7. Die Mellin-Transformation und ihre Umkehrung

7.1. Laplace-Transformation. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion, so dass $|f(x)|e^{-\sigma_0 x}$ auf $\mathbb{R}_+$ beschränkt ist für ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert das Integral

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ und stellt ein holomorphe Funktion in der Halbebene

$$H(\sigma_0) = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \sigma_0\}$$

dar. F heißt die Laplace-Transformierte von f.

Bemerkung. Messbar bedeutet hier Lebesgue-messbar. In unseren Anwendungen wird aber f stets mindestens stückweise stetig sein, so dass die volle Lebesguesche Integrations-Theorie nicht nötig ist

Die Existenz des Integrals folgt daraus, dass

$$|f(x)e^{sx}| \leqslant Ke^{-(\sigma-\sigma_0)x}, \quad \sigma := \mathrm{Re}(s) > \sigma_0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+$$

mit einer Konstanten $K \geqslant 0$.

Beispiel. Sei $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Die Laplace-Transformierte dieser Funktion ist

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx}dx = \lim_{R\to\infty}\Big[-\frac{e^{-sx}}{s}\Big]_{x=0}^{x=R} = \lim_{R\to\infty}\frac{1-e^{-sR}}{s} = \frac{1}{s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > 0$.

7.2. *Zusammenhang von Laplace- und Fourier-Transformation.*
Sei $s = \sigma + it$, $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Damit lautet die Formel für die Laplace-Transformation

$$F(\sigma+it) = \int_0^\infty f(x)e^{-\sigma x}e^{-itx}dx = \int_{-\infty}^\infty g(x)e^{-itx}dx,$$

wobei

$$g(x) = \begin{cases} f(x)e^{-\sigma x} & \text{für } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Daher ist die Funktion $t \mapsto F(\sigma+it)$ (bis auf eine Normierungs-Konstante) die Fourier-Transformierte der Funktion g.

7.3. Die *Mellin-Transformation* entsteht aus der Laplace-Transformation durch eine Variablen-Substitution. Setzt man

$$x = \log t, \quad dx = \frac{dt}{t},$$

so geht die Formel für die Laplace-Transformation über in

$$F(s) = \int_1^\infty f(\log t)\, t^{-s}\, \frac{dt}{t}.$$

Dies kann aufgefasst werden als die Transformation der Funktion $g(t) := f(\log t)$, $t \geqslant 1$, und gibt Anlass zu folgender Definition.

7.4. Definition (Mellin-Transformation). Sei $g : [1, \infty[\to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion, so dass $|g(x)|x^{-\sigma_0}$ für ein geeignetes $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ auf dem Intervall $1 \leqslant x < \infty$ beschränkt ist. Dann existiert das Integral

$$G(s) := \int_1^\infty g(x) x^{-s}\, \frac{dx}{x}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$. Die Funktion G ist holomorph in der Halbebene $H(\sigma_0)$ und heißt die Mellin-Transformierte von g.

Einen Zusammenhang von Dirichlet-Reihen und Mellin-Transformation gibt der folgende Satz.

7.5. Satz. *Sei* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *eine Dirichletreihe und*

$$A(x) := \sum_{n \leqslant x} a_n = O(x^{\sigma_0}) \quad \textit{mit einem } \sigma_0 \in \mathbb{R}.$$

Dann konvergiert die Dirichlet-Reihe für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ *und es gilt*

$$f(s) = s \int_1^\infty A(x) x^{-s} \frac{dx}{x}.$$

Beweis. Mit Abelscher partieller Summation ergibt sich

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n^s} = \frac{A(x)}{x^s} + s \int_1^x \frac{A(u)}{u^{s+1}}\, du.$$

Für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ ist $\left| \frac{A(x)}{x^{s+1}} \right| \leqslant C \frac{1}{x^{1+\delta}}$ mit $\delta = \mathrm{Re}(s) - \sigma_0 > 0$.

