Algebraische Geometrie 2
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei X eine algebraische Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k (wie in der Vorlesung “Algebraische Geometrie 1”). Sei $\mathcal{O}_X$ die Garbe der regulären Funktionen auf X, d.h. für jede offene Teilmenge U von X ist $\mathcal{O}_X(U)$ der Ring der regulären Funktionen $U \to k$.

(1) Sei Y eine abgeschlossene Teilmenge von X. Für jede offene Teilmenge U von X definiere $\mathcal{I}_Y(U)$ als Ideal von $\mathcal{O}_X(U)$, das aus regulären Funktionen besteht, die in allen Punkten von $Y \bigcap U$ Null sind.
Zeige: Die Prägarbe $U \mapsto \mathcal{I}_Y(U)$ ist eine Garbe und ist eine Untergarbe von $\mathcal{O}_X$.

(2) Seien Y eine abgeschlossene Untervarietät von X und $i\colon Y \to X$ die entsprechende Einbettung. Wir betrachten die Garbe $\mathcal{O}_Y$ der regulären Funktionen auf Y.
Zeige: Die Sequenz $0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y \to 0$ von Garben ist exakt.

(3) Untersuche den Spezialfall $X = \mathbb{P}^1$, $Y = \{P, Q\}$, wobei P und Q zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{P}^1$ sind.

Aufgabe 2. Seien $\mathcal{F}$ eine Prägarbe von abelschen Gruppen und $\mathcal{F}^+$ die assoziierte Garbe. Prüfe alle Eigenschaften von $\mathcal{F}^+$, die in der Vorlesung ohne Beweis angegeben wurden. Insbesondere, prüfe, dass $\mathcal{F}^+$ eine Garbe ist.

Aufgabe 3. Gebe eine Prägarbe $\mathcal{F} \neq 0$ von abelschen Gruppen an, so dass die assoziierte Garbe $\mathcal{F}^+ = 0$ ist.
Hinweis: Betrachte z.B. die exponentielle Garben-Sequenz aus der Vorlesung.