4. Äquivalenzen zum Primzahlsatz

4.1. Für reelles $x > 0$ bezeichnen wir mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leqslant x$. Dies kann man auch so schreiben:

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1.$$

$\pi(x)$ ist eine Treppenfunktion mit Sprüngen der Höhe 1 bei allen Primzahlen. Natürlich gilt $\pi(x) = 0$ für $x < 2$. Einige andere Werte sind

x	10	100	1000	10^4	10^5	10^6	10^7
$\pi(x)$	4	25	168	1229	9592	78498	664579

Der Primzahlsatz macht eine Aussage über das asymptotische Verhalten von $\pi(x)$ für $x \to \infty$, nämlich

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

was bedeutet, dass der Quotient $\pi(x)/\frac{x}{\log x}$ für $x \to \infty$ gegen 1 konvergiert. Als Vorbereitung zum Beweis des Primzahlsatzes werden wir in diesem Kapitel einige Aussagen vorstellen, die zum Primzahlsatz äquivalent sind.

4.2. Die Tschebyscheffschen Funktionen ϑ und ψ.

Tschebyscheff führte 1852 zwei Funktionen ϑ und ψ ein, die zur Untersuchung der Primzahl-Verteilung oft bequemer sind als die Funktion $\pi(x)$.

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \log p,$$

$$\psi(x) := \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n).$$

Dabei ist Λ die von Mangoldtsche Funktion. Nach ihrer Definition gilt deshalb

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \log p = \sum_{m \geqslant 1} \sum_{p \leqslant x^{1/m}} \log p = \sum_{m \geqslant 1} \vartheta(x^{1/m}).$$

Die Summe über m braucht nur bis $\left\lfloor \dfrac{\log x}{\log 2} \right\rfloor$ erstreckt zu werden, da $\vartheta(x) = 0$ für $x < 2$.

Wir werden später sehen, dass die Aussagen $\vartheta(x) \sim x$ und $\psi(x) \sim x$ zum Primzahlsatz äquivalent sind. Dazu erst einige Vorbereitungen.

4.3. Lemma. *Für alle natürlichen Zahlen N gilt*

$$\prod_{p \leqslant N} p \leqslant 4^N.$$

Beweis. Wir betrachten für $n \geqslant 2$ den Binomialkoeffizienten

$$\binom{2n-1}{n-1} = \frac{(2n-1)(2n-2)\cdot\ldots\cdot(n+1)}{(n-1)!}$$

Für jede Primzahl p mit $n+1 \leqslant p \leqslant 2n-1$ gilt $p \mid \binom{2n-1}{n-1}$, da p den Zähler teilt, aber nicht den Nenner. Also folgt

$$\prod_{n<p<2n} p \leqslant \binom{2n-1}{n-1}.$$

Da $\binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$ beide in der Binomialformel für

$$(1+1)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} = 2^{2n-1}$$

vorkommen, gilt $\binom{2n-1}{n-1} \leqslant 2^{2n-2}$, also folgt

$$\prod_{n<p<2n} p \leqslant 4^{n-1}.$$

Wir beweisen jetzt die Behauptung des Lemmas

$$P(N) := \prod_{p \leqslant N} p \leqslant 4^N$$

durch vollständige Induktion nach N. Die Behauptung ist klar für $N \leqslant 2$. Sei also jetzt $N > 2$ und die Behauptung schon bewiesen für alle $N' < N$. Der Fall N gerade ist trivial, da dann $P(N) = P(N-1)$. Sei nun $N = 2n-1$ ungerade. Nach Induktions-Voraussetzung ist $P(n) \leqslant 4^n$. Daraus folgt

$$P(2n-1) = P(n) \prod_{n<p\leqslant 2n-1} p \leqslant 4^n 4^{n-1} = 4^{2n-1}, \quad \text{q.e.d.}$$

4.4. Corollar. *Für alle $x \geqslant 1$ gilt*

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p \leqslant x \log 4,$$

insbesondere $\vartheta(x) = O(x)$.

Bemerkung. Es ist $\log 4 = 1.386294\ldots$.

