische Form q ist zudem genau dann hyperbolisch, wenn $\mathfrak{w}(q) = \frac{\dim(q)}{2}$ gilt.

3.1.5 Witt-Ring und fundamentales Ideal

Wir möchten nun den sogenannten *Witt-Ring* konstruieren. Hierfür definieren wir zunächst den *Witt-Grothendieck-Ring* wie in [Kah09, S. 7]:

3.1 Einführung in die Theorie der quadratischen Formen

Definition 3.1.10. Der Grothendieck-Ring der Isometrieklassen von quadratischen Formen über K mit der durch \perp und \otimes induzierten Addition und Multiplikation heißt *Witt-Grothendieck-Ring* von K und wird mit $\text{GW}(K)$ oder $\widehat{W}(K)$ bezeichnet.

Der Witt-Grothendieck-Ring enthält das Ideal $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{H}$, welches aus allen hyperbolischen Räumen und ihren additiven Inversen besteht. Durch Quotientenbildung erhalten wir den Witt-Ring, siehe auch [Lam05, S. 27 ff.]:

Definition 3.1.11. Der Faktorring $W(K) := \widehat{W}(K)/\mathbb{Z} \cdot \mathbb{H}$ heißt *Witt-Ring* von K .

Bemerkung 3.1.12 ([Lam05], S. 28 f.). 1. Da im Witt-Ring die hyperbolische Ebene \mathbb{H} das Nullelement repräsentiert, gilt $-\langle a \rangle = \langle -a \rangle$ für alle $a \in K^\times$.

2. Zwei (nichtsinguläre) quadratische Formen q und q' repräsentieren genau dann dasselbe Element im Witt-Ring, falls sie *Witt-äquivalent* sind. Dies trifft laut Definition genau dann zu, wenn $q_{an} \simeq q'_{an}$.
3. Die Dimensionsabbildung $\dim : \widehat{W}(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ induziert den Epimorphismus

$$\widehat{W}(K)/\mathbb{Z} \cdot \mathbb{H} = W(K) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

welcher auch mit \dim_0 bezeichnet wird. Der Kern $\ker(\dim_0)$ dieser Abbildung heißt *fundamentales Ideal* von $W(K)$ und erhält die Notation I oder IK . Wir stellen fest, dass eine quadratische Form genau dann ein Element in dem fundamentalen Ideal $IK \subset W(K)$ repräsentiert, wenn ihre Dimension gerade ist. Zudem gilt:

$$W(K)/IK \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Der Kern des Ringhomomorphismus \dim heißt entsprechend *fundamentales Ideal* von $\widehat{W}(K)$ und wird mit \widehat{I} oder \widehat{IK} bezeichnet. Mit diesem gilt:

$$\widehat{W}(K)/\widehat{IK} \simeq \mathbb{Z}.$$

Die natürliche Projektion $\widehat{W}(K) \rightarrow W(K)$ induziert einen Isomorphismus $\widehat{IK} \simeq IK$.

Lemma 3.1.13. 1. Das Ideal IK wird von den Formen $\langle 1, -a \rangle$ mit $a \in K^\times$ erzeugt.

2. Die n -te Potenz $I^n K := (IK)^n$ wird von den n -fachen Tensorprodukten

$$\langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_n \rangle =: \langle \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rangle$$

mit $a_i \in K^\times$ erzeugt. Eine Form dieses Typs wird auch n -fache Pfister-Form genannt und besitzt die Dimension 2^n .

Beweis. Siehe [Kah09, Lem. 2.1.1]. □

3 Anwendungen von Chow-Motiven

Bemerkung 3.1.14. Bei [Lam05, S. 315 ff.] beispielsweise wird eine n -fache Pfister-Form definiert durch

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle := \bigotimes_{i=1}^n \langle 1, a_i \rangle.$$

Da die Notation nicht eindeutig ist und daher dem Autor entsprechender Literatur über quadratische Formen überlassen wird, ist die verwendete Definition stets vom Leser zu überprüfen.

Eine grundlegende Eigenschaft der Pfister-Formen ist die folgende.

Theorem 3.1.15. *Ist eine Pfister-Form q isotrop, dann ist sie hyperbolisch.*

Beweis. Siehe z.B. [Lam05, S. 319, Thm. 1.7]. □

Zurück zum Thema Witt-Ring möchten wir nun noch einige berühmte Isomorphismen präsentieren.

Beispiel 3.1.16. Neben dem Isomorphismus $W(K)/IK \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gibt es eine Reihe weiterer Bijektionen das Fundamentalideal betreffend: Zunächst wird durch die *Diskriminante* d einer quadratischen Form q der Isomorphismus

$$IK/I^2K \xrightarrow{\sim} K^\times/K^{\times 2}$$

induziert. Ein Theorem von A. Merkurjev [Mer81] besagt, dass auch der Homomorphismus

$$I^2K/I^3K \xrightarrow{\sim} {}_2\text{Br}(K)$$

ein Isomorphismus ist, wobei ${}_2\text{Br}(K)$ die Untergruppe aller Klassen $[A]$ aus der Brauergruppe $\text{Br}(K)$ mit $[A]^2 = 1$ ist, siehe [EKM08, S. 388] und [Kah09, S. 78]. Bezeichne nun mit $H^n(K, \mathbb{Z}/2)$ die Galois-Kohomologie. Dann ist

$$I^nK/I^{n+1}K \xrightarrow{\sim} H^n(K, \mathbb{Z}/2)$$

ebenfalls ein Isomorphismus. Dies wurde beispielsweise von J. Milnor gezeigt, siehe hierzu auch [Kah09, S. 109 ff.].

3.1.6 Funktionskörper

Sei (V, B) ein quadratischer Raum der Dimension $n \geq 3$. Dann wird durch die Gleichung $B(x, x) = q(x) = 0$ wegen der Homogenität von q eine irreduzible projektive Hyperfläche der Dimension $n - 2$ in $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_K^{n-1}$ definiert. Wir möchten nun den Funktionskörper $K(Q) = K(q)$ dieser entstandenen projektiven Quadrik Q untersuchen. Für einen Skalar $a \in K^\times$ gilt zunächst $K(aq) = K(q)$ und falls $q \simeq q'$, so gilt auch $K(q) = K(q')$.

Falls q eine quadratische Form ist mit $q = \langle 1 \rangle \perp -q'$, so ist das Polynom $1 - q'(x_2, \dots, x_n)$ nach einer Proposition aus [Kah09, Prop. 1.1.14] irreduzibel. Daher ist der Restklassenring $R = K[x_2, \dots, x_n]/(1 - q'(x_2, \dots, x_n))$ ein Integritätsring und der Funktionskörper von q ist $K(q) = \text{Quot}(R)$.

3.1 Einführung in die Theorie der quadratischen Formen

Falls $q = \langle 1, -a \rangle \perp q''$ mit $\dim q'' = n - 2$, so gilt

$$K(q) = K(x_3, \dots, x_n)[\sqrt{a + q''(x_3, \dots, x_n)}];$$

der Funktionenkörper $K(q)$ ist also eine quadratische Körpererweiterung von $K(x_3, \dots, x_n)$.

Nun möchten wir noch auf den Fall $n = 2$ zu sprechen kommen. Die “Quadrik” Q ist hier von der Dimension 0. Falls $q = \langle 1, -a \rangle$, so ist Q genau dann irreduzibel, falls $a \notin K^{\times 2}$ und folglich $K(q) = K(\sqrt{a})$. Falls jedoch $a \in K^{\times 2}$, so ist $q \simeq \mathbb{H}$ und $K(q) = K \times K$, siehe hierzu [Kah09, S. 29].

Lemma 3.1.17. 1. Die quadratische Form q über ihrem Funktionenkörper, geschrieben $q_{K(q)}$, ist isotrop.

2. Die Erweiterung $K(q)/K$ ist genau dann transzendent, wenn q isotrop ist.

Beweis. Siehe [Kah09, Prop. 3.1.1]. □

3.1.7 Höhere Witt-Indizes und Zerfällungsstruktur

Sei q eine quadratische Form über K . Wir konstruieren einen Körperturm

$$K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_h$$

und quadratische Formen q_r über K_r für $0 \leq r \leq h$ folgendermaßen analog zu [Kne76, Intro.] und [Kah09, S. 35 ff.]: Nehme $K_0 := K$ und $q_0 := q_{an}$ als Start und setze $K_r := K_{r-1}(q_{r-1})$ und $q_r := (q_{r-1})_{an}$ für $r > 0$ bis bei K_h die quadratische Form q_h von der Dimension ≤ 1 ist. Die Form q_r wird als r -te (*anisotrope*) *Kern-Form* (engl. *r-th (anisotropic) kernel form*) von q und der entstandene Körperturm als *generischer Zerfällungsturm* (*generic splitting tower*) von q bezeichnet. Die natürliche Zahl h heißt *Höhe* von q und wird $\mathfrak{h}(q)$ geschrieben. Sie ist genau dann gleich Null, wenn $\dim q_{an} \leq 1$.

Sei $h = \mathfrak{h}(q)$ und wir setzen $\mathfrak{i}_0(q) := \mathfrak{w}(q)$. Dann ist für alle $1 < r \leq h$ der r -te *Witt-Index* $\mathfrak{i}_r(q)$ von q definiert als der Witt-Index $\mathfrak{w}(q_{r-1})_{K_r}$. Die Folge der Witt-Indizes $\mathfrak{i}(q) := (\mathfrak{i}_1(q), \dots, \mathfrak{i}_h(q))$ heißt (*relative*) *Zerfällungsstruktur* (*splitting pattern*) von q und es gilt

$$1 \leq \mathfrak{i}_1(q) < \mathfrak{i}_2(q) < \dots < \mathfrak{i}_h(q).$$

Wir können ebenfalls die *absolute Zerfällungsstruktur* wie z.B. in [EKM08, S. 103 f.] definieren als $\mathfrak{j}(q) = (\mathfrak{j}_1, \dots, \mathfrak{j}_h) := (\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2, \dots, \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2 + \dots + \mathfrak{i}_h)$. Für den letzten absoluten Witt-Index von q gilt dann:

$$\mathfrak{j}_h(q) = \sum_{r=1}^h \mathfrak{i}_r(q) = \left\lfloor \frac{1}{2} \dim q \right\rfloor.$$

In [Kah09, Def. 4.1.1] wird nicht die Folge der Witt-Indizes, sondern die Folge der Dimensionen $(\dim q_0, \dots, \dim q_h)$ als Zerfällungsstruktur von q bezeichnet und es

3 Anwendungen von Chow-Motiven

gilt definitionsgemäß

$$\dim q \geq \dim q_0 > \dim q_1 > \dots > \dim q_h \geq 0.$$

Beispielsweise haben wir für den ersten Witt-Index von q zunächst $K_1 = K(q_{an})$ und somit $i_1(q) = w(q_{an_{K(q_{an})}})$.