Da das Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+\delta}}$ konvergiert, erhalten wir nach Grenzübergang $x \to \infty$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = s \int_1^\infty \frac{A(x)}{x^{s+1}}\, dx, \quad \text{q.e.d.}$$

7.6. Beispiele. Wir geben einige Beispiele für Satz 7.5.

a) Für $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ist

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} 1 = \lfloor x \rfloor = O(x),$$

also hat man für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} \cdot \frac{dx}{x}$$

Schreibt man $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ und benutzt $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$, erhält man

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^s} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Da das letzte Integral schon für $\mathrm{Re}(s) > 0$ absolut konvergiert, gibt die letzte Formel die uns schon bekannte analytische Fortsetzung der Zetafunktion in die Halbebene $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ mit Pol 1. Ordnung an der Stelle $s = 1$.

b) Für $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$ ist

$$M(x) := \sum_{n \leqslant x} \mu(n) = O(x)$$

die Mertens-Funktion und man erhält für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \frac{M(x)}{x^s} \cdot \frac{dx}{x}.$$

c) Mit der Mangoldt-Funktion Λ gilt $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ und

$$\psi(x) := \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)$$

ist die Tschebyscheffsche Psi-Funktion. Für sie gilt $\psi(x) = O(x)$, sogar $\psi(x) \sim x$. Also hat man für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x)}{x^s} \cdot \frac{dx}{x}.$$

d) Für die Primzeta-Funktion $P(s) = \sum_p \frac{1}{p^s}$ ist

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1 = O(x),$$

also hat man für $\mathrm{Re}(s) > 1$ die Darstellung

$$P(s) = s \int_2^\infty \frac{\pi(x)}{x^s} \cdot \frac{dx}{x}.$$

7.7. Lemma (Perronsche Formel).

a) *Es sei $c > 0$. Dann gilt für alle $x > 0$*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^s \frac{ds}{s} = h(x) := \begin{cases} 0 & \textit{falls } x < 1, \\ \frac{1}{2} & \textit{falls } x = 1, \\ 1 & \textit{falls } x > 1. \end{cases}$$

Dabei wird über die Gerade $\{\mathrm{Re}(s) = c\}$ integriert und $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}$ ist als $\lim\limits_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT}$ zu verstehen.

b) *Effektive Version mit Abschätzung des Restes: Für $T > 0$ ist*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-iT}^{c+iT} x^s \frac{ds}{s} = h(x) + R(x, T)$$

mit

$$|R(x, T)| \leqslant \begin{cases} x^c \min\Big(\dfrac{1}{\pi T |\log x|}, 1\Big) & \textit{für } x \neq 1, \\ \min\Big(\dfrac{c}{\pi T}, \dfrac{1}{2}\Big) & \textit{für } x = 1. \end{cases}$$

Bemerkung. Es ist klar, dass a) aus b) folgt. Für Anwendungen braucht man meist die effektive Version.

Beweis. b) (i) Wir behandeln zunächst den einfacheren Fall $x = 1$. Dann ist $x^s = 1$ und

$$\int\limits_{c-iT}^{c+iT} \frac{ds}{s} = \log s \Big|_{c-iT}^{c+iT}$$

mit dem Hauptwert des Logarithmus in der Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 0$. Es ist

