6. Nullstellen-Verteilung im kritischen Streifen

Wir haben in Kap. 5 gesehen, dass die Zetafunktion außer den sog. trivialen Nullstellen bei $z = -2k$, $k \in \mathbb{N}_1$, höchstens noch Nullstellen im *kritischen Streifen*

$$\{s \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$$

besitzt. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns näher mit den Nullstellen im kritischen Streifen. Zunächst einmal zeigen wir, dass es dort keine reellen Nullstellen gibt.

6.1. Satz. *Für alle* $\sigma \in \mathbb{R}$ *mit* $0 < \sigma < 1$ *gilt* $\zeta(\sigma) < 0$.

Beweis. Mithilfe der Euler-Mascheronischen Summenformel erhält man folgende Darstellung der Zetafunktion für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\mathrm{saw}(x)}{x^{s+1}}dx.$$

Für reelles $s = \sigma > 0$ lässt sich das Integral so abschätzen

$$\left|\int_1^\infty \frac{\mathrm{saw}(x)}{x^{\sigma+1}}dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\sigma+1}} = \frac{1}{2\sigma},$$

also

$$\zeta(\sigma) \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{1-\sigma} + \frac{1}{2} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} < 0, \qquad \text{q.e.d.}$$

6.2. Definition. Für eine reelle Zahl $T > 0$ definieren wir $N(T)$ als die Anzahl der Nullstellen $\zeta(s) = 0$ mit

$$0 < \mathrm{Re}(s) < 1 \text{ und } 0 < \mathrm{Im}(s) \leqslant T,$$

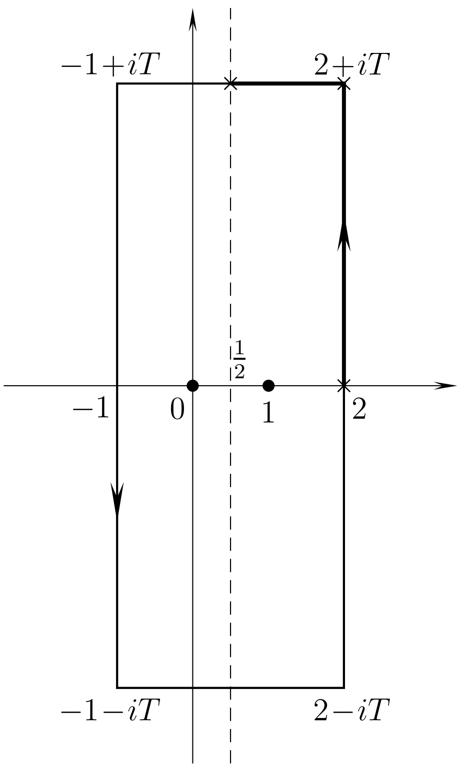
wobei evtl. vorhandene Nullstellen höherer Ordnung entsprechend mehrfach zu zählen sind. Da die Menge der Nullstellen der Zetafunktion invariant gegenüber komplexer Konjugation ist, ist dann $2N(T)$ die Anzahl der nicht-trivialen Nullstellen der Zetafunktion mit $|\,\mathrm{Im}(s)| \leqslant T$.

Ziel dieses Kapitels ist der Beweis der asymptotischen Beziehung

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\Big(\log\frac{T}{2\pi} - 1\Big) + O(\log T).$$

Zum Beweis verwenden wir die schon in Kap. 5 betrachtete Funktion

$$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$



Figur 6.1

die in $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ holomorph ist und in den Punkten $s = 0$ und $s = 1$ Pole 1. Ordnung hat. Die Nullstellen der Funktion $\xi(s)$ sind genau die nicht-trivialen Nullstellen der Zetafunktion. Sei nun $T > 0$ so gewählt, dass die Zetafunktion keine Nullstellen mit $\mathrm{Im}(s) = T$ besitzt. Sei R das Rechteck mit den Ecken $2 - iT$, $2 + iT$, $-1 + iT$ und $-1 - iT$, siehe Figur 6.1. Im Innern des Rechtecks hat die Funktion ξ zwei Pole und $2N(T)$ Nullstellen.

Nach dem Satz über das Null- und Polstellen-zählende Integral gilt daher mit $C := \partial R$

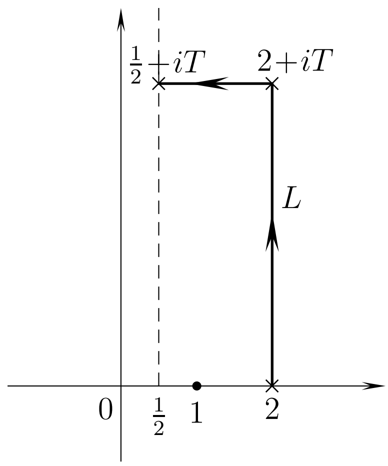
$$2N(T) - 2 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds,$$

und wegen der Funktionalgleichung $\xi(\frac{1}{2} + z) = \xi(\frac{1}{2} - z)$ folgt

$$N(T) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds,$$

wobei C_+ der in der oberen Halbebene befindliche Teil von C ist, d.h. der Streckenzug von 2 über $2 + iT$ und $-1 + iT$ nach -1.

