Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Nikita Geldhauser

03.07.2024 SoSe 2024

Algebraische Geometrie 2
Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Seien X ein Noethersches Schema und $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe von Moduln auf X.
Zeige: $\mathcal{F}$ ist genau dann lokal frei, wenn für alle $x \in X$ die Halme $\mathcal{F}_x$ freie $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln sind.

Hinweis: Sie können folgenden Satz aus der kommutativen Algebra ohne Beweis benutzen. Seien A ein kommutativer Ring und M und N zwei endlich erzeugte projektive A-Moduln. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A. Wir nehmen an, dass es ein Isomorphismus $\varphi\colon M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ zwischen den Lokalisierungen existiert. Dann existiert ein Element $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ und ein Isomorphismus von A_f-Moduln $\Phi\colon M_f \to N_f$, der mit φ kompatibel ist.

Aufgabe 2. Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass die Kategorie der Garben von $\mathcal{O}_X$-Moduln auf einem geringten topologischen Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ genügend viele injektive Objekte hat.

Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Für jedes $x \in X$ sei I_x ein injektiver $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul, so dass es ein injektiver Homomorphismus $\mathcal{F}_x \to I_x$ existiert. (Wir nehmen ohne Beweis an, dass die Kategorie von Moduln genügend viele injektive Objekte hat). Für jedes $x \in X$ sei j die Inklusion des Punktes $\{x\}$ in X. Definiere die Garbe $\mathcal{I} = \prod_{x \in X} j_*(I_x)$, wobei wir hier I_x als eine konstante Garbe auf dem topologischen Raum $\{x\}$ betrachten (Produkt von Wolkenkratzergarben).

Zeige: Es gibt einen injektiven Morphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{I}$, wobei $\mathcal{I}$ ein injektives Objekt ist.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen auf X heißt *welk*, wenn für alle offenen Teilmengen $V \subset U$ von X die Restriktionsabbildungen $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ surjektiv sind.
(a) Zeige: Jede konstante Garbe auf einem irreduziblen topologischen Raum ist welk.
(b) Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{F}''$ Garben von abelschen Gruppen auf X und

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von Garben. Angenommen $\mathcal{F}'$ ist welk.
Zeige: Für jede offene Teilmenge U von X ist die Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U) \to 0$$

von abelschen Gruppen exakt.
(c) Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{F}''$ Garben von abelschen Gruppen auf X und

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von Garben. Angenommen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ sind welk.
Zeige: $\mathcal{F}''$ ist welk.
(d) Sei $\mathcal{F}$ eine welke Garbe von abelschen Gruppen auf X.
Zeige: $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i > 0$.
Hinweis: Benutze ohne Beweis, dass injektive Garben welk sind, und die Aufgabe (2).
Bemerkung: Aufgabe (b) ist die schwierigste.