Schließlich definieren wir den Witt-Index einer Quadrik $Q = X_q$ als den Witt-Index ihrer zugrundeliegenden quadratischen Form q .

Folgendes Resultat ist von M. Knebusch [Kne76, S. 78 ff.], welcher die Theorie über die Zerfällung von quadratischen Formen entwickelte.

Satz 3.1.18 (Knebusch). *Sei q eine quadratische Form über K und L/K eine beliebige Körpererweiterung. Dann gilt für den Witt-Index von q_L*

$$w(q_L) = j_r(q) \tag{3.1}$$

für ein $r \in \{1, \dots, h\}$.

Für die Bestimmung der Zerfällungsstruktur ist auch das folgende Theorem sehr nützlich.

Theorem 3.1.19. *Sei q eine anisotrope quadratische Form und $\dim q = 2^n + m$ mit $n \geq 0$ und $1 \leq m \leq 2^n$. Dann ist der erste Witt-Index $i_1(q) \leq m$ bzw. $\dim q_1 \geq 2^n - m$.*

Beweis. Siehe z.B. [Hof95, Kor. 1]. □

Beispiel 3.1.20. 1. Nach Theorem 3.1.19 gilt für eine anisotrope quadratische Form q mit $\dim q = 2^n + 1$, dass $i_1(q) = 1$.

2. Ist q eine anisotrope $(n + 1)$ -fache Pfister-Form, so ist ihr erster Witt-Index $i_1(q) = 2^n$, da eine isotrope Pfister-Form nach Theorem 3.1.15 immer hyperbolisch ist. Demnach ist $i(q) = (2^n)$ die komplette Zerfällungsstruktur.

3. Sei q eine anisotrope Form mit $\dim q = 5$. Dann erhalten wir für ihre Zerfällungsstruktur automatisch $i(q) = (1, 1)$.

4. Sei q eine anisotrope 6-dimensionale quadratische Form. Dann ist nach Theorem 3.1.19 der erste Witt-Index $i_1(q) \leq 2$. Die verschiedenen möglichen Zerfällungsstrukturen sind $(2, 1)$, $(1, 2)$ und $(1, 1, 1)$. Siehe hierzu und zu weiteren Zerfällungsstrukturen [Vis04] oder [Hof98b].

3.2 Quadratische Formen der Dimension 10 in I^3K

Sei K weiterhin ein Körper mit $\text{char } K \neq 2$. Sei $W(K)$ der Witt-Ring über K und $IK \subset W(K)$ das fundamentale Ideal. Dann wird durch IK eine multiplikative Filtration erzeugt:

$$W(K) \supset IK \supset I^2K \supset \dots \supset I^nK \supset \dots$$

Ein berühmtes Resultat über die Beschreibung der quadratischen Formen in I^nK ist der Hauptsatz von Arason und Pfister:

Hauptsatz 3.2.1 (Arason-Pfister). *Sei q eine anisotrope Form in I^nK . Dann gilt:*

1. *Entweder ist $q = 0$ oder $\dim(q) \geq 2^n$.*
2. *Wenn $\dim(q) = 2^n$, so ist q proportional zu einer Pfister-Form.*

Beweis. Siehe z.B. [Sch85, S. 156, Thm. 5.6]. □

Ziel dieses Kapitels ist es, unter Betrachtung von I^3K folgende Aussage mithilfe von Motiven zu beweisen:

Behauptung 3.2.2. *In I^3K existieren keine anisotropen quadratischen Formen der Dimension 10.*

Diese Behauptung lässt sich auch durch folgenden Satz ausdrücken:

Satz 3.2.3. *Sei q eine 10-dimensionale quadratische Form über K , welche in I^3K liegt. Dann ist q isotrop.*

Dieser Satz wurde bereits 1966 von A. Pfister elementar bewiesen, siehe [Pfi66, Satz 14]. A. Vishik hat 2004 gezeigt, dass es für Formen in I^nK neben jener aus dem Hauptsatz sogar weitere allgemeine Einschränkungen der Dimension gibt.

Theorem 3.2.4 (Vishik, [Vis04], Thm. 5.4). *Sei q eine anisotrope Form in I^nK . Dann ist die Dimension $\dim(q)$ von q entweder 0, 2^n oder $\geq 2^n + 2^{n-1}$.*

Dies wurde zunächst in [Vis00] für $\text{char } K = 0$ bewiesen. Dank neuer Resultate von V. Voevodsky [Voe01] konnte diese Restriktion jedoch aufgehoben werden.

Wesentlich für unseren Beweis der Behauptung 3.2.2 sind die Zerfallsstruktur einer quadratischen Form aus Abschnitt 3.1, der hiermit zusammenhängende Begriff der *Shells* sowie das Theorem über binäre Motive.

3.2.1 Shells

Wichtiger Bestandteil unseres Beweisverfahrens ist die Wechselwirkung zwischen der Zerfällungsstruktur einer Quadrik und der Struktur von ihrem Motiv. Hierzu definieren wir die sogenannten *Shells* nach A. Vishik [Vis04, S. 55 ff.].

Sei Q eine glatte, projektive Quadrik über K . Dann ist Q über dem algebraischen Abschluss \bar{K} komplett zerfallend und daher zellulär (siehe [Vis11, S. 1]). Daher ist $\mathcal{M}(Q_{\bar{K}})$ wie in Beispiel 2.4.9 eine direkte Summe von Tate-Motiven,

$$\mathcal{M}(Q_{\bar{K}}) = \begin{cases} \bigoplus_{j=0}^{\dim(Q)} \mathbb{Z}(j), & \text{falls } \dim(Q) \text{ ungerade,} \\ \bigoplus_{j=0}^{\dim(Q)} \mathbb{Z}(j) \oplus \mathbb{Z}(\dim(Q)/2), & \text{falls } \dim(Q) \text{ gerade.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Sei $Q = X_q$ anisotrop und $\mathbf{i}(q) = (\mathbf{i}_1(q), \mathbf{i}_2(q), \dots, \mathbf{i}_h(q))$ die Zerfällungsstruktur. Dann teilt diese Struktur unsere Tate-Motive in verschiedene *Shells* auf. Wir sagen dabei, dass $\mathbb{Z}(m)$ zu der *Shell-Nummer* t gehört, falls

$$\sum_{r=1}^{t-1} \mathbf{i}_r(q) \leq \min\{m, \dim(Q) - m\} < \sum_{r=1}^t \mathbf{i}_r(q)$$

gilt. Die nun folgende Proposition ist eine Art Umkehrung der Aussage aus Beispiel 2.4.9 über isotrope Quadriken, durch welche das Motiv der Quadrik auf die zugrundeliegende Form schließen lässt.

Proposition 3.2.5. *Sei q eine quadratische Form, sodass $\mathcal{M}(Q)$ das Tate-Motiv $\mathbb{Z}(m)$ als direkten Summanden enthält, und sei $l := \min\{m, \dim(Q) - m\}$. Dann ist $q = (l + 1) \cdot \mathbb{H} \perp q'$.*

Beweis. Siehe [Vis04, Prop. 2.6]. □

Wir können nun also festhalten: Das Tate-Motiv $\mathbb{Z}(m)$ aus $\mathcal{M}(Q_{\bar{K}})$ gehört genau dann zu Shell-Nummer t , falls $\mathbb{Z}(m)$ zwar ein direkter Summand von $\mathcal{M}(Q_{K_t})$, aber nicht von $\mathcal{M}(Q_{K_{t-1}})$ ist, wobei $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_h$ ein generischer Zerfällungsturm von q ist. Wir haben daher insgesamt $h = \mathfrak{h}(q)$ verschiedene Shells und die Shell-Nummer t besteht aus $2 \cdot \mathbf{i}_t(q)$ Tate-Motiven.

Beispiel 3.2.6. Sei q eine 7-dimensionale anisotrope Form über K mit der Zerfällungsstruktur $\mathbf{i}(q) = (1, 1, 1)$ (diese existiert z.B. nach [Hof98b, Thm. 4.1]). Dann ist das Motiv der 5-dimensionalen Quadrik Q über \bar{K} :

$$\mathcal{M}(Q_{\bar{K}}) = \bigoplus_{i=0}^5 \mathbb{Z}(i).$$

Die Tate-Motive dieser Dekomposition werden nun paarweise auf $\mathfrak{h}(q) = 3$ verschiedene Shells aufgeteilt. Wegen der Bedingung

$$0 \leq \min\{m, 5 - m\} < \mathbf{i}_1(q) = 1$$

3.2 Quadratische Formen der Dimension 10 in I^3K

erhalten wir $m = 0$ oder 5 und damit die Zuweisung von \mathbb{Z} und $\mathbb{Z}(5)$ zu Shell-Nummer 1. Für die zweite Shell-Nummer betrachten wir

$$1 \leq \min\{m, 5 - m\} < i_1(q) + i_2(q) = 2$$

und können folgern, dass die Tate-Motive $\mathbb{Z}(1)$ und $\mathbb{Z}(4)$ zu diesem Shell gehören. Schließlich bleibt nach kurzer Überprüfung die Zuweisung von $\mathbb{Z}(2)$ sowie $\mathbb{Z}(3)$ zu Shell-Nummer 3.

