SATZ VON BINET-CAUCHY, EIN BEISPIEL

Seien K ein Körper, $n = 4$, $m = 2$ und $x = (x_{ij}) \in \mathrm{GL}_4(K)$. Es gilt $\binom{n}{m} = 6$.

Der Homomorphismus $\bigwedge^2\colon \mathrm{GL}_4(K) \to \mathrm{GL}_6(K)$ aus dem Satz von Binet–Cauchy sieht explizit folgendermaßen aus: $\bigwedge^2(x)$ ist gleich

$$\begin{pmatrix}
x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21} & x_{11}x_{23}-x_{13}x_{21} & x_{11}x_{24}-x_{14}x_{21} & x_{12}x_{23}-x_{13}x_{22} & x_{12}x_{24}-x_{14}x_{22} & x_{13}x_{24}-x_{14}x_{23}\\
x_{11}x_{32}-x_{12}x_{31} & x_{11}x_{33}-x_{13}x_{31} & x_{11}x_{34}-x_{14}x_{31} & x_{12}x_{33}-x_{13}x_{32} & x_{12}x_{34}-x_{14}x_{32} & x_{13}x_{34}-x_{14}x_{33}\\
x_{11}x_{42}-x_{12}x_{41} & x_{11}x_{43}-x_{13}x_{41} & x_{11}x_{44}-x_{14}x_{41} & x_{12}x_{43}-x_{13}x_{42} & x_{12}x_{44}-x_{14}x_{42} & x_{13}x_{44}-x_{14}x_{43}\\
x_{21}x_{32}-x_{22}x_{31} & x_{21}x_{33}-x_{23}x_{31} & x_{21}x_{34}-x_{24}x_{31} & x_{22}x_{33}-x_{23}x_{32} & x_{22}x_{34}-x_{24}x_{32} & x_{23}x_{34}-x_{24}x_{33}\\
x_{21}x_{42}-x_{22}x_{41} & x_{21}x_{43}-x_{23}x_{41} & x_{21}x_{44}-x_{24}x_{41} & x_{22}x_{43}-x_{23}x_{42} & x_{22}x_{44}-x_{24}x_{42} & x_{23}x_{44}-x_{24}x_{43}\\
x_{31}x_{42}-x_{32}x_{41} & x_{31}x_{43}-x_{33}x_{41} & x_{31}x_{44}-x_{34}x_{41} & x_{32}x_{43}-x_{33}x_{42} & x_{32}x_{44}-x_{34}x_{42} & x_{33}x_{44}-x_{34}x_{43}
\end{pmatrix}$$

Es gelten folgende Eigenschaften:

$\bigwedge^2(xy) = \bigwedge^2(x)\bigwedge^2(y)$ für alle $x, y \in \mathrm{GL}_4(K)$,

$$\textstyle\bigwedge^2(x) \cdot G \cdot (\bigwedge^2(x))^T = G \text{ für alle } x \in \mathrm{SL}_4(K), \text{ wobei } G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere impliziert die letzte Eigenschaft, dass $\bigwedge^2$ den berühmten Homomorphismus $\mathrm{SL}_4(K) \to \mathrm{SO}_6(K)$ induziert, wobei SO_6 die spezielle orthogonale Gruppe bezeichnet.