4.5. Corollar.

$$\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x}).$$

4.6. Satz (Tschebyscheff). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\quad \pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x},$

(ii) $\quad \vartheta(x) \sim x,$

(iii) $\quad \psi(x) \sim x.$

Um den Primzahlsatz zu beweisen, genügt es also zu zeigen, dass $\psi(x) \sim x$.

Beweis. Dass (ii) und (iii) äquivalent sind, folgt unmittelbar aus Corollar 4.5. Es ist also nur noch die Äquivalenz von (i) und (ii) zu beweisen. Dazu wenden wir die Abelsche partielle Summation auf die Summe $\sum_{n\leqslant x} a_n f(n)$ mit $a_n = \log p$, falls $n = p$ prim, $a_n = 0$ sonst, und $f(x) = 1/\log x$ an.

$$\pi(x) = \sum_{2\leqslant p\leqslant x} \log p \cdot \frac{1}{\log p} = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2} dt.$$

Wir zeigen, dass das letzte Integral von der Größenordnung $O\Big(\dfrac{x}{(\log x)^2}\Big)$ ist.

Nach Corollar 4.4 gilt $\vartheta(t)/t = O(1)$, wir brauchen also nur das Integral $\int dt/(\log t)^2$ zu untersuchen. Wir zerlegen den Integrationsweg in die Intervalle $[2, \sqrt{x}]$ und $[\sqrt{x}, x]$ (o.B.d.A. ist $x \geqslant 4$) und erhalten

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{1}{(\log t)^2} dt &= O(\sqrt{x}) + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{(\log t)^2} dt \\ &\leqslant O(\sqrt{x}) + \frac{x - \sqrt{x}}{(\log \sqrt{x})^2} = O\Big(\frac{x}{(\log x)^2}\Big).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + O\Big(\frac{x}{(\log x)^2}\Big)$$

und

$$\vartheta(x) = \pi(x)\log x + O\Big(\frac{x}{\log x}\Big).$$

Daraus folgt die Äquivalenz von (i) und (ii).

4.7. E. Landau hat 1911 weitere Äquivalenzen zum Primzahlsatz bewiesen, die mit der Möbiusschen μ-Funktion zusammenhängen. Man betrachte folgende Funktionen

$$M(x) := \sum_{n\leqslant x} \mu(n)$$

und

$$m(x) := \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n}$$

Nach Landau sind die Beziehungen $M(x) = o(x)$ und $m(x) = o(1)$ zum Primzahlsatz äquivalent. Nach Satz 4.6 braucht nur die Äquivalenz mit $\psi(x) \sim x$ bewiesen zu werden.

4.8. Satz. *Zwischen den Aussagen*

(i) $\qquad \psi(x) \sim x,$

(ii) $\qquad M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) = o(x),$

(iii) $\qquad m(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = o(1)$

bestehen die Implikationen (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i).

Dies bedeutet, dass es zum Beweis des Primzahlsatzes genügt, $m(x) = o(1)$, d.h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

zu beweisen.

Beweis. Wir beginnen zunächst mit dem einfacheren Teil

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Mit Abelscher partieller Summation erhält man

$$M(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} n = m(x)\, x - \int_1^x m(u) du.$$

Nach (iii) ist $m(x) = o(1)$, also $m(x)x = o(x)$; ebenso

$$\int_1^x m(u) du = o(x). \tag{1}$$

Letzteres sieht man z.B. so: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existert ein $x_0 \geqslant 1$, so dass $|m(x)| < \varepsilon$ für alle $x \geqslant x_0$, also

$$\Big| \int_1^x m(u) du \Big| \leqslant \Big| \int_1^{x_0} m(u) du \Big| + |x - x_0|\, \varepsilon$$

woraus folgt

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{1}{x} \Big| \int_1^x m(u) du \Big| \leqslant \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt (1) und damit $M(x) = o(x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Wir betrachten die folgende Dirichletreihe

$$F(s) := -\zeta'(s) - \zeta(s)^2 + 2\gamma\zeta(s) =: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

wobei γ die Euler-Mascheronische Konstante ist. Es gilt

$$a_n = \log n - \tau(n) + 2\gamma.$$

Übrigens ist die Funktion F an der Stelle $s = 1$ holomorph, denn die Berechnung der Hauptteile ergibt nach Satz 3.2

$$\frac{1}{(s-1)^2} - \Big(\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma}{(s-1)}\Big) + \frac{2\gamma}{(s-1)} = 0$$