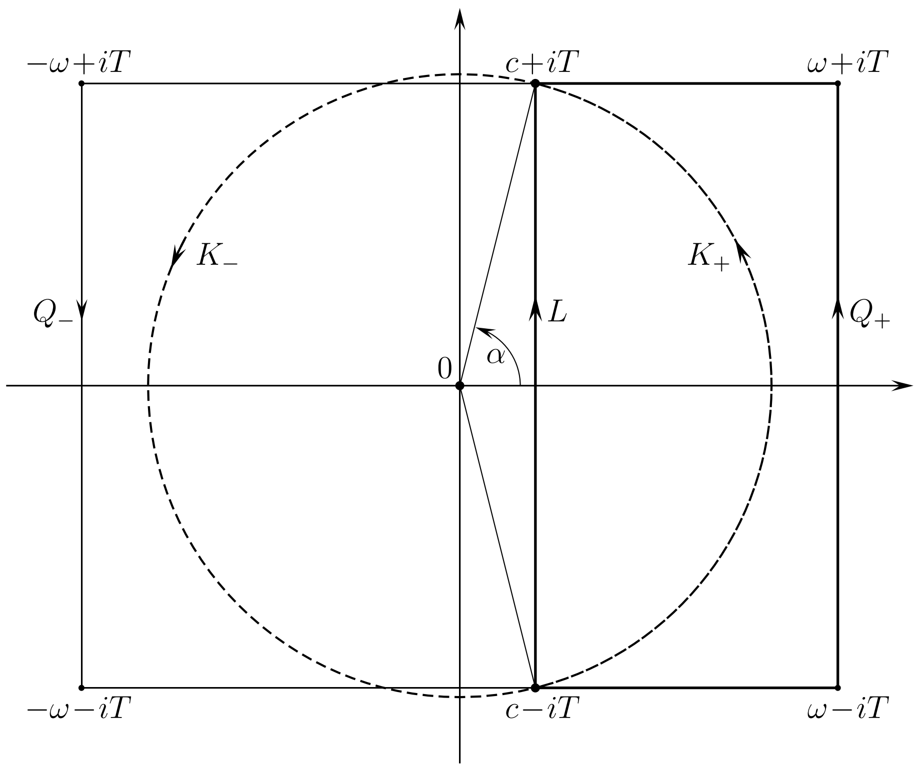
$$\log(c \pm iT) = \log|c + iT| \pm i \arctan(T/c),$$

also

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\frac{ds}{s}=\frac{1}{\pi}\arctan\Big(\frac{T}{c}\Big).$$

Da $\arctan(T/c)=\pi/2-\arctan(c/T)$ und $0<\arctan(c/T)\leqslant\min(c/T,\pi/2)$, folgt die Behauptung.

(ii) Sei jetzt $x<1$. Da die Funktion $s\mapsto x^s/s$ in der Halbebene $\mathrm{Re}(s)>0$ holomorph ist, kann man als Integrationsweg die Strecke L von $c-iT$ nach $c+iT$ durch den Streckenzug Q_+ von $c-iT$ über $\omega-iT$ und $\omega+iT$ nach $c+iT$ ersetzen, siehe Figur 7.1. Dabei ist $\omega>c$ ein reeller Parameter, den wir später gegen ∞ gehen lassen.



Figur 7.1

Auf der rechten Teilstrecke von $\omega-iT$ bis $\omega+iT$ gilt für den Integranden die Abschätzung

$$\Big|\frac{x^s}{s}\Big|\leqslant\frac{x^\omega}{\omega}=\frac{e^{-\omega|\log x|}}{\omega}\longrightarrow 0\qquad\text{für }\omega\to\infty,$$

also

$$\lim_{\omega\to\infty}\Big|\int_{\omega-iT}^{\omega+iT}x^s\,\frac{ds}{s}\Big|=0.$$

Daraus folgt

$$\int\limits_{c-iT}^{c+iT} x^s \frac{ds}{s} = \int\limits_{c-iT}^{\infty-iT} x^s \frac{ds}{s} - \int\limits_{c+iT}^{\infty+iT} x^s \frac{ds}{s}$$

Nun ist

$$\Big|\int\limits_{c-iT}^{\infty-iT} x^s \frac{ds}{s}\Big| \leqslant \int_c^\infty x^\sigma \frac{d\sigma}{|\sigma - iT|} \leqslant \frac{1}{T}\int_c^\infty e^{-\sigma|\log x|} d\sigma = \frac{e^{-c|\log x|}}{T|\log x|} = \frac{x^c}{T|\log x|}.$$

Das Integral $\int_{c+iT}^{\infty+iT}(\ldots)$ ist konjugiert komplex zum Integral $\int_{c-iT}^{\infty-iT}(\ldots)$, genügt also derselben Abschätzung. Daher folgt wegen $h(x) = 0$

$$|R(x,T)| = \Big|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT} x^s \frac{ds}{s}\Big| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2x^c}{T|\log x|} = \frac{x^c}{\pi T|\log x|}.$$

Es muss noch gezeigt werden, dass unabhängig von T gilt $|R(x,T)| \leqslant x^c$. Dazu ersetzen wir die Integrationsstrecke von $c - iT$ nach $c + iT$ durch den Kreisbogen K_+ von $c - iT$ nach $c + iT$ mit Radius $r = \sqrt{c^2 + T^2}$ (siehe Figur 7.1) und erhalten

$$\Big|\int_{c-iT}^{c+iT} x^s \frac{ds}{s}\Big| = \Big|\int_{K_+} x^s \frac{ds}{s}\Big| \leqslant \frac{x^c}{r} \cdot \pi r \leqslant 2\pi x^c.$$

Damit ist die Abschätzung von $R(x,T)$ im Fall $x < 1$ vollständig bewiesen.