Sei q anisotrop und ein *Pfister-Nachbar* von der Dimension 7. Dies bedeutet allgemein, dass eine Form π existiert, welche proportional zu einer n -fachen Pfister-Form ist und von welcher q eine Unterform ist ($q \subset \pi$) sowie $\dim q > 2^{n-1}$. Konkret ist $q \subset \pi$ und π proportional zu einer 3-fachen Pfister-Form. Dann gilt nach [Hof98b, Thm. 4.1], dass $i(q) = (3)$. Die sechs Tate-Motive $\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{Z}(5)$ gehören also alle zur selben Shell-Nummer 1. Dies ist für alle anisotropen n -fache Pfister-Formen selbstverständlich auch der Fall.

3.2.2 Die Menge der Tate-Motive $\Lambda(Q)$

Wir haben gesehen, dass für eine glatte, projektive Quadrik Q der Dimension n das Motiv $\mathcal{M}(Q_{\overline{K}})$ aus einer direkten Summe von Tate-Motiven besteht. Für $l \neq n/2$ ist der direkte Summand $\mathbb{Z}(l)$ eindeutig bestimmt. Nach einer Wahl von korrespondierenden Projektoren und daraus resultierenden Motiven für den Fall $l = n/2$ lässt sich nach [Vis04, S. 11 ff.] eine Menge von festen Tate-Motiv-Summanden von $Q_{\overline{K}}$ bestimmen, welche mit $\Lambda(Q)$ bezeichnet wird. Dann ist für einen direkten Summanden N von $\mathcal{M}(Q)$ die Menge $\Lambda(N)$ definiert als die Multimenge

$$\Lambda(N) := \{\mathbb{Z}(i), 0 \leq i \leq n, \mathbb{Z}(i) \text{ direkter Summand von } N_{\overline{K}}\}.$$

Die Menge $\Lambda(Q)$ lässt sich nun in einen oberen und einen unteren Teil nach Differenzierung der Projektoren aufteilen. Hierbei erhalten nach A. Vishik die Tate-Motive den Index lo , also $L_{lo} \simeq \mathbb{Z}(i)$, falls $i \in \{l \mid 0 \leq l \leq [n/2]\}$, und den hochgestellten Index up , also $L^{up} \simeq \mathbb{Z}(i)$, falls $(n-i) \in \{n-l \mid 0 \leq l \leq [n/2]\}$. Wir möchten allerdings auf diese Schreibweise verzichten und lediglich im Fall des doppelten Tate-Motivs $\mathbb{Z}(n/2)$ eine Unterscheidung vornehmen. Da wir in nachfolgender Visualisierung die Tate-Motive von links nach rechts lesen, differenzieren wir in $\mathbb{Z}_{li}(i)$ und $\mathbb{Z}_{re}(i)$ für $i = n/2$.

Definition 3.2.7. Sei Q eine nicht-hyperbolische Quadrik. Zwei Tate-Motive $\mathbb{Z}(i), \mathbb{Z}(j) \in \Lambda(Q)$ heißen *miteinander verbunden*, falls für jeden beliebigen direkten Summanden N von $\mathcal{M}(Q)$ gilt:

$$\mathbb{Z}(i) \in \Lambda(N) \Leftrightarrow \mathbb{Z}(j) \in \Lambda(N).$$

Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass ein unzerlegbarer direkter Summand N von $\mathcal{M}(Q)$ existiert, sodass $\mathbb{Z}(i), \mathbb{Z}(j) \in \Lambda(N)$ (siehe hierzu auch [Vis04, Thm. 4.3]).

3 Anwendungen von Chow-Motiven

Hierdurch können wir die Menge der verbundenen Komponenten von $\Lambda(Q)$ mit der Menge der Isomorphieklassen von unzerlegbaren direkten Summanden von $\mathcal{M}(Q)$ identifizieren. Letztere Menge bezeichnen wir mit $Z(Q)$. Dann gilt [Vis04, Kor. 4.4]:

1. $\Lambda(Q) = \coprod_{z \in Z(Q)} \Lambda(N_z)$;
2. $\mathcal{M}(Q) \simeq \bigoplus_{z \in Z(Q)} N_z$,

wobei N_z der jeweils korrespondierende Repräsentant der Isomorphieklasse z sei, d.h. $z = [N_z]$.

Für $\mathbb{Z}(i) \in \Lambda(Q)$ existiert daher eine eindeutige Isomorphieklasse $z \in Z(Q)$ von unzerlegbaren direkten Summanden von $\mathcal{M}(Q)$, sodass für den korrespondierenden Repräsentanten N_z gilt, dass $\mathbb{Z}(i) \in \Lambda(N_z)$. Diese Klasse wird als $z(i)$ bezeichnet und der Repräsentant entsprechend als $N_{z(i)}$. In der Menge $\Lambda(N_{z(i)})$ sind also jene Tate-Motive enthalten, die mit $\mathbb{Z}(i)$ verbunden sind. Falls wir verschiedene Quadriken gleichzeitig betrachten, wollen wir zur besseren Unterscheidung diese Schreibweise zu $N_{z_Q(i)}$ erweitern.

Wir präsentieren nun ein sehr nützliches Theorem, welches angibt, welche Tate-Motive mit Sicherheit verbunden sind. Sei hierzu $\mathbf{j}(q) = (j_1(q), \dots, j_{\mathfrak{h}(q)}(q))$ die absolute Zerfällungsstruktur von q und $j_0(q) := 0$.

Theorem 3.2.8 ([Vis11], Prop. 1.1). *Sei $Q = X_q$ eine anisotrope Quadrik der Dimension n und $\lambda, \mu \in \mathbb{N}_0$, sodass $j_{t-1}(q) \leq \lambda, \mu < j_t(q)$ und*

$$\lambda + \mu = j_{t-1}(q) + j_t(q) - 1$$

für $1 \leq t \leq \mathfrak{h}(q)$. Dann sind $\mathbb{Z}(\lambda)$ und $\mathbb{Z}(n - \mu)$ in $\Lambda(Q)$ miteinander verbunden.

Dieses Resultat zeigt auch, dass alle Tate-Motive in $\Lambda(Q)$ paarweise auftauchen. Ist N ein direkter Summand von $\mathcal{M}(Q)$, so besteht $N_{\overline{K}}$ und somit $\Lambda(N)$ aus einer geraden Anzahl von Tate-Motiven.

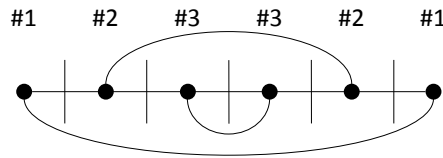
Beispiel 3.2.9. 1. Sei q wie in Beispiel 3.2.6 eine anisotrope Form mit $\dim q = 7$ und relativer Zerfällungsstruktur $\mathbf{i}(q) = (1, 1, 1)$, d.h. absolute Zerfällungsstruktur $\mathbf{j}(q) = (1, 2, 3)$. Dann erhalten wir mit Theorem 3.2.8, dass \mathbb{Z} mit $\mathbb{Z}(5)$, $\mathbb{Z}(1)$ mit $\mathbb{Z}(4)$ sowie $\mathbb{Z}(2)$ mit $\mathbb{Z}(3)$ in $\Lambda(Q) = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(1), \dots, \mathbb{Z}(5)\}$ verbunden ist.

2. Bei der 7-dimensionalen anisotropen Form q mit $\mathbf{i}(q) = (3) = \mathbf{j}(q)$ wird für die Werte $0 \leq \lambda, \mu < 3$ nach Theorem 3.2.8 vorausgesetzt, dass $\lambda + \mu = 2$. Dies erfüllen die Paare $(\lambda, \mu) = (0, 2), (1, 1)$ und $(2, 0)$. Wir haben daher die verbundenen Paare: \mathbb{Z} und $\mathbb{Z}(3)$, $\mathbb{Z}(1)$ und $\mathbb{Z}(4)$ sowie $\mathbb{Z}(2)$ und $\mathbb{Z}(5)$.

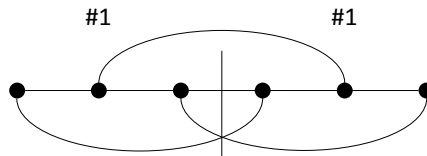
Wir können die Dekomposition von $\mathcal{M}(Q_{\overline{K}})$ in Tate-Motive, deren Aufteilung in Shells sowie die Verbindungen in $\Lambda(Q)$ nach Vishik's Vorbild ([Vis04, S. 14]) wie folgt visualisieren: Jeder Punkt auf der Kette steht für ein Tate-Motiv aus $\mathcal{M}(Q_{\overline{K}})$, wobei

3.2 Quadratische Formen der Dimension 10 in I^3K

wir ganz links mit \mathbb{Z} beginnen, daneben $\mathbb{Z}(1)$ usw. bis rechts außen $\mathbb{Z}(\dim(Q))$ steht. Die (optionale) Unterteilung der Tate-Motive in Shells erfolgt durch eine senkrechte Markierung sowie der zugehörigen Beschriftung des Abschnitts $\#i$ für Shell-Nummer i . Die Verbindungen, welche durch Bogen dargestellt sind, stehen für Verbindungen der Tate-Motive in $\Lambda(Q)$. Die bildliche Darstellung der 7-dimensionalen Form aus Beispiel 3.2.9 mit $\mathbf{i}(q) = (1, 1, 1)$ ist dann:



Für den Fall $\mathbf{i}(q) = (3)$ erhalten wir das Bild:



Diese Bilder sind stets symmetrisch, denn falls π ein Projektor ist, so ist seine Transposition π^t ebenfalls ein Projektor.

3.2.3 Theorem über binäre Motive

Wir benötigen zunächst die Definition dreier Größen, welche die direkten Summanden eines Motivs $\mathcal{M}(Q)$ näher charakterisieren, siehe auch [Vis04, Def. 4.6].

Definition 3.2.10. Sei Q eine glatte, projektive Quadrik und N ein direkter Summand von $\mathcal{M}(Q)$. Mit den Bezeichnungen aus dem vorhergehenden Abschnitt definieren wir

1. $a(N) := \min\{i \mid \mathbb{Z}(i) \in \Lambda(N)\}$.
2. $b(N) := \max\{i \mid \mathbb{Z}(i) \in \Lambda(N)\}$.
3. $\dim(N) := b(N) - a(N)$.