Nach Satz 3.5 ist

$$\begin{aligned} A(x) &:= \sum_{n \leqslant x} a_n = \sum_{n \leqslant x} \log n - \sum_{n \leqslant x} \tau(n) + 2\gamma\lfloor x \rfloor \\ &= x(\log x - 1) + O(\log x) - x(\log x + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}) + 2\gamma x + O(1) \\ &= O(\sqrt{x}). \end{aligned} \tag{2}$$

Außerdem betrachten wir die Funktion

$$G(s) := F(s) \cdot \frac{1}{\zeta(s)} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s) + 2\gamma =: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}.$$

Es gilt $c = a * \mu$ und

$$c_n = \Lambda(n) - 1 + 2\gamma\delta_{1n},$$

also für $x \geqslant 1$

$$C(x) := \sum_{n \leqslant x} c_n = \psi(x) - \lfloor x \rfloor + 2\gamma = \psi(x) - x + O(1).$$

Die Behauptung (i) ist also äquivalent zu $C(x) = o(x)$. Es ist

$$C(x) = \sum_{n \leqslant x} (a * \mu)(n) = \sum_{k\ell \leqslant x} a_k \mu(\ell).$$

Unter Anwendung des Hyperbel-Tricks (Satz 3.4) erhalten wir für $1 \leqslant y \leqslant x$

$$C(x) = \sum_{k \leqslant y} a_k M\Big(\frac{x}{k}\Big) + \sum_{\ell \leqslant x/y} \mu(\ell) A\Big(\frac{x}{\ell}\Big) - A(y) M\Big(\frac{x}{y}\Big). \tag{3}$$

Nach (2) ist $A(z) = O(\sqrt{z})$, d.h. $|A(z)| \leqslant K\sqrt{z}$ für alle $z \geqslant 1$ mit einer Konstanten $K > 0$. Damit schätzen wir den 2. Summanden ab:

$$\Big|\sum_{\ell \leqslant x/y} \mu(\ell) A\Big(\frac{x}{\ell}\Big)\Big| \leqslant K\sqrt{x} \sum_{\ell \leqslant x/y} \frac{1}{\sqrt{\ell}} \leqslant K'\sqrt{x}\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{K'}{\sqrt{y}} \cdot x.$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ kann man daher y so groß wählen, dass

$$\Big|\sum_{\ell \leqslant x/y} \mu(\ell) A\Big(\frac{x}{\ell}\Big)\Big| < \varepsilon x \quad \text{für alle } x \geqslant y.$$

Da nach Voraussetzung $M(z) = o(z)$, folgt nun aus (3)

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{|C(x)|}{x} \leqslant \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus $C(x) = o(x)$, q.e.d.

Für unseren späteren Beweis des Primzahlsatzes reicht die in Satz 4.8 bewiesene Implikation

$$m(x) = o(1) \quad \Longrightarrow \quad \psi(x) \sim x$$

aus, es ist jedoch interessant, auch die Umkehrung zu beweisen.

