Prof. Dr. Nikita Geldhauser
22.05.2024 SoSe 2024

Algebraische Geometrie 2
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Sei X ein Schema vom endlichen Typ über einem Körper k.
Zeige: Abgeschlossene Punkte von X sind dicht in X. Finde ein Gegenbeispiel für beliebige Schemata. (Vergleiche Aufgabe 3, Übungsblatt 4).
Hinweis: Benutze ohne Beweis folgende Charakterisierung der abgeschlossenen Punkten für Schemata X vom endlichen Typ über k: Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn der Restklassenkörper $k(x)$ eine algebraische (äquivalent in dieser Situation eine endliche) Körpererweiterung von k ist. Folgere daraus, dass abgeschlossene Punkte jeder offenen Teilmenge U von X auch in X abgeschlossen sind.

Aufgabe 2. Ein Noetherscher topologischer Raum X heißt ein Zariski-Raum, wenn jede nicht leere abgeschlossene irreduzible Teilmenge von X genau einen generischen Punkt hat. (Ein Punkt z einer abgeschlossenen Teilmenge Z heißt generisch, wenn $\overline{\{z\}} = Z$).

Sei X ein Zariski-Raum.
(a) Zeige: Jede minimale nicht leere abgeschlossene Teilmenge von X besteht aus einem Punkt.
(b) Seien $x, y \in X$ verschiedene Punkte. Zeige: Es existiert eine offene Umgebung von x, die y nicht enthält, oder es existiert eine offene Umgebung von y, die x nicht enthält.
(c) Angenommen, dass X irreduzibel ist. Zeige: Der generische Punkt von X liegt in jeder nicht leeren offenen Teilmenge von X.
(d) Seien $x, y \in X$. Wenn $x \in \overline{\{y\}}$, dann sagen wir, dass x eine Spezialisierung von y ist und schreiben: $y \rightsquigarrow x$. Wir definieren eine Partialordnung auf X als $y \geq x \Leftrightarrow y \rightsquigarrow x$.
Zeige: Die minimale Punkte bzgl. dieser Ordnung sind die abgeschlossene Punkte und die maximale Punkte bzgl. dieser Ordnung sind die generische Punkte der irreduziblen Komponenten von X.

Aufgabe 3. Sei X ein Schema vom endlichen Typ über einem Körper. Eine lokal abgeschlossene Teilmenge von X ist der Schnitt einer offenen Teilmenge von X mit einer abgeschlossenen Teilmenge von X. Eine konstruierbare Teilmenge von X ist eine endliche disjunkte Vereinigung von lokal abgeschlossenen Teilmengen von X.

Sei $f \colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata vom endlichen Typ über einem Körper k. Ein berühmter Satz von Chevalley besagt, dass $f(X)$ konstruierbar ist. (Mehr dazu im Tutorium).

Gebe Beispiele über einem algebraisch abgeschlossenen Körper an, sodass $f(X)$ weder abgeschlossen, noch offen in Y ist.