Mathematisches Institut Prof. Dr. Nikita Geldhauser
Universität München 26.06.2024 SoSe 2024

Algebraische Geometrie 2
Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Beweise folgende äquivalente Konstruktion der Aufblasung von $\mathbb{A}_k^n$ im Punkt $p = (0, \ldots, 0)$ (s. Blatt 9, Aufgabe 1).

$$\mathrm{Bl}_p \mathbb{A}_k^n = \{(q, \ell) \in \mathbb{A}_k^n \times \mathbb{P}_k^{n-1} \mid q \in \ell\},$$

wobei $\mathbb{P}_k^{n-1}$ als Raum aller Geraden durch den Punkt p in $\mathbb{A}_k^n$ aufgefasst wird.

Aufgabe 2. Sei S ein Integritätsbereich. Die *Normalisierung* von S ist der ganze Abschluss von S im Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(S)$, d.h. die Menge aller Nullstellen aus $\mathrm{Quot}(S)$ von allen normierten Polynomen aus $S[x]$. Finde die Normalisierung von

$$\mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^2 - x^3).$$

Hinweis: Vergleiche mit Blatt 9, Aufgabe 2.

Aufgabe 3. Seien k ein Körper und X eine glatte irreduzible Varietät über k.
Ein *Weil-Divisor* auf X ist eine endliche ganzzahlige lineare Kombination $\sum n_i Y_i$, wobei $n_i \in \mathbb{Z}$ und Y_i abgeschlossene irreduzible Untervarietäten von X der Kodimension 1 sind.

Sei Y eine abgeschlossene irreduzible Untervarietät und $\eta \in Y$ der generische Punkt von Y. Man kann zeigen, dass $\mathcal{O}_{X,\eta}$ ein diskreter Bewertungsring ist. Ferner gilt $\mathrm{Quot}(\mathcal{O}_{X,\eta}) = K$, wobei K der Ring der rationalen Funktionen auf X ist. Die Bewertung auf $\mathcal{O}_{X,\eta}$ bezeichnen wir als v_Y.

Ein *Hauptdivisor* auf X ist $\sum v_Y(f)Y$, wobei die Summe über allen abgeschlossenen irreduziblen Kodimension 1 Untervarietäten Y von X läuft und $f \in K^*$.

Zwei Weil-Divisoren D und D' heißen äquivalent, falls $D - D'$ ein Hauptdivisor ist. Die *Klassengruppe* $\mathrm{Cl}(X)$ von X ist die Gruppe aller Weil-Divisoren modulo dieser Äquivalenzrelation.

Berechne $\mathrm{Cl}(\mathbb{A}_k^1)$ und $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}_k^1)$.

Bemerkung: In der Vorlesung haben wir Cartier-Divisoren und die Gruppe der invertierbaren Garben von $\mathcal{O}_X$-Moduln kennengelernt. Alle diese drei Konstruktionen sind für glatte Varietäten äquivalent.