(iii) Sei jetzt $x > 1$. Wir integrieren die Funtion x^s/s über den Rand des Rechtecks mit den Ecken $c - iT$, $c + iT$, $-\omega + iT$ und $-\omega - iT$, siehe Figur 7.1. Dieser Rand setzt sich aus der Strecke L von $c - iT$ nach $c + iT$ sowie dem Streckenzug Q_- von $c + iT$ über $-\omega + iT$ und $-\omega - iT$ nach $c - iT$ zusammen. Da die Funktion x^s/s holomorph ist bis auf einen Pol an der Stelle $s = 0$ mit Residuum 1, folgt aus dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L+Q_-} x^s \frac{ds}{s} = 1 = h(x),$$

also

$$R(x,T) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{Q_-} x^s \frac{ds}{s}.$$

Die Abschätzung des Integrals über Q_- erfolgt jetzt analog zu (ii). Auf dem linken Rand des Rechtecks von $-\omega + iT$ nach $-\omega - iT$ ist jetzt

$$\Big|\frac{x^s}{s}\Big| \leqslant \frac{x^{-\omega}}{\omega} = \frac{e^{-\omega\log x}}{\omega} \longrightarrow 0 \qquad \text{für } \omega \to \infty,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
|R(x,T)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\Bigg|\int\limits_{c+iT}^{-\infty+iT} x^s\frac{ds}{s} - \int\limits_{c-iT}^{-\infty-iT} x^s\frac{ds}{s}\Bigg| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\Bigg|\int\limits_{c+iT}^{-\infty+iT} x^s\frac{ds}{s}\Bigg| \leqslant \frac{1}{\pi T}\Bigg|\int\limits_{c}^{-\infty} x^\sigma d\sigma\Bigg| = \frac{x^c}{\pi T\log x}.
\end{aligned}$$

Damit ist im Fall $x > 1$ die erste Abschätzung von $R(x,T)$ bewiesen.
Es muss noch gezeigt werden, dass $|R(x,T)| \leqslant x^c$. Sei K_- der Kreisbogen mit Mittelpunkt 0 von $c+iT$ nach $c-iT$, siehe Figur 7.1. Der Radius ist gleich $r = \sqrt{c^2+T^2}$. Integration der Funktion x^s/s über die geschlossene Kurve $L+K_-$ ergibt nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L+K_-} x^s\frac{ds}{s} = 1 = h(x),$$

also

$$|R(x,T)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{K_-} x^s\frac{ds}{s}\Big| \leqslant \frac{x^c}{2\pi}\Big|\int_{K_-}\frac{ds}{s}\Big| \leqslant \frac{x^c}{2\pi}\cdot 2\pi = x^c.$$

Damit ist Lemma 7.7 vollständig bewiesen.

7.8. Für eine Dirichlet-Reihe $f(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ betrachten wir die Partialsummen der Koeffizienten

$$A(x) := \sum_{n\leqslant x} a_n.$$

Die Funktion $A : [1,\infty[\, \to \mathbb{C}$ hat Sprungstellen an den ganzen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und dort von rechts stetig, d.h.

$$A(n) = A(n+0) := \lim_{x\searrow n} A(x), \quad \text{aber} \quad A(n-0) := \lim_{x\nearrow n} A(x) = A(n) - a_n$$

Für den folgenden Umkehrsatz brauchen wir aber eine Funktion, die an den Sprungstellen den Mittelwert des rechts- und linksseitigen Grenzwerts annimmt. Dies ist

$$A^*(x) := {\sum_{n\leqslant x}}' a_n := \begin{cases} \sum\limits_{n\leqslant x} a_n, & \text{falls } x \text{ nicht ganz,} \\ \sum\limits_{n<x} a_n + \frac{1}{2}a_x, & \text{falls } x \text{ ganz.} \end{cases}$$

