Algebraische Geometrie 2
Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Seien k ein Körper, $x_1, \dots, x_n$ die Koordinaten von $\mathbb{A}^n_k$, $y_1, \dots, y_n$ die Koordinaten von $\mathbb{P}^{n-1}_k$ und $p \in \mathbb{A}^n_k$ der Punkt $(0, \dots, 0)$. Definiere die Aufblasung $\mathrm{Bl}_p \mathbb{A}^n_k$ von $\mathbb{A}^n_k$ im Punkt p als die abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{A}^n_k \times \mathbb{P}^{n-1}_k$, die durch die Gleichungen $x_i y_j - x_j y_i = 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ gegeben ist.
Sei $\pi\colon \mathrm{Bl}_p \mathbb{A}^n_k \to \mathbb{A}^n_k$ die Projektion auf $\mathbb{A}^n_k$. Zeige: $\pi\colon \pi^{-1}(\mathbb{A}^n_k \setminus \{p\}) \to \mathbb{A}^n_k \setminus \{p\}$ ist ein Isomorphismus und der Ausnahmedivisor $\pi^{-1}(p)$ ist gleich $\mathbb{P}^{n-1}_k \subset \mathrm{Bl}_p \mathbb{A}^n_k$.

Aufgabe 2. Seien k ein Körper der Charakteristik 0 und $\pi\colon \mathrm{Bl}_p \mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^2_k$ die Aufblasung von $\mathbb{A}^2_k$ im Punkt $p = (0,0)$. Betrachte den Zariski-Abschluss $\widetilde{V} := \overline{\pi^{-1}(V \setminus \{p\})}$ für folgende Kurven $V \subset \mathbb{A}^2_k$

(1) $V = V(y^2 - x^2 - x^3)$
(2) $V = V(y^2 - x^3)$

Zeige: V ist nicht glatt und $\widetilde{V}$ ist glatt. Finde eine Parametrisierung der Punkte von $\widetilde{V}$ in einer affinen Karte von $\mathbb{A}^2_k \times \mathbb{P}^1_k$.

Aufgabe 3. Seien X ein Noethersches Schema und $\mathcal{I}$ die Idealgarbe auf X, die einer abgeschlossenen Unterschema Y von X entspricht. Betrachte die Garbe $\mathcal{T} = \oplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d$ von graduierten Algebren ($\mathcal{I}^0 = \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{I}^d$ ist die d-te Potenz vom Ideal $\mathcal{I}$). Das Schema $\widetilde{X} = \operatorname{Proj} \mathcal{T}$ über X heißt die Aufblasung von X in Y. Der Ausnahmedivisor dieser Aufblasung ist $\operatorname{Proj}(\oplus_{d \geq 0} \mathcal{I}^d / \mathcal{I}^{d+1})$ über Y.
Seien k ein Körper, $X = \mathbb{A}^2_k$ und $Y = \{(0,0)\} \subset X$. Zeige: Diese Definition der Aufblasung und des Ausnahmedivisors ist kompatibel mit der Definition aus der Aufgabe 1.
Bemerkung: $\mathcal{T}$ heißt Rees-Algebra und den Ausnahmedivisor haben wir im letzten Semester Tangenzialkegel genannt.

Aufgabe 4. Male mithilfe des Computers die reellen Punkte der Kurven V und $\widetilde{V}$ aus der Aufgabe 2, sowie die reellen Punkte einer offenen affinen Teilmenge der Aufblasung von $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ im Punkt $(0,0)$ aus der Aufgabe 1.