Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Nikita Geldhauser
15.05.2024 SoSe 2024

Algebraische Geometrie 2
Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Finde ein Beispiel eines topologischen Raums X, einer Indexmenge I und Garben $\mathcal{F}_i$, $i \in I$, auf X, so dass die Prägarbe $U \mapsto \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i(U)$ keine Garbe ist (U sind offene Teilmengen von X).

Aufgabe 2. (a) Sei $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ die affine Gerade über $\mathbb{R}$. Beschreibe $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ und $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ (sowie algebraisch, als auch geometrisch).
(b) Sei $X \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ die projektive Quadrik über $\mathbb{R}$, die durch die Gleichung $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ gegeben ist. Zeige: $X \not\simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, aber $X_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, wobei $X_{\mathbb{C}} = X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{R}} \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ (d.h. $X_{\mathbb{C}}$ ist die projektive Quadrik über $\mathbb{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, die durch dieselbe Gleichung $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ gegeben ist).
Bemerkung: Man sagt in dieser Situation, dass X eine getwistete Form von $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ ist. Die Varietät X oben ist isomorph zur Severi-Brauer-Varietät assoziiert mit Hamiltonschen Quaternionen (mehr dazu im Tutorium).

Aufgabe 3. Ein Schema X heißt reduziert, falls alle lokale Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$ reduziert sind (d.h. definitionsgemäß, dass alle $\mathcal{O}_{X,x}$ keine nilpotenten Elemente ungleich 0 enthalten).
(a) Zeige: X ist genau dann reduziert, wenn für jede offene Teilemenge $U \subset X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert ist.
(b) Sei A ein Ring und $X = \operatorname{Spec} A$ ein affines Schema. Zeige: X ist genau dann reduziert, wenn A reduziert ist.