Sei nun L der Streckenzug von 2 über $2 + iT$ nach $\frac{1}{2} + iT$ (siehe Figur 6.2) und L' der an der Geraden $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ gespiegelte Streckenzug von -1 über $-1 + iT$ nach $2 + iT$.



Figur 6.2

Dann gilt $C_+ = L - L'$, also

$$N(T) - 1 = \frac{1}{2\pi i}\Bigg(\underbrace{\int_L \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds}_{=:\,A} - \underbrace{\int_{L'} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds}_{=:\,A'}\Bigg).$$

Wegen $\xi(\frac{1}{2} - x + it) = \overline{\xi(\frac{1}{2} + x + it)}$ gilt $A' = \overline{A}$, also $A - A' = 2i\,\mathrm{Im}(A)$.
Damit haben wir bewiesen:

6.3. Satz. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

$$N(T) - 1 = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im} \int_L \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds.$$

6.4. Argumentfunktion einer holomorphen Funktion. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : U \to \mathbb{C}^*$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstellen in U. Dann kann lokal in U eine harmonische Funktion $\arg f : V \to \mathbb{R}$ definiert werden durch

$$f(z) = |f(z)| e^{i \arg f(z)}.$$

Es gilt also

$$\arg f(z) = \mathrm{Im}(\log f(z)).$$

Die Funktion $\arg f(z)$ ist nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt. Das Differential

$$d \arg f(z)$$

ist global eindeutig bestimmt. Ist U einfach zusammenhängend, so lässt sich ein in ganz U harmonischer Zweig von $\arg f$ wählen. Durch die Vorgabe des Wertes von

$\arg f(z_0)$ für einen festen Punkt $z_0 \in U$ (mit $f(z_0) = |f(z_0)|e^{i \arg f(z_0)}$) ist dann $\arg f$ in U eindeutig bestimmt.

6.5. *Anwendung auf die Funktion* ξ. In einer kleinen einfach zusammenhängenden offenen Umgebung U des Integrationswegs L gibt es einen eindeutig bestimmten Zweig $\arg \xi(s)$ der Argumentfunktion von ξ mit $\arg \xi(2) = 0$. (Man beachte, dass ξ auf der reellen Achse reelle Werte hat.) Die Formel von Satz 6.3 lässt sich damit schreiben als

$$N(T) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_L d \arg \xi(s) = \frac{1}{\pi} \arg \xi(\tfrac{1}{2} + iT).$$

Da $\xi(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$, gilt

$$\arg \xi(s) = \arg \left(\pi^{-s/2}\right) + \arg \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) + \arg \zeta(s).$$

Dabei sind die einzelnen Argumentfunktionen so zu wählen, dass sie an der Stelle $s = 2$ den Wert 0 haben.

Da $\pi^{-s/2} = e^{-\frac{s}{2}\log \pi}$, ist

$$\arg \left(\pi^{(\frac{1}{2}+iT)/2}\right) = \operatorname{Im}\Big((\tfrac{1}{4} + i\tfrac{T}{2}) \log \pi\Big) = -\frac{T}{2} \log \pi.$$

Damit erhalten wir

$$(1) \qquad N(T) - 1 = -\frac{T}{2\pi} \log \pi + \frac{1}{\pi} \arg \Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + iT\right).$$

6.6. Als nächstes wollen wir den zweiten Summanden $\arg \Gamma(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2})$ der obigen Formel untersuchen. Dazu verwenden wir die Stirlingsche Formel

$$\log \Gamma(z) = (z - \tfrac{1}{2}) \log z - z + \log \sqrt{2\pi} + O(1/y) \quad \text{für } y := |\operatorname{Im}(z)| \to \infty,$$

siehe Corollar A.11. In unserem Fall ist $z = \frac{1}{4} + i\frac{T}{2}$, also

$$\log \Gamma(\tfrac{1}{4} + i\tfrac{T}{2}) = (-\tfrac{1}{4} + i\tfrac{T}{2}) \log(\tfrac{1}{4} + i\tfrac{T}{2}) - (\tfrac{1}{4} + i\tfrac{T}{2}) + \log \sqrt{2\pi} + O(1/T).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \arg \Gamma(\tfrac{1}{4} + i\tfrac{T}{2}) &= \operatorname{Im}\left(\log \Gamma(\tfrac{1}{4} + i\tfrac{T}{2})\right) \\ &= \operatorname{Im}\left((-\tfrac{1}{4} + i\tfrac{T}{2})(\log |\tfrac{1}{4} + i\tfrac{T}{2}| + i \arctan 2T)\right) - \tfrac{T}{2} + O(1/T) \\ &= \tfrac{T}{2} \log |\tfrac{1}{4} + i\tfrac{T}{2}| - \tfrac{1}{4} \arctan 2T - \tfrac{T}{2} + O(1/T). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\log |\tfrac{1}{4} + i\tfrac{T}{2}| = \log \tfrac{T}{2} + \tfrac{1}{2} \log \left(1 + \tfrac{1}{4T^2}\right) = \log \tfrac{T}{2} + O(1/T^2)$$