4.9. Satz. *Zwischen den Aussagen*

(i) $\psi(x) \sim x,$

(ii) $M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) = o(x),$

(iii) $m(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = o(1)$

bestehen die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Beweis. Wir führen als Zwischenschritt die weitere Aussage

(ii)′ $H(x) := \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \log n = o(x \log x).$

ein und beweisen (i) $\Rightarrow$ (ii)′ $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(i) $\Rightarrow$ (ii)′. Wir gehen aus von der Identität

$$\Big(\frac{1}{\zeta(s)}\Big)' = \Big(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)\Big)\frac{1}{\zeta(s)} + 1,$$

woraus die folgende Identität zwischen arithmetischen Funktionen folgt

$$-\mu \log = (\Lambda - \mathtt{1}) * \mu + \delta_1$$

Daraus ergibt sich durch Summation aller Koeffizienten mit Index $\leqslant x$

$$-H(x) = -\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \log n = \sum_{k\ell \leqslant x} (\Lambda(k) - 1)\mu(\ell) \ + \ 1.$$

Wir setzen $g(x) := \psi(x) - \lfloor x \rfloor$. Nach Voraussetzung (i) gilt $g(x) = o(x)$. Die obige Gleichung liefert mit dem Hyperbel-Trick für $1 \leqslant y \leqslant x$

$$-H(x) = 1 + \sum_{k \leqslant y} (\Lambda(k) - 1) M\Big(\frac{x}{k}\Big) + \sum_{\ell \leqslant x/y} \mu(\ell) g\Big(\frac{x}{\ell}\Big) - g(y) M\Big(\frac{x}{y}\Big).$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und y so groß gewählt, dass $|g(z)| \leqslant \varepsilon z$ für alle $z \geqslant y$. Dann lässt sich die zweite Summe wie folgt abschätzen:

$$\Big| \sum_{\ell \leqslant x/y} \mu(\ell) g\Big(\frac{x}{\ell}\Big) \Big| \leqslant \varepsilon x \sum_{\ell \leqslant x/y} \frac{1}{\ell} \leqslant \varepsilon x (\log x + 1).$$

Da trivialerweise $|M(x)| \leqslant x$, folgt daraus

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{|H(x)|}{x \log x} \leqslant \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein kann, heißt das $H(x) = o(x \log x)$, q.e.d.

(ii)$'$ $\Leftrightarrow$ (ii). Wir wenden auf $H(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n) \log n$ die Abelsche partielle Summation an und erhalten

$$H(x) = M(x) \log x - \int_1^x \frac{M(t)}{t} dt = M(x) \log x + O(x).$$

Dies zeigt die Äquivalenz von $M(x) = o(x)$ und $H(x) = o(x \log x)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sei $x \geqslant 1$ eine reelle Zahl, L eine positive ganze Zahl und $z := Lx$. Wir gehen aus von der Formel $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1n}$. Summation über alle $n \leqslant z$ ergibt

$$1 = \sum_{k\ell \leqslant z} \mu(k) \cdot 1.$$

Mit dem Hyperbel-Trick zur Zerlegung $z = xL$ erhält man

$$1 = \sum_{k \leqslant x} \mu(k) \Big\lfloor \frac{z}{k} \Big\rfloor + \sum_{\ell \leqslant L} M\Big(\frac{z}{\ell}\Big) - M(x) \Big\lfloor \frac{z}{x} \Big\rfloor$$

Multipliziert man die Gleichung mit -1 und addiert auf beiden Seiten $\sum_{k \leqslant x} \mu(k) z/k$, ergibt sich

$$(4) \qquad z\sum_{k\leqslant x}\frac{\mu(k)}{k} = 1 + \sum_{k\leqslant x}\mu(k)\Big(\frac{z}{k} - \Big\lfloor\frac{z}{k}\Big\rfloor\Big) - \sum_{\ell\leqslant L} M\Big(\frac{z}{\ell}\Big) + M(x)L.$$

Wir müssen nun die rechte Seite von (4) nach oben abschätzen. Trivialerweise ist

$$(5) \qquad \left|\sum_{k\leqslant x}\mu(k)\Big(\frac{z}{k} - \Big\lfloor\frac{z}{k}\Big\rfloor\Big)\right| \leqslant x.$$

Um die restlichen zwei Terme abzuschätzen, setzen wir

$$\varepsilon(x) := \sup_{y\geqslant x}\frac{|M(y)|}{y}.$$

Die Funktion $\varepsilon(x)$ ist monoton fallend und nach Voraussetzung (ii) gilt $\varepsilon(x) \to 0$ für $x \to \infty$. Damit erhält man, da $z/\