Mathematisches Institut — Prof. Dr. Nikita Geldhauser
Universität München — 08.05.2024 SoSe 2024

Algebraische Geometrie 2
Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Seien k ein Körper und X ein Schema über k. In der Vorlesung haben wir gesehen, dass Morphismen $\operatorname{Spec} k \to X$ rationalen Punkten von X entsprechen.

Sei nun $D := k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Das Ziel dieser Aufgabe ist eine Beschreibung der Morphismen $\operatorname{Spec} D \to X$.

Für jeden Punkt $x \in X$ seien $\mathcal{O}_{X,x}$ der lokale Ring im Punkt x, $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{X,x}$ und $k(x)$ der Restklassenkörper von x. Der Tangenzialraum T_x von X im Punkt x ist definitionsgemäß der $k(x)$-Vektorraum $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$.

Zeige: Es besteht eine Äquivalenz zwischen Morphismen $\operatorname{Spec} D \to X$ und den Paaren (x, v), wobei x ein rationaler Punkt von X ist und $v \in T_x$.

Aufgabe 2. In der Vorlesung werden wir bald sehen (vgl. auch "Algebraische Geometrie 1"), dass wenn X ein ganzes Schema vom endlichen Typ über einem Körper k ist, dann gilt für jeden abgeschlossenen Punkt $p \in X$, dass $\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,p}$ und $\dim X = \dim U$, wobei U eine beliebige nicht-leere offene Teilmenge von X ist.

(Bemerkung: Es gilt ferner, dass $\dim X = \operatorname{tr\,deg}_k K(X)$, wobei $K(X)$ der Restklassenkörper des generischen Punktes von X ist. Der Körper $K(X)$ heißt der Funktionenkörper von X.)

Betrachte nun einen diskreten Bewertungsring R und $X = \operatorname{Spec} R[t]$.

Zeige: Diese Eigenschaften der Dimension gelten für X nicht.

Hinweis: Sei u das uniformisierende Element von R. Betrachte den Punkt $p \in X$, der dem Ideal $\langle ut-1\rangle$ entspricht. Benutze ohne Beweis, dass in einem faktoriellen Ring jedes Primideal der Höhe 1 ein Hauptideal ist.

Aufgabe 3. Ein Ring R heißt Jacobson-Ring, wenn für jedes Radikalideal I von R die Formel

$$I = \bigcap_{I \subset \mathfrak{m} \in \operatorname{Max} R} \mathfrak{m} \qquad (*)$$

gilt. (Äquivalent: für jedes Primideal I von R gilt Formel $(*)$).

Seien nun R ein Jacobson-Ring und Z eine abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$.
Zeige: Abgeschlossene Punkte von Z sind dicht in Z.
Hinweis: Sei U eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ mit $U \cap Z \neq \emptyset$. Es genügt zu zeigen, dass $U \cap Z$ einen abgeschlossenen Punkt von $\operatorname{Spec} R$ enthält.
Bemerkung: Später werden wir zeigen, dass in einem noethershen Schema vom endlichen Typ über einem Körper abgeschlossene Punkte dicht sind.