und

$$\arctan 2T = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2T} = \frac{\pi}{2} + O(1/T).$$

setzt man dies oben ein, erhält man

$$\arg \Gamma(\tfrac{1}{4} + i\tfrac{T}{2}) = \tfrac{T}{2} \log \tfrac{T}{2} - \tfrac{T}{2} - \tfrac{\pi}{8} + O(1/T).$$

Zusammen mit (1) ergibt sich nun:

6.7. Satz. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + S(T) + O(1/T),$$

wobei

$$S(T) = \frac{1}{\pi} \int_L d \arg \zeta(s) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta(2+iT) + \frac{1}{\pi} \int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} d \arg \zeta(s).$$

6.8. Es bleibt also noch $S(T)$ abzuschätzen. Zunächst behaupten wir:

$$|\arg \zeta(2+iT)| < \frac{\pi}{4}.$$

Beweis hierfür. Für $\mathrm{Re}(s) \geqslant 2$ gilt $\zeta(s) = 1 + \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^s}$, also

$$|\zeta(s) - 1| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 \leqslant 0.6449\ldots < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

d.h. für $\mathrm{Re}(s) \geqslant 2$ liegt $\zeta(s)$ liegt innerhalb eines Kreises vom Radius $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ um den Punkt 1, der Winkel $\arg \zeta(s)$ ist deshalb dem Betrage nach kleiner als $\pi/4$, q.e.d.

Schwieriger abzuschätzen ist das Integral $\displaystyle\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} d \arg \zeta(s)$.

Dafür werden noch einige Hilfsmittel benötigt.

6.9. Hilfssatz. *Sei m die Anzahl der Nullstellen von* $\mathrm{Re}\, \zeta(s)$ *auf der Geraden*

$$s = \sigma + iT, \qquad \tfrac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2.$$

Dann ist

$$\Big| \int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} d \arg \zeta(s) \Big| \leqslant (k+1)\pi.$$

Beweis. Seien $\frac{1}{2} \leqslant \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_m \leqslant 2$ die Nullstellen von

$$\sigma \mapsto \mathrm{Re}\, \zeta(\sigma + iT), \qquad (T \text{ fest}).$$

Für $\sigma_k < \sigma < \sigma_{k+1}$ liegt $\zeta(\sigma+iT)$ entweder ganz in der rechten Halbebene $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ oder ganz in der linken Halbebene $\{\mathrm{Re}(z) < 0\}$. Der Winkel $\arg\zeta(\sigma + iT)$ variiert deshalb um weniger als π für $\sigma_k < \sigma < \sigma_{k+1}$, d.h.

$$\Big|\int_{\sigma_k+iT}^{\sigma_{k+1}+iT} d\arg\zeta(s)\Big| \leqslant \pi.$$

Analoges gilt für die Intervalle $[\frac{1}{2}, \sigma_1]$ und $[\sigma_m, 2]$. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgrund von Hilfssatz 6.9 müssen wir also die Nullstellen der Funktion

$$\mathrm{Re}\,\zeta(\sigma + iT), \quad \tfrac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2, \quad (T \text{ fest}),$$

abschätzen. Dazu benutzen wir einen Trick von Bäcklund. Da

$$2\,\mathrm{Re}\,\zeta(\sigma + iT) = \zeta(\sigma + iT) + \zeta(\sigma - iT),$$

ist die gesuchte Anzahl m der Nullstellen gleich der Anzahl der Nullstellen der Funktion

$$F(z) := \zeta(z + iT) + \zeta(z - iT)$$

auf dem Intervall $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$ der reellen Achse. Für $T \geqslant 2$ ist die Funktion F mindestens im Kreis $\{|z - 2| < 2\}$ holomorph. Die Zahl m ist kleiner-gleich der Anzahl der Nullstellen von holomorphen Funktion $F(z)$ im Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leqslant \frac{3}{2}\}$. Die Anzahl dieser Nullstellen kann mittels eines Satzes von Jensen abgeschätzt werden. Dem Beweis des Satzes von Jensen schicken wir einen einfachen Hilfssatz voraus.