Wir haben $a(\mathcal{M}(Q)) = 0$, $b(\mathcal{M}(Q)) = \dim(Q)$ sowie $\dim(\mathcal{M}(Q)) = \dim(Q)$. Nach der Proposition [Vis04, Prop. 4.5] gilt außerdem: Falls $\mathbf{i}_1(q) = 1$, dann sind für einen direkten Summanden N von $\mathcal{M}(Q)$ die Aussagen $a(N) = 0$ und $b(N) = \dim(Q)$ äquivalent. Ein Korollar daraus ist das folgende

3 Anwendungen von Chow-Motiven

Lemma 3.2.11 ([Vis04], Kor. 4.7). *Sei Q eine glatte, anisotrope, projektive Quadrik und N ein unzerlegbarer¹ direkter Summand von $\mathcal{M}(Q)$, sodass $a(N) = 0$. Dann gilt:*

$$\dim(N) = \dim(Q) - \mathbf{i}_1(q) + 1.$$

Lemma 3.2.12. *Seien $P = X_p$ und $Q = X_q$ anisotrope Quadriken über K . Dann gelten folgende Eigenschaften:*

1. *Sind $q_{K(p)}$ sowie $p_{K(q)}$ isotrop, dann ist*

$$\dim(q) - \mathbf{i}_1(q) = \dim(p) - \mathbf{i}_1(p).$$

2. *Ist $P \subset Q$ eine Unterquadrik, sodass $p_{K(q)}$ isotrop ist, dann ist*

$$\text{codim}(p \subset q) < \mathbf{i}_1(q).$$

3. *In der Situation von 2. ist außerdem*

$$\mathbf{i}_1(p) = \mathbf{i}_1(q) - \text{codim}(p \subset q).$$

Beweis. Siehe [Vis04, Kor. 4.9]. □

Wir wollen nun das sogenannte *obere Motiv* nach N. Karpenko [Kar13] definieren.

Definition 3.2.13. Sei X eine glatte, irreduzible Varietät und sei N ein unzerlegbarer direkter Summand von dem Motiv $\mathcal{M}(X)$. Dann heißt N *oberes Motiv* von X , geschrieben $\mathcal{U}(X)$, falls $a(N) = 0$.

Für den Fall $X = Q$, d.h. für eine anisotrope Quadrik Q über K bedeutet diese Definition, dass ein direkter unzerlegbarer Summand $N = \mathcal{U}(Q)$ von $\mathcal{M}(Q)$ ein oberes Motiv ist, falls $N_{\overline{K}} \simeq \mathbb{Z} \oplus N'$, wobei N' über \overline{K} definiert ist (aber nicht über K). In der Schreibweise von A. Vishik ist $\mathcal{U}(Q) = N_{z_Q(0)}$. Da wir im Folgenden nicht in zwei Schreibweisen unterscheiden möchten, vereinbaren wir folgende

Notation 3.2.14. Wir setzen $\mathcal{U}_i(Q)$ für denjenigen unzerlegbaren Summanden von $\mathcal{M}(Q)$ mit $a(\mathcal{U}_i(Q)) = i$.

Ist N ein direkter Summand von $\mathcal{M}(Q)$ und $N_{\overline{K}}$ ist ein *binäres Motiv*, d.h. besteht es aus zwei Tate-Motiven, so haben wir weitere Einschränkungen bezüglich der Größe $\dim(N)$. Diese werden durch das *Theorem über binäre Motive* beschrieben:

Theorem 3.2.15 (Binäres Motiv). *Sei Q eine glatte anisotrope projektive Quadrik und N ein direkter Summand von $\mathcal{M}(Q)$, sodass $N_{\overline{K}} = \mathbb{Z}(a(N)) \oplus \mathbb{Z}(b(N))$. Dann gilt $\dim(N) = 2^r - 1$ für ein r .*

¹Wir nennen einen direkten Summanden N von $\mathcal{M}(Q)$ *unzerlegbar*, falls er nicht in eine nicht-triviale direkte Summe $N = N_1 \oplus N_2$ zerlegt werden kann.

3.2 Quadratische Formen der Dimension 10 in I^3K

Auch dieses Theorem wurde zunächst unter der Voraussetzung $\text{char}(K) = 0$ in [IV99, Thm. 6.1] bewiesen und konnte schließlich dank [Voe01] auf $\text{char}(K) \neq 2$ ausgeweitet werden. Wir möchten des Weiteren an dieser Stelle bemerken, dass im Falle $\mathbf{i}_1(q) = 1$ und $a(N) = 0$ das Theorem wegen $b(N) = \dim(Q)$ eine Zerlegung $N_{\overline{K}} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\dim(Q))$ voraussetzt und entsprechend die Aussage

$$\dim(N) = b(N) = \dim(Q) = 2^r - 1$$

für ein r zur Folgerung hat.

Wir präsentieren nun ein weiteres Resultat, welches wir indirekt für den Beweis von Behauptung 3.2.3 benötigen werden.

Lemma 3.2.16. *Seien Q_1, Q_2 zwei glatte, projektive Quadriken, sodass $Q_{1_{K(Q_2)}}$ und $Q_{2_{K(Q_1)}}$ isotrop sind. Dann existieren unzerlegbare direkte Summanden N_1 von $\mathcal{M}(Q_1)$ und N_2 von $\mathcal{M}(Q_2)$, sodass $N_1 \simeq N_2$ und $a(N_i) = 0$ für $i = 1, 2$.*

Beweis. Siehe [Vis04, Kor. 3.9]. □

Wichtig für unseren späteren Beweis sind auch die folgenden nützlichen Lemmata:

Lemma 3.2.17. *Sei $Q = X_q$ eine glatte, anisotrope Quadrik. Dann existiert für alle $0 \leq i < \mathbf{i}_1(q)$ der Summand $\mathcal{U}_i(Q)$ und es gilt:*

$$\mathcal{U}_i(Q) \simeq \mathcal{U}(Q)(i).$$

Beweis. Siehe [Vis04, Kor. 3.10]. □

Bei dem in diesem Lemma auftauchenden Ausdruck $\mathcal{U}(Q)(i)$ handelt es sich um den Tate-Twist $\mathcal{U}(Q) \otimes \mathbb{Z}(i)$ des oberen Motivs $\mathcal{U}(Q)$. Das Lemma besagt, dass die Tate-Motive $\mathbb{Z}(0), \dots, \mathbb{Z}(\mathbf{i}_1(q) - 1)$ in $\Lambda(Q)$ nicht miteinander verbunden sind (und genauso $\mathbb{Z}(n - \mathbf{i}_1(q) + 1), \dots, \mathbb{Z}(n)$ für $n = \dim(Q)$).

Beispiel 3.2.18. Betrachten wir wieder die 7-dimensionale Form q mit $\mathbf{i}(q) = (3)$. Wir wiederholen nochmal, dass $\mathcal{M}(Q_{\overline{K}}) = \bigoplus_{i=0}^5 \mathbb{Z}(i)$. Nach Beispiel 3.2.9 sind \mathbb{Z} und $\mathbb{Z}(3)$, $\mathbb{Z}(1)$ und $\mathbb{Z}(4)$ sowie $\mathbb{Z}(2)$ und $\mathbb{Z}(3)$ miteinander verbunden. Mithilfe von Lemma 3.2.17 erhalten wir, dass $\mathcal{U}(Q) = N_1$ mit $\overline{N}_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(3)$ das obere Motiv von Q sein muss und entsprechend $\mathcal{U}_1(Q) = N_2$ mit $\overline{N}_2 = \mathbb{Z}(1) \oplus \mathbb{Z}(4)$ sowie $\mathcal{U}_2(Q) = N_3$ mit $\overline{N}_3 = \mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}(5)$. All diese sind binäre, unzerlegbare Summanden mit $\dim(N_i) = 3 = 2^2 - 1$ für $i = 1, 2, 3$. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1(Q) &\simeq \mathcal{U}(Q)(1), \\ \mathcal{U}_2(Q) &\simeq \mathcal{U}(Q)(2). \end{aligned}$$

Lemma 3.2.19 ([Vis09b], D3, Prop. 2.23). *Seien p und q solche quadratische Formen sowie l, m solche Zahlen, dass für jede beliebige Körpererweiterung E/K die Äquivalenz*

$$\mathfrak{w}(q_E) > m \Leftrightarrow \mathfrak{w}(p_E) > l \tag{3.3}$$

gilt. Angenommen, es existiert ein unzerlegbarer direkter Summand N von $\mathcal{M}(Q)$ mit $a(N) = m$. Dann existiert der Summand $\mathcal{U}_l(P)$ und es gilt:

$$\mathcal{U}_l(P) \simeq N(l - m). \quad (3.4)$$

3.2.4 Beschreibung von I^3K

Wir möchten zur Vorbereitung in diesem Abschnitt das fundamentale Ideal IK und ihrer Potenzen I^2K sowie I^3K näher untersuchen. Bereits in Kapitel 3.1 haben wir in Lemma 3.1.13 etwas über deren Erzeuger erfahren. Ebenfalls wurde erwähnt, dass eine Form genau dann in IK liegt, sofern ihre Dimension gerade ist. Im Zuge der Untersuchung von IK/I^2K in Beispiel 3.1.16 fand außerdem die *Diskriminante* Erwähnung. Wir möchten nun die Ideale IK , I^2K und I^3K durch diese und eine weitere Invariante charakterisieren. Hierzu sei $q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ eine quadratische Form der Dimension n . Dann können dieser die folgenden drei Invarianten zugeordnet werden (siehe [Pfi66, §4] oder auch [Lam05, S. 30]):

1. der *Dimensionsindex* $e(q) = n \bmod 2 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
2. die *Diskriminante* $d(q) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_i$.
3. die *Algebrenklasse* $c(q) \in \text{Br}(K)$.

Falls n gerade ist, so ist $c(q)$ die Algebrenklasse der *Cliffordalgebra* $C(q)$ von q . Für Details hierzu siehe z.B. [Lam05, S.103 ff.].