Mit der in Lemma 7.7 definierten Funktion

$$h(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x = 1, \\ 1 & \text{falls } x > 1, \end{cases}$$

lässt sich die Definition von A^* auch schreiben als

$$A^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h\Big(\frac{x}{n}\Big) a_n.$$

Es gilt $A^*(x) = A(x)$, falls x nicht ganz und

$$A^*(n) = \tfrac{1}{2}(A(n+0) + A(n-0)) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

7.9. Satz. *Sei* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *eine Dirichlet-Reihe mit absoluter Konvergenz-Abszisse* $\sigma_a(f) < \infty$ *und sei* $A^*(x) := {\sum_{n \leqslant x}}' a_n$. *Dann gilt für* $c > \max(0, \sigma_a(f))$ *und alle* $x > 0$*:*

a) $$A^*(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) x^s \frac{ds}{s}.$$

b) *Effektive Version: Für alle* $T > 0$ *ist*

$$A^*(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f(s) x^s \frac{ds}{s} \;+\; R(x,T)$$

mit

$$|R(x,T)| \leqslant \frac{x^c}{\pi T} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq x}}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^c |\log(x/n)|} + \begin{cases} \dfrac{c|a_x|}{\pi T}, & \text{falls } x \text{ ganz}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Es ist klar, dass wir nur b) beweisen müssen.
Sei $f_n(s) := \frac{a_n}{n^s}$. Dann gilt nach Lemma 7.7

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f_n(s) x^s \frac{ds}{s} = \frac{a_n}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \Big(\frac{x}{n}\Big)^s \cdot \frac{ds}{s} = a_n h\Big(\frac{x}{n}\Big) \;+\; R_n(x,T)$$

mit

$$|R_n(x,T)| \leqslant \begin{cases} \Big(\dfrac{x}{n}\Big)^c \dfrac{|a_n|}{\pi T |\log(x/n)|} & \text{für } x \neq n, \\ \dfrac{c|a_n|}{\pi T} & \text{für } x = n. \end{cases}$$

Summation über alle $n \in \mathbb{N}_1$ ergibt die Behauptung b). Die Vertauschung von Integration und Summation ist erlaubt, da die Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$ auf der Geraden $\mathrm{Re}(s) = c$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Als eine Anwendung von Satz 7.9 beweisen wir

7.10. Satz. *Sei*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

eine Dirichlet-Reihe, die für $\mathrm{Re}(s) > 1$ *absolut konvergiert und die sich in die Halbebene* $\{\mathrm{Re}(s) > \theta\}$, $(\frac{1}{2} \leqslant \theta < 1)$, *holomorph fortsetzen lässt. Für jedes* $\theta_1 > \theta$ *und jedes* $\varepsilon > 0$ *gelte*

$$f(s) = O(|t|^{\varepsilon}) \quad \text{für } |t| \to \infty \qquad (t = \mathrm{Im}(s))$$

gleichmäßig in $\{\mathrm{Re}(s) \geqslant \theta_1\}$. *Dann folgt für jedes* $\theta' > \theta$

$$A(x) := \sum_{n \leqslant x} a_n = O(x^{\theta'}) \quad \text{für } x \to \infty.$$

Insbesondere konvergiert die Dirichlet-Reihe von $f(s)$ *für alle* $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(s) > \theta$.

Beweis. Sei $\theta' > \theta$ vorgegeben. Wir definieren

$$\varepsilon := \tfrac{1}{3}(\theta' - \theta), \quad \theta_1 := \theta + \varepsilon \quad \text{und} \quad c := 2 + \varepsilon.$$

Nach Voraussetzung gibt es eine Konstante $K_1 > 0$, so dass

$$|f(\sigma + it)| \leqslant K_1 |t|^{\varepsilon} \quad \text{für alle } \sigma \geqslant \theta_1 \text{ und } |t| \geqslant 1.$$

Man kann x als halbganz und > 1 annehmen. Dann hat man für alle $n \geqslant 1$

$$\left|\log\Big(\frac{x}{n}\Big)\right| \geqslant \left|\log\Big(1 + \frac{1}{2n}\Big)\right| \geqslant \frac{1}{3n}.$$

