Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Nikita Geldhauser
12.06.2024 SoSe 2024

Algebraische Geometrie 2
Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Seien k ein Körper und $\pi\colon \mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k$ der Strukturmorphismus.
Zeige: π ist separiert, vom endlichen Typ, abgeschlossen, aber nicht eigentlich.
Hinweis: Betrachte eine Projektion $\mathbb{A}^1_k \times_k \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$.

Aufgabe 2. Das Bewertungskriterium für eigentliche Morphismen besagt Folgendes. Seien R ein Bewertungsring und $K = \operatorname{Quot}(R)$. Bezeichne

$$T = \operatorname{Spec} R,\ U = \operatorname{Spec} K \text{ und } i\colon\ \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} R$$

der Morphismus, der durch die kanonische Einbettung $R \hookrightarrow K$ induziert ist.

Seien nun X und Y Schemata und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus vom endlichen Typ. Angenommen, dass X Noethersch ist. Dann ist f genau dann eigentlich, wenn für alle R, T, U wie oben, für jeden Morphismus $\alpha\colon U \to X$ und für jeden Morphismus $\beta\colon T \to Y$ mit $f \circ \alpha = \beta \circ i$ genau ein Morphismus $T \to X$ existiert, so dass folgendes Diagramm kommutativ ist

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

Sei k ein Körper. Zeige mithilfe dieses Kriteriums: der Strukturmorphismus $\mathbb{A}^n_k \to \operatorname{Spec} k$ ist nicht eigentlich.

Aufgabe 3. Seien X und Y irreduzible Schemata und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Seien ξ der generische Punkt von X und μ der generische Punkt von Y.
Zeige: Das Bild $f(X)$ ist genau dann dicht in Y, wenn $f(\xi) = \mu$.