Nun können wir das fundamentale Ideal wie folgt definieren:

$$IK := \{\bar{q} \in W(K) \mid e(\bar{q}) = 0\}.$$

Weiter hat A. Pfister mit [Pfi66, Satz 13] bewiesen, dass

$$I^2K = \{\bar{q} \mid e(\bar{q}) = 0, d(\bar{q}) = 1\}.$$

Das Theorem von A. Merkurjev [Mer81] erbrachte schließlich eine Aussage über I^3K :

$$I^3K = \{\bar{q} \mid e(\bar{q}) = 0, d(\bar{q}) = 1, c(\bar{q}) = 1\}. \quad (3.5)$$

A. Pfister [Pfi66, Satz 14] hat zuvor gezeigt, dass I^3K eine Teilmenge der rechten Seite aus Formel 3.5 ist und dass für $\dim(q) \leq 12$ aus $e(\bar{q}) = 0$, $d(\bar{q}) = 1$ und $c(\bar{q}) = 1$ folgt, dass $\bar{q} \in I^3K$. In diesem Zuge hat er auch bewiesen, dass eine 10-dimensionale Form in I^3K isotrop sein muss.

Um Rückschlüsse auf die Zerfallsstruktur einer Form aus I^3K ziehen zu können, ist jedoch die folgende Charakterisierung aus [Hof98b, Intro.] sehr nützlich. Sei hierzu q eine quadratische Form über K und $K = K_0 \subset \dots \subset K_h$ ihr generischer Zerfallungsturm mit den Kernformen q_i . Falls q hyperbolisch ist, so definieren wir ihren Grad $\deg q = \infty$, falls $\dim q$ ungerade ist, setzen wir $\deg q = 0$. Ansonsten

3.2 Quadratische Formen der Dimension 10 in I^3K

liegt q_{h-1} in der Menge aller quadratischer Formen über K_{h-1} , welche zu einer d -fachen Pfister-Form über K_{h-1} proportional sind. Diese Menge wird mit GP_dK_{h-1} bezeichnet. Dann setzen wir $\deg q = d$ und es gilt

$$I^n K = \{q \in I^{n-1}K \mid \deg q \geq n\}$$

für $n \leq 4$. Entsprechend haben Formen aus I^3K den Grad $\deg q \geq 3$. Wir möchten dies zur Bestimmung der Zerfällungsstruktur einer anisotropen 10-dimensionalen quadratischen Form in I^3K benutzen. Diese Struktur wird sich später als unmöglicher Fall erweisen.

3.2.5 Zerfällungsstruktur einer 10-dimensionalen anisotropen Form in I^3K

In diesem Abschnitt möchten wir unter Annahme der Existenz einer 10-dimensionalen anisotropen quadratischen Form in I^3K ihre Zerfällungsstruktur bestimmen.

Sei q eine anisotrope quadratische Form über K mit $\dim q = 10$, welche in I^3K liegt. Da q anisotrop ist, haben wir $\mathbf{i}_0(q) = \mathbf{w}(q) = 0$ und wir starten die Zerfällungsstruktur-Iteration mit $q_0 = q_{an} = q$ sowie $K_0 = K$. Der Körper $K_1 \supset K_0$ ist der Funktionenkörper $K_0(q_0) = K(q)$. Die Form $q_{K(q)}$ ist nach Lemma 3.1.17 isotrop, d.h. enthält den Summanden $m \cdot \langle 1, -1 \rangle$, und wir erhalten $\mathbf{i}_1(q) = m \geq 1$. Weiter ist $q_{K(q)} = (q_{K(q)})_{an} \perp m \cdot \langle 1, -1 \rangle = q_1 \perp m \cdot \langle 1, -1 \rangle$. Nach Theorem 3.1.19 ist wegen $10 = 2^3 + 2$ der erste Witt-Index $\mathbf{i}_1(q) \leq 2$.

Angenommen, es ist $\mathbf{i}_1(q) = 2$ und folglich $\dim q_1 = 6$. Wegen

$$\dim q_0 > \dim q_1 > \dots > \dim q_{h-1} > \dim q_h$$

existiert dann aber kein q_{h-1} mit $q_{h-1} \sim \langle \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \rangle$, da

$$\dim(\langle \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \rangle) = 8 > \dim q_1.$$

Es gilt folglich $\deg(q) < 3$ und somit $q \notin I^3K$, was im Widerspruch zu unserer Grundannahme steht.

Es bleibt der Fall $\mathbf{i}_1(q) = 1$, d.h. $\dim q_1 = 8$. Hierbei muss es sich nun schon um jene Form handeln, welche zu einer d -fachen Pfister-Form proportional ist, da $\deg q \geq d = 3$ gelten muss und $\deg q > 3$ wiederum wegen der absteigenden Folge der Dimensionen unmöglich ist. Es ist also $q_{h-1} = q_1 \in GP_3K_{h-1}$ und folglich $h = \mathfrak{h}(q) = 2$. Wegen

$$\mathbf{j}_h(q) = \mathbf{i}_1(q) + \mathbf{i}_2(q) = \frac{1}{2} \dim q = 5$$

folgt schließlich $\mathbf{i}_2(q) = 4$. Die Zerfällungsstruktur von q ist also $\mathbf{i}(q) = (1, 4)$.

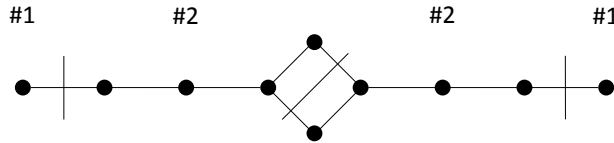
Sei Q die Quadrik zu q , also $Q = \{[x_1, \dots, x_{10}] \mid q(x_1, \dots, x_{10}) = 0\}$. Dann ist

3 Anwendungen von Chow-Motiven

$\dim(Q) = 8$ und es gilt

$$\mathcal{M}(Q_{\overline{K}}) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(3) \oplus \mathbb{Z}_{li}(4) \oplus \mathbb{Z}_{re}(4) \oplus \mathbb{Z}(5) \oplus \dots \mathbb{Z}(8).$$

Diese Tate-Motive werden auf $\mathfrak{h}(q) = 2$ verschiedene Shells aufgeteilt. Das erste, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}(0)$, sowie das letzte in der Summe, $\mathbb{Z}(8)$, gehören dabei zu Shell-Nummer 1. Alle anderen Tate-Motive $\mathbb{Z}(1), \dots, \mathbb{Z}(7)$ gehören zu Shell-Nummer 2:



3.2.6 Beweis der Behauptung 3.2.2

Wir möchten nun die eingangs angeführte Behauptung 3.2.2 beweisen, dass in $I^3 K$ keine anisotropen 10-dimensionalen quadratischen Formen existieren. Hierbei werden wir schrittweise vorgehen, indem wir eine Reihe von Aussagen beweisen, aus welchen schließlich Behauptung 3.2.2 folgt.

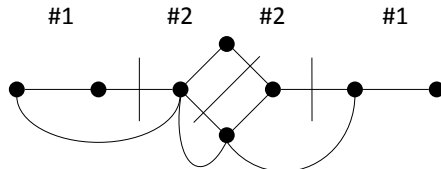
Behauptung 3.2.20. Sei q eine anisotrope 8-dimensionale quadratische Form mit der Zerfallsstruktur $\mathfrak{i}(q) = (2, 2)$. Sei $p \subset q$ eine Unterform der Kodimension 1 (d.h. $\dim p = 7$). Dann gilt: $\mathcal{U}(Q) \simeq \mathcal{U}(P)$.

Beweis. Wir haben

$$\text{codim}(p \subset q) = 1 < 2 = \mathfrak{i}_1(q)$$

und somit nach einem Resultat von A. Vishik die Funktionenkörper $K(p)$ und $K(q)$ äquivalent (siehe Lemma 3.2.12 und [Vis09b, D3, Exercise 1]). Daher sind die Voraussetzungen von Lemma 3.2.16 erfüllt und es existieren unzerlegbare direkte Summanden N_1 von $\mathcal{M}(Q)$ und N_2 von $\mathcal{M}(P)$ mit $a(N_i) = 0$, sodass $N_1 \simeq N_2$. Also gilt $\mathcal{U}(Q) \simeq \mathcal{U}(P)$. \square

Behauptung 3.2.21. Es ist $\Lambda(\mathcal{U}(Q)) = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(2), \mathbb{Z}_{re}(3), \mathbb{Z}(5)\}$:

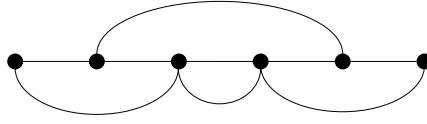


Beweis. Wegen $a(\mathcal{U}(Q)) = 0$ ist klar, dass $\mathbb{Z} \in \Lambda(\mathcal{U}(Q))$. Nach Theorem 3.2.8 über die zusammenhängenden Tate-Motive folgt dann direkt, dass auch $\mathbb{Z}(5) \in \Lambda(\mathcal{U}(Q))$. Aus denselben Gründen folgt zunächst, dass auch $\mathbb{Z}(1)$ mit $\mathbb{Z}(6)$, $\mathbb{Z}(2)$ mit $\mathbb{Z}_{re}(3)$

3.2 Quadratische Formen der Dimension 10 in I^3K

und $\mathbb{Z}_{li}(3)$ mit $\mathbb{Z}(4)$ verbunden ist. Da $5 \neq 2^r - 1$ für ein r , ist $\mathcal{U}(Q)$ nach Theorem 3.2.15 nicht binär und $\Lambda(\mathcal{U}(Q))$ muss tatsächlich mindestens ein weiteres von den genannten verbundenen Paaren enthalten. Das Paar $\{\mathbb{Z}(1), \mathbb{Z}(6)\}$ scheidet nach Lemma 3.2.17 aus, da \mathbb{Z} nicht mit $\mathbb{Z}(1)$ verbunden sein kann. Es bleiben also die Kandidaten $\{\mathbb{Z}(2), \mathbb{Z}_{re}(3)\}$ und $\{\mathbb{Z}_{li}(3), \mathbb{Z}(4)\}$. Da wiederum nach Lemma 3.2.17 allgemein $\mathcal{U}_1(Q) \simeq \mathcal{U}(Q)(1)$ gilt und wir bereits wissen, dass $\mathbb{Z}(5) \in \Lambda(\mathcal{U}(Q))$, ist nur der Fall $\{\mathbb{Z}(2), \mathbb{Z}_{re}(3)\} \subset \Lambda(\mathcal{U}(Q))$ möglich und die Behauptung ist gezeigt. \square