Satz 7.9b) liefert deshalb

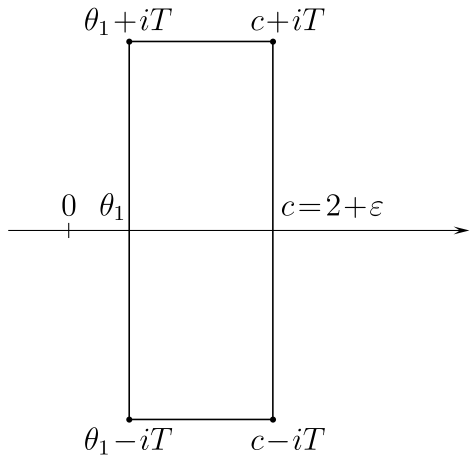
$$A(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f(s) x^s \frac{ds}{s} \; + \; R(x,T)$$

mit

$$|R(x,T)| \leqslant \frac{x^c}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{c-1}} \leqslant \frac{x^{2+\varepsilon}}{T} \cdot K_2 \qquad \text{mit } K_2 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{1+\varepsilon}} < \infty.$$

Wir wählen jetzt speziell $T := x^2$ und erhalten $R(x,T) = O(x^{\varepsilon}) = O(x^{\theta'})$.
Es bleibt also noch das Integral

$$\int_{c-iT}^{c+iT} f(s) x^s \frac{ds}{s}, \quad (T = x^2),$$



Figur 7.2

abzuschätzen. Dazu wenden wir den Cauchyschen Integralsatz auf die holomorphe Funktion $f(s)x^s/s$ und das Rechteck mit den Ecken $\theta_1 \pm iT$ und $c \pm iT$ an, siehe Figur 7.2. Da das Integral über den gesamten Rand des Rechtecks verschwindet, genügt es also, das Integral über den oberen, linken und unteren Rand des Rechtecks abzuschätzen.

Auf dem oberen Rand (Strecke von $\theta_1 + iT$ nach $c + iT$) gilt $|f(s)| \leqslant K_1 T^\varepsilon = K_1 x^{2\varepsilon}$, ferner $|x^s| = x^\sigma \leqslant x^{2+\varepsilon}$ und $|s| \geqslant T = x^2$, also

$$\left|\int_{\theta_1+iT}^{c+iT} f(s)x^s \frac{ds}{s}\right| \leqslant K_3 x^{2\varepsilon} x^{2+\varepsilon} \frac{c-\theta_1}{x^2} = O(x^{3\varepsilon}) = O(x^{\theta'}).$$

Eine analoge Abschätzung gilt für den unteren Rand. Es bleibt noch das Integral über den linken Rand abzuschätzen. Aus Symmetriegründen genügt es, das Integral über die Strecke von θ_1 nach $\theta_1 + iT$ zu betrachten. Wir zerlegen die Strecke in zwei Abschnitte, von θ_1 nach $\theta_1 + i$ und von $\theta_1 + i$ nach $\theta_1 + iT$. Für den ersten Teil gilt

$$\left|\int_{\theta_1}^{\theta_1+i} f(s)x^s \frac{ds}{s}\right| \leqslant x^{\theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_1+i} |f(s)| \frac{|ds|}{|s|} = O(x^{\theta_1}) = O(x^{\theta'}).$$

Das Integral auf dem zweiten Teil können wir wie folgt abschätzen:

$$\left|\int_{\theta_1+i}^{\theta_1+iT} f(s)x^s \frac{ds}{s}\right| \leqslant K_1 x^{\theta_1} \int_1^T t^\varepsilon \frac{dt}{t} \leqslant K_1 x^{\theta_1} \frac{T^\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{K_1}{\varepsilon} x^{\theta_1+2\varepsilon} = O(x^{\theta'}).$$

Imsgesamt zeigen diese Abschätzungen

$$\int_{c-iT}^{c+iT} f(s)x^s \frac{ds}{s} = O(x^{\theta'}),$$

was den Beweis von Satz 7.10 vervollständigt.