6.10. Hilfssatz. *Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} \log|e^{it} - a|\,dt = 0.$$

Beweis. Für $|z| = 1$ gilt

$$|z - a| = |\overline{z} - \overline{a}| \cdot |z| = |1 - \overline{a}z|,$$

also

$$\log|e^{it} - a| = \log|1 - \overline{a}e^{it}|.$$

Nun ist die Funktion $z \mapsto \log|1 - \overline{a}z|$ in einer Umgebung von $\{|z| \leqslant 1\}$ harmonisch. Aus dem Mittelwertsatz für harmonische Funktionen folgt deshalb

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1 - \overline{a}e^{it}|\,dt = \log|1 - \overline{a}\cdot 0| = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

6.11. Satz (Jensen). *Sei $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ die Kreisscheibe vom Radius $R > 0$ und F eine in einer Umgebung von $\overline{D_R}$ holomorphe Funktion, die auf dem Rand ∂D_R nirgends verschwindet. Außerdem sei $F(0) \neq 0$. Dann gilt*

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(Re^{it})|dt + \sum_{k=1}^{n} \log\Big(\frac{|a_k|}{R}\Big)$$

Dabei sind $a_1, \ldots, a_n$ die Nullstellen von F in D_R (mit Vielfachheiten aufgezählt).

Beweis. Es genügt, den Satz für $R = 1$ zu beweisen. Sei

$$g(z) := \prod_{k=1}^{n}(z - a_k) \quad \text{und} \quad h(z) := \frac{F(z)}{g(z)}$$

Dann ist h holomorph und hat keine Nullstellen im abgeschlossenen Einheitskreis. Nach dem Mittelwertsatz für harmonische Funktionen gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|h(e^{it})|\,dt = \log|h(0)| = \log|F(0)| - \sum_{k=1}^{n} \log|a_k|.$$

Da nach Hilfssatz 6.10

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(e^{it})|\,dt = 0,$$

ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(e^{it})|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|h(e^{it})|\,dt,$$

woraus die Behauptung folgt.

6.12. Corollar. *Die Bezeichnungen von Satz 6.11 seien beibehalten. Für $0 < r < R$ sei $n_F(r)$ die Anzahl der Nullstellen von $F(z)$ mit $|z| \leqslant r$. Dann gilt*

$$n_F(r) \leqslant \frac{1}{\log(R/r)}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(Re^{it})|dt - \log|F(0)|\Big).$$

Beweis. Sind a_k, $k = 1, \ldots, n$, alle Nullstellen von F in D_R, so gilt nach Satz 6.11

$$\sum_k \log\Big(\frac{R}{|a_k|}\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(Re^{it})|dt - \log|F(0)|.$$

Für eine Nullstelle a_k mit $|a_k| \leqslant r$ ist $\log(R/|a_k|) \geqslant \log(R/r)$, also

$$n_F(r) \leqslant \frac{1}{\log(R/r)} \sum_k \log\Big(\frac{R}{|a_k|}\Big).$$

Daraus folgt die Behauptung.

6.13. Wir können jetzt das Corollar 6.12 anwenden, um die Anzahl m der Nullstellen der Funktion

$$F(z) := \zeta(z+iT) + \zeta(z-iT)$$

in der Kreisscheibe $|z-2| \leqslant \frac{3}{2}$ abzuschätzen. Wir wählen ein R mit $\frac{7}{4} \leqslant R \leqslant \frac{15}{8}$, so dass $F(z)$ auf dem Rand $\{|z-2| = R\}$ keine Nullstellen hat. Für alle z mit $|z-2| \leqslant R$ gilt dann $\mathrm{Re}(z) \geqslant \frac{1}{8}$. Mit $\rho = \frac{3}{2}$ ist $\log(R/\rho) \geqslant \log(7/6)$, also

$$m \leqslant N_F(\tfrac{3}{2}) \leqslant \frac{1}{\log(7/6)}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(2+Re^{it})|dt - F(2)\Big).$$

Aus der Formel

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\mathrm{saw}(x)}{x^{s+1}}dx \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0$$

folgt

$$|\zeta(s)| = O(|\operatorname{Im}(s)|) \quad \text{für } |\operatorname{Im}(s)| \to \infty \quad \text{gleichmäßig in } \mathrm{Re}(s) \geqslant \delta > 0,$$

also

$$|F(z)| = O(T), \qquad \text{d.h.} \quad \log|F(z)| = O(\log T).$$

Daraus folgt $m = O(\log T)$, und damit

$$\Big|\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} d\arg\zeta(s)\Big| = O(\log T).$$

Zusammen mit Satz 6.7 folgt

6.14. Satz. *Für die Anzahl $N(T)$ der nicht-trivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion mit $0 < \operatorname{Im}(s) \leqslant T$ gilt*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\Big(\log\frac{T}{2\pi} - 1\Big) + O(\log T).$$