Behauptung 3.2.22. Es gilt $\mathcal{M}(P) = \mathcal{U}(P) \oplus \mathcal{U}_1(P)$, wobei $\mathcal{U}_1(P)$ unzerlegbarer binärer Summand ist:



Beweis. Wegen der soeben gezeigten Behauptungen 3.2.20 und 3.2.21 ist zunächst $\Lambda(\mathcal{U}(P)) = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(2), \mathbb{Z}(3^{up}), \mathbb{Z}(5)\}$. Da nach Theorem 3.2.8 alle direkten Summanden des Motivs einer Quadrik aus der Summe einer geraden Anzahl von Tate-Motiven bestehen, muss $\mathcal{U}_1(P)$ der unzerlegbare binäre Summand sein mit $\Lambda(\mathcal{U}_1(P)) = \{\mathbb{Z}(1), \mathbb{Z}(4)\}$. \square

Bemerkung 3.2.23. Es sei bemerkt, dass aus $\text{codim}(p \subset q) < i_1(q)$ nach Lemma 3.2.12 auch folgt, dass $i_1(p) = i_1(q) - \text{codim}(p \subset q) = 1$. Nach [Hof98b, Thm. 4.1] hat p also die einzig mögliche Zerfallsstruktur $i(p) = (1, 1, 1)$. Diese Form wurde bereits in Beispiel 3.2.9 mit dem Ergebnis behandelt, dass $\mathbb{Z}(1)$ und $\mathbb{Z}(4)$ miteinander verbunden sind.

Behauptung 3.2.24. Sei r eine anisotrope 10-dimensionale quadratische Form in I^3K und sei $\langle a, b, c \rangle \subset r$ eine beliebige 3-dimensionale Unterform mit $a, b, c \in K^\times$. Sei $r = \langle a, b, c \rangle \perp p$ für eine 7-dimensionale Form p und setze $q := p \perp \langle -abc \rangle$. Dann ist $q \equiv \pi \pmod{I^3K}$ eine 2-fache Pfister-Form, wobei $\pi = \langle \langle -b/a, -c/a \rangle \rangle$, und es gilt: $i(q) = (2, 2)$.

Beweis. Da $q = p \perp \langle -abc \rangle$ und $r = p \perp \langle a, b, c \rangle$, ergibt sich (in $W(K)$):

$$\begin{aligned} q &\simeq r \perp -\langle a, b, c \rangle \perp -\langle abc \rangle \\ &\simeq r \perp -\langle a, b, c, abc \rangle \\ &\simeq r \perp \langle -a \rangle \langle 1, b/a, c/a, bc \rangle \\ &\simeq r \perp \langle -a \rangle \langle \langle -b/a, -c/a \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Für eine n -fache Pfister-Form ϕ gilt nun, dass $\langle a \rangle \phi \equiv \phi \pmod{I^{n+1}K}$ für $a \in K^\times$ (siehe z.B. [EL72, Main Theorem]). Da nach Voraussetzung $r \in I^3K$, folgt also

$$q \equiv \langle \langle -b/a, -c/a \rangle \rangle = \pi \pmod{I^3K}.$$

3 Anwendungen von Chow-Motiven

Die Formen q und π sind des Weiteren anisotrop: Sei zunächst angenommen, π ist isotrop. Da π eine (2-fache) Pfister-Form ist, ist π dann nach Theorem 3.1.15 sogar hyperbolisch und besitzt folglich den Witt-Index $\mathfrak{w}(\pi) = 2$. Bis auf Skalierung ist $\langle a, b, c \rangle$ eine Unterform von π mit der Kodimension $\text{codim}(\langle a, b, c \rangle \subset \pi) = 1 < \mathfrak{w}(\pi)$. Dadurch enthält $\langle a, b, c \rangle$ mindestens einen Summanden \mathbb{H} , ist also isotrop. Dann folgt aber direkt, dass r ebenfalls isotrop ist, da $\langle a, b, c \rangle \subset r$ eine Unterform ist. Wir haben einen Widerspruch und folglich ist π anisotrop.

Nun nehmen wir an, q ist isotrop, d.h. $\dim(q_{an}) < 8$. Dann ist wegen $q_{K(\pi)} \in I^3 K$ und dem Hauptsatz 3.2.1 q über $K(\pi)$ hyperbolisch, also auch der über K anisotrope Teil q_{an} . Nach [Sch85, S. 155, Thm. 5.4] folgt, dass die anisotrope Pfister-Form π den anisotropen Teil q_{an} teilt, d.h. es gilt $q_{an} \simeq s \otimes \pi$ für eine passende Form s . Damit wird auch die Dimension $\dim(q_{an})$ von $\dim(\pi) = 4$ geteilt. Da q isotrop ist (und deswegen $\dim(q_{an}) \neq 8$), hat der Witt-Index $\mathfrak{w}(q)$ folglich mindestens den Wert 2.

Wir können wie oben argumentieren: Die Form p ist eine Unterform von q mit $\text{codim}(p \subset q) = 1 < \mathfrak{w}(q)$ und dadurch isotrop. Da p ebenfalls eine Unterform von r ist, folgt mit Lemma 3.2.12, dass auch r isotrop ist. Wir haben erneut einen Widerspruch und die Anisotropie von q ist bewiesen.

Sei nun $\dim(q_E)_{an} < 8$ für eine beliebige Körpererweiterung E/K . Dann ist wieder $q_{E(\pi)}$ hyperbolisch und folglich wegen [Sch85, S. 155, Thm. 5.4] die Dimension $\dim(q_E)_{an}$ durch 4 teilbar.

Sei im Folgenden $E = K(q)$ ($= K_1 \supset K_0 = K$). Wir betrachten zunächst den Fall $\dim(q_E)_{an} = 0$, d.h. q_E ist hyperbolisch und $\mathfrak{i}(q) = (4)$. Nach [Hof98b, Thm. 4.1] trifft dies genau dann zu, wenn q proportional zu einer 3-fachen Pfister-Form ist. Dann ist $q \in I^3 K$ und auch $\pi \in I^3 K$. Wegen des Hauptsatzes 3.2.1 folgt, dass π hyperbolisch ist. Dies ist ein Widerspruch, da π wie gezeigt anisotrop ist.

Folglich bleibt der Fall $\dim(q_E)_{an} = 4$, genauer gesagt ist $(q_E)_{an} \simeq x \cdot \pi_E$ für ein $x \in E^\times$, und somit $\mathfrak{i}_1(q) = 2$. Über der nächsten Körpererweiterung

$$K_2 = E(x \cdot \pi_E) \supset K_1$$

ist q schließlich hyperbolisch, d.h. $\mathfrak{i}_2(q) = 2$. Wir haben daher insgesamt $\mathfrak{i}(q) = (2, 2)$.

Wir möchten nun noch bemerken, dass nach [Hof98b, Thm. 4.1] eine 8-dimensionale Form q genau dann die Zerfällungsstruktur $(2, 2)$ besitzt, falls $q \simeq \alpha \otimes \beta$ für α, β mit $\dim \alpha = 2$ und $\dim \beta = 4$ und q nicht proportional zu einer 3-fachen Pfister-Form ist. Nach [Hof98a, Lem. 2.7] ist dies der Fall, falls die Bedingung $q \equiv \pi \pmod{I^3 K}$ für eine 2-fache Pfister-Form π erfüllt ist. \square

Behauptung 3.2.25. Seien r und p wie in Beh. 3.2.24. Dann gilt mit beliebiger Körpererweiterung E/K :

$$\mathfrak{w}(r_E) > 1 \Leftrightarrow \mathfrak{w}(p_E) > 1 \tag{3.6}$$

Beweis. Sei E/K eine beliebige Körpererweiterung und $\mathfrak{w}(r_E) > 1$, also $\mathfrak{w}(r_E) \geq 2$. Wiederum wegen des Hauptsatzes 3.2.1 folgt dann $r_E \simeq 5\mathbb{H}$ (und die Zerfällungsstruktur $(1, 4)$). Da $p \subset r$ eine Unterform der Kodimension 3 ist, ist der Witt-Index

3.2 Quadratische Formen der Dimension 10 in I^3K

von p_E mindestens 2 und somit $\mathfrak{w}(p_E) > 1$. Setzen wir für die andere Folgerungsrichtung die Bedingung $\mathfrak{w}(p_E) > 1$ voraus, so folgt die linke Seite trivialerweise wegen $p \subset r$ und Lemma 3.2.12. \square

Bemerkung 3.2.26. Eine Alternative für die erste Beweisrichtung lautet wie folgt: Die 10-dimensionale anisotrope Form $r \in I^3K$ besitzt nach Abschnitt 3.2.5 die Zerfallsstruktur $(1, 4)$. Nach Satz 3.1.18 gilt dann auch, dass $\mathfrak{w}(r_E) = j_k(r)$ für ein $k \in \{1, 2\}$, also $\mathfrak{w}(r_E) = 1$ oder 5. Die Bedingung $\mathfrak{w}(r_E) > 1$ ist daher äquivalent zu $\mathfrak{w}(r_E) > 4$, d.h. $r_E \simeq 5\mathbb{H}$.

Behauptung 3.2.27. Seien r und p wie in Beh. 3.2.24. Dann gilt

$$\mathcal{U}(R)(1) \simeq \mathcal{U}_1(R) \simeq \mathcal{U}_1(P)$$

und somit $\mathcal{U}_i(R) \simeq \mathcal{U}_1(P)(i-1)$ für alle $1 \leq i \leq 4$. Es folgt außerdem, dass $\mathcal{U}(R)$ ein binärer direkter Summand ist mit $\Lambda(\mathcal{U}(R)) = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(8)\}$.

Beweis. Nach Beh. 3.2.22 gilt $\mathcal{M}(P) = \mathcal{U}(P) \oplus \mathcal{U}_1(P)$, wobei $\mathcal{U}_1(P)$ binär und unzerlegbar ist. Es existiert also ein unzerlegbarer direkter Summand $N = \mathcal{U}_1(P)$ von $\mathcal{M}(P)$ mit $a(N) = 1 = m$ und wir können wegen Beh. 3.2.25 das Lemma 3.2.19 für $m = l = 1$ anwenden. Wir erhalten $\mathcal{U}(R)(1) \simeq \mathcal{U}_1(R) \simeq \mathcal{U}_1(P)$. Da außerdem

$$\mathfrak{w}(r_E) > 1 \Leftrightarrow \mathfrak{w}(r_E) > 4,$$

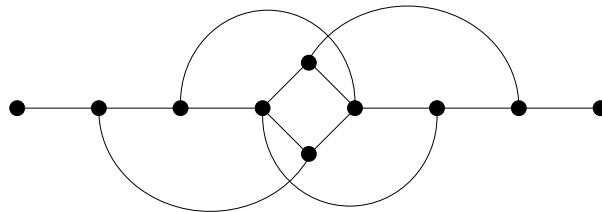
erhalten wir auf dieselbe Art und Weise für $l = 2, 3, 4$:

$$\mathcal{U}_2(R) \simeq \mathcal{U}_1(P)(1),$$

$$\mathcal{U}_3(R) \simeq \mathcal{U}_1(P)(2),$$

$$\mathcal{U}_4(R) \simeq \mathcal{U}_1(P)(3).$$

Zusammengefasst ist dies $\mathcal{U}_i(R) \simeq \mathcal{U}_1(P)(i-1)$ für alle $1 \leq i \leq 4$. Insbesondere sind alle $\mathcal{U}_i(R)$ für $1 \leq i \leq 4$ binäre und unzerlegbare direkte Summanden von $\mathcal{M}(R)$. Wir haben damit folgende Verbindungen:



Als einzige Wahl bleibt nun, dass $\mathcal{U}(R)$ ebenfalls ein binärer Summand ist mit $\Lambda(\mathcal{U}(R)) = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(8)\}$. \square

Behauptung 3.2.28 (Beh. 3.2.2). In I^3K existieren keine anisotropen quadratischen Formen der Dimension 10.

Beweis. Nach Beh. 3.2.27 ist $\mathcal{U}(R)$ unzerlegbarer, binärer Summand von $\mathcal{M}(R)$ mit $\Lambda(\mathcal{U}(R)) = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}(8)\}$. Allerdings ist $\dim(\mathcal{U}(R)) = 8 \neq 2^m - 1$ für ein m . Wir haben einen Widerspruch und die Behauptung ist bewiesen. \square

3.2.7 Vishiks Gap Theorem

Wir haben durch unseren Beweis gesehen, dass es in I^3K eine Lücke (engl. *gap*) in der Folge möglicher Dimensionen von anisotropen Formen gibt. Diese Lücke bei $\dim q = 10$ ist hier tatsächlich die einzige:

Proposition 3.2.29 ([Lam05], S. 355, Prop. 5.10). *Die möglichen Dimensionen einer anisotropen Form in $I^3K \setminus \{0\}$ (für variierende Körper K) sind $2 \cdot d$, wobei $d = 4$ oder $d \geq 6$.*

Die komplette Antwort auf die Frage nach solchen Lücken in I^nK formulierte A. Vishik im Jahre 2002, hier entnommen aus [Lam05, S. 359, Thm. 5.20]:

Theorem 3.2.30 (Vishiks Gap Theorem). *Die möglichen Dimensionen einer anisotropen Form in I^nK (für variierende Körper K) sind genau:*

$$2^{n+1} - 2^{r+1} \quad (0 \leq r \leq n) \quad \text{und} \quad 2^{n+1} + 2k \quad (k \geq 0).$$

Dies bedeutet, wir haben als Lücken in den möglichen Dimensionen ausschließlich die Intervalle

$$(0, 2^n), (2^n, 2^n + 2^{n-1}), (2^n + 2^{n-1}, 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2}), \\ \dots, (2^{n+1} - 8, 2^{n+1} - 4), (2^{n+1} - 4, 2^{n+1} - 2)$$

und es gibt keine Lücken in den geraden Dimensionen $\geq 2^{n+1}$. Den Beweis dieses Theorems lieferte N. Karpenko im Jahre 2003, siehe hierzu Abschnitt 3.3.

Beispiel 3.2.31. Wir geben ein paar Beispiele für dieser Dimensions-Lücken in I^nK für verschiedene n , siehe auch [Lam05, S. 360].

1. $n = 3$: Lücke bei $\dim = 10$.
2. $n = 4$: Lücken bei $\dim = 18, 20, 22, 26$.
3. $n = 5$: Lücken bei $\dim = 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 50, 52, 54, 58$.

3.3 Überblick von ausgewählten Anwendungen

Viele klassische Fragestellungen aus der Mathematik lassen sich mithilfe von Motiven lösen. Wir möchten nun beispielhaft einige davon präsentieren.

3.3.1 Bloch-Kato-Vermutung

Die berühmte Vermutung von S. Bloch und K. Kato besagt, dass der Normresthomomorphismus

$$K_n^M(k)/m \rightarrow H^n(k, \mu_m^{\otimes n}) \quad (3.7)$$

zwischen der n -ten Milnorsche K -Gruppe des Körpers k und der Galoiskohomologiegruppe mit $n \geq 0$ und $m \geq 2$ eine Bijektion ist, wobei die Charakteristik von k die Zahl m nicht teilt. Wir bezeichnen diese Vermutung kurz mit $BKV(n, m)$. Für $n = 0$ und $n = 1$ ist sie trivialerweise bzw. wegen Hilberts Satz 90 erfüllt. Anfang der 80er Jahre wurde durch A. Merkurjev und A. Suslin die $BKV(2, m)$ bewiesen, welche als Theorem von Merkurjev-Suslin bekannt wurde. Diese legten ebenso einen Beweis für $BKV(3, 2)$ vor, was unabhängig davon auch von M. Rost gezeigt werden konnte. Die *Milnor-Vermutung* $BKV(n, 2)$ konnte schließlich in den 90er Jahren von V. Voevodsky bewiesen werden, wofür er 2002 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet wurde. Ebenfalls durch V. Voevodsky und M. Rost gelang es, einen allgemeinen Beweis für $BKV(n, m)$ zu liefern. Hierbei sind die Entwicklung einer geeigneten motivischen Kohomologietheorie sowie das *Rost-Motiv* von zentraler Bedeutung. Der Begriff des Rost-Motivs geht zurück auf ein Resultat von M. Rost aus [Ros98, Thm. 17], wobei wir die Version aus [Vis04, Thm. 3.12] präsentieren:

Theorem 3.3.1 (Rost). *Sei Q eine anisotrope n -fache Pfister-Quadrik über K . Dann gilt*

$$\mathcal{M}(Q) \simeq \bigoplus_{i=0}^{2^{n-1}-1} R(i), \quad (3.8)$$

wobei R ein unzerlegbares Motiv ist und $R_{\bar{K}} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(2^{n-1} - 1)$.

Das Motiv R aus diesem Theorem wird *Rost-Motiv* genannt.

Für Details der Entwicklung des Beweises der Bloch-Kato-Vermutung und für eine Erläuterung des allgemeinen Beweises durch V. Voevodsky siehe z.B. [Spi12].

3.3.2 Kaplansky-Problem

Die u -Invariante eines Körpers K ist definiert als die maximale Dimension einer anisotropen quadratischen Form über K . Hieraus ergibt sich die Fragestellung, welche Werte für diese Invariante möglich sind. Im Jahre 1953 stellte I. Kaplansky die Vermutung auf, dass die einzigen möglichen Werte von u Zweierpotenzen sind. Diese konnte allerdings im Jahre 1991 von A. Merkurjev widerlegt werden, da dieser Körper mit allen möglichen geraden u -Invarianten konstruierte. Folglich wurde

3 Anwendungen von Chow-Motiven

im Anschluss untersucht, ob auch ungerade Werte möglich sind. Hier erfolgte der Durchbruch 1999 durch O. Izhboldin, welcher einen Körper mit u -Invariante 9 konstruierte. Schließlich gelang es A. Vishik im Jahre 2006, Körper mit u -Invariante $2^r - 1$ für $r \geq 3$ zu konstruieren, siehe [Vis09a]. Die Konstruktion beruht hierbei u.a. auf Chow-Motiven und Chow-Ringen von Quadriken. Über die u -Invariante siehe z.B. [Lam05, S. 398 ff.].

3.3.3 Mögliche Dimensionen in $I^n K$ und erster Witt-Index

In dieser Arbeit haben wir uns bereits mit der Frage befasst, welche Dimensionen für ein Element aus der n -ten Potenz des fundamentalen Ideals $I^n K$ möglich sind. Diese Frage konnte von N. Karpenko im Jahre 2003 komplett beantwortet werden, siehe [Kar03a]. Konkret hat er gezeigt, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\dim I^n K = \{2^{n+1} - 2^i \mid i \in [1, n+1]\} \cup (2\mathbb{Z} \cap [2^{n+1}, +\infty]), \quad (3.9)$$

wobei $\dim I^n K$ die Menge aller $\dim x$ für alle $x \in I^n K$ und alle K bezeichnet. Wie bereits in Abschnitt 3.2 erwähnt beinhalten die vorherigen bruchstückhaften Informationen über die möglichen Dimensionen den Hauptsatz 3.2.1 von Arason und Pfister, d.h. $(0, 2^n) \cap \dim I^n K = \emptyset$, sowie das Resultat von Vishik, das Theorem 3.2.4: $(2^n, 2^n + 2^{n-1}) \cap \dim I^n K = \emptyset$. Die Methoden, auf denen der Beweis von Karpenko beruht, basieren auf Chow-Gruppen und Chow-Motiven von Quadriken.

Im Jahre 2003 konnte N. Karpenko [Kar03b] ebenfalls unter Verwendung von Chow-Gruppen eine Vermutung von Hoffmann beweisen, welche den ersten Witt-Index einer anisotropen quadratischen Form beliebiger Dimension komplett beschreibt. Die Vermutung lautet:

Vermutung 3.3.2 (Hoffmann). *Sei q eine anisotrope quadratische Form über K mit $\dim(q) \geq 2$. Schreibe die Größe $\dim(q) - 1$ als eine Summe von Zweierpotenzen,*

$$\dim(q) - 1 = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_r}$$

mit $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r$. Dann ist $i_1(q) - 1$ eine Partialsumme hiervon, d.h.

$$i_1(q) - 1 = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_s} \quad (3.10)$$

für ein $0 \leq s \leq r - 1$.

Auch diese Vermutung konnte vor der kompletten Lösung durch Karpenko in Teilen verifiziert werden: Schreiben wir $\dim(q) = 2^n + m$ mit $1 \leq m \leq 2^n$, so ist seit dem Jahre 1995 nach einem Resultat von D. Hoffmann bekannt, dass dann $i_1(q) \leq m$ gilt (siehe Theorem 3.1.19). Fünf Jahre später zeigte O. Izhboldin, dass für $m \geq 3$ gilt: $i_1(q) \neq m - 1$. Dies lässt sich auch aus der allgemeinen Vermutung folgern. Schließlich konnten D. Hoffmann die Vermutung für quadratische Formen mit Dimensionen bis 10 (1998) und A. Vishik für Dimensionen bis 22 (2002) bestätigen.

Literaturverzeichnis

- [Awo08] AWODEY, S.: *Oxford Logic Guides*. Bd. 52: *Category Theory*. Oxford University Press, 2008
- [Bos13] BOSCH, S.: *Algebra*. Springer Spektrum, 2013
- [BRW13] BARILE, M. ; ROWLAND, T. ; WEISSTEIN, E. W.: *Grassmannian*. <http://mathworld.wolfram.com/Grassmannian.html>, 2013. – From MathWorld—A Wolfram Web Resource
- [CGM05] CHERNOUSOV, V. ; GILLE, S. ; MERKURJEV, A.: Motive Decomposition of Isotropic Projective Homogeneous Varieties. In: *Duke Mathematical Journal* 126 (2005)
- [EKM08] ELMAN, R. ; KARPENKO, N. A. ; MERKURJEV, A.: *Colloquium Publications*. Bd. 46: *The Algebraic and Geometric Theory of Quadratic Forms*. American Mathematical Society, 2008
- [EL72] ELMAN, R. ; LAM, T. Y.: Pfister Forms and K-Theory of Fields. In: *Journal of Algebra* 23 (1972), S. 181–213
- [Far05] FARKAS, G.: *Algebraic Geometry*. <http://www.math.utexas.edu/users/gfarkas/teaching/alggeom/alggeom2005notes.pdf>, 2005. – Lecture Notes, University of Texas at Austin
- [Ful98] FULTON, W.: *Intersection Theory*. 2. Springer, 1998. – Originally published as Volume 2 of the series *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, 3. Folge
- [Har77] HARTSHORNE, R.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 52: *Algebraic Geometry*. Springer, 1977
- [Har92] HARRIS, J.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 133: *Algebraic Geometry: A First Course*. Springer, 1992
- [Hof95] HOFFMANN, D. W.: Isotropy of quadratic forms over the function field of a quadric. In: *Math. Z.* 220 (1995), S. 461–476
- [Hof98a] HOFFMANN, D. W.: On the dimensions of anisotropic quadratic forms in I^4 . In: *Invent. math.* 131 (1998), S. 185–198

Literaturverzeichnis

- [Hof98b] HOFFMANN, D. W.: Splitting patterns and invariants of quadratic forms. In: *Math. Nachr.* 190 (1998), S. 149–168
- [Hul12] HULEK, K.: *Elementare Algebraische Geometrie*. Springer Spektrum, 2012 (Aufbaukurs Mathematik)
- [Hun74] HUNGERFORD, T. W.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 73: *Algebra*. Springer, 1974
- [IV99] IZHBOLDIN, O. T. ; VISHIK, A.: Quadratic forms with absolutely maximal splitting. In: *Contemp. Math.* 272 (1999), S. 103–125
- [Kah09] KAHN, B.: *Cours spécialisés*. Bd. 15: *Formes quadratiques sur un corps*. Société Mathématique de France, 2009
- [Kar00] KARPENKO, N. A.: Criteria of motivic equivalence for quadratic forms and central simple algebras. In: *Math. Ann.* 317 (2000), S. 585–611
- [Kar01] KARPENKO, N. A.: Cohomology of relative cellular spaces and isotropic flag varieties. In: *St. Petersburg Math. J.* 12 (2001), S. 1–50
- [Kar03a] KARPENKO, N. A.: Holes in I^n . In: *ArXiv Mathematics e-prints* (2003), Dezember. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2003math.....12273K>
- [Kar03b] KARPENKO, N. A.: On the first Witt index of quadratic forms. In: *INVENT. MATH* 153 (2003), S. 455–462
- [Kar13] KARPENKO, N. A.: Upper motives of algebraic groups and incompressibility of Severi-Brauer varieties. In: *J. reine angew. Math.* 677 (2013), S. 179–198
- [KMRT98] KNUS, M.-A. ; MERKURJEV, A. ; ROST, M. ; TIGNOL, J.-P.: *Colloquium Publications*. Bd. 44: *The Book Of Involutions*. American Mathematical Society, 1998
- [Kne76] KNEBUSCH, M.: Generic splitting of quadratic forms, I. In: *Proceedings of the London Mathematical Society, Third Series* 33 (1976), S. 65–93
- [Lam05] LAM, T. Y.: *Introduction to Quadratic Forms over Fields*. American Mathematical Society, 2005
- [Liu06] LIU, Q.: *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 6: *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford University Press, 2006
- [LM07] LEVINE, M. ; MOREL, F.: *Algebraic Cobordism*. Springer, 2007 (Springer Monographs in Mathematics)
- [Man68] MANIN, Y. I.: Correspondences, motifs and monoidal transformations. In: *Mathematics of the USSR-Sbornik* 6 (1968), S. 439–470

- [Mer81] MERKURJEV, A.: On the norm residue symbol of degree 2. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 261 (1981), S. 542–547
- [Mum99] MUMFORD, D.: *The Red Book of Varieties and Schemes: Includes the Michigan Lectures (1974) on Curves and Their Jacobians*. Springer, 1999 (Lecture Notes in Mathematics). <http://books.google.de/books?id=K1hFauNsmR4C>. – ISBN 9783540632931
- [Mur10] MURRE, J.: *Lectures on algebraic cycles and Chow groups*. <http://jfredan.files.wordpress.com/2010/11/lectures-murre.pdf>, 2010. – Summer school on Hodge theory and related topics, ICTP
- [NZ06] NENASHEV, A. ; ZAINOULLINE, K.: Oriented cohomology and motivic decompositions of relative cellular spaces. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 205 (2006), S. 323–340
- [Pfi66] PFISTER, A.: Quadratische Formen in beliebigen Körpern. In: *Inventiones mathematicae* 1 (1966), 116–132. <http://eudml.org/doc/141830>
- [Qui71] QUILLEN, D.: Elementary Proofs of Some Results of Cobordism Theory Using Steenrod Operations. In: *Advances in Mathematics* 7 (1971), S. 29–56
- [Ros98] ROST, M.: *The motive of a Pfister form*. <http://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/motive.html>, 1998. – Preprint
- [Sch85] SCHARLAU, W.: *Quadratic and hermitian forms*. Springer, 1985 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften). http://books.google.de/books?id=YJI_AQAAIAAJ. – ISBN 9783540137245
- [Ser91] SERRE, J.-P.: Motifs. In: *Astérisque* 198–199–200 (1991), S. 333–349
- [Sha74] SHAFAREVICH, I. R.: *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaft in Einzeldarstellung*. Bd. 213: *Basic Algebraic Geometry*. Springer, 1974
- [Spi12] SPIES, C.: *Über den Beweis der Bloch-Kato-Vermutung*. <http://www.staff.uni-mainz.de/semenov/publ/spies.pdf>, 2012. – Masterarbeit, Johannes Gutenberg-Universität Mainz
- [Tot99] TOTARO, B.: The Chow Ring of a Classifying Space. In: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* 67 (1999)
- [Vis00] VISHIK, A.: On dimension of anisotropic forms in I^n . In: *MPIM-preprint* 11 (2000), S. 1–41

Literaturverzeichnis

- [Vis04] VISHIK, A.: Motives of Quadrics with Applications to the Theory of Quadratic Forms. In: TIGNOL, J.-P. (Hrsg.): *Geometric Methods in the Algebraic Theory of Quadratic Forms* Bd. 1835. Springer Berlin Heidelberg, 2004, S. 25–101
- [Vis09a] VISHIK, A.: Fields of u-Invariant $2^r + 1$. In: TSCHINKEL, Y. (Hrsg.) ; ZARHIN, Y. (Hrsg.): *Algebra, Arithmetic, and Geometry* Bd. 270. Birkhäuser Boston, 2009, S. 661–685
- [Vis09b] VISHIK, A.: *The geometric theory of quadratic forms*. http://alg-geo.epfl.ch/cours/geomthqf_vishik_09/documents.html, 2009. – EPFL Doctoral School, Intensive Courses in Mathematics
- [Vis11] VISHIK, A.: Excellent connections in the motives of quadrics. In: *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* 44 (2011), S. 183–195
- [Voe01] VOEVODSKY, V.: On 2-torsion in motivic cohomology. In: *K-theory preprint archives* 502 (2001). <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0502/>

Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt und durch meine Unterschrift, dass die vorliegende Arbeit von mir selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt worden ist. Inhalte und Passagen, die aus fremden Quellen stammen und direkt oder indirekt übernommen worden sind, wurden als solche kenntlich gemacht. Ferner versichere ich, dass ich keine andere, außer der im Literaturverzeichnis angegebenen Literatur verwendet habe. Diese Versicherung bezieht sich sowohl auf Textinhalte sowie alle enthaltenden Abbildungen, Skizzen und Tabellen. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Ort, Datum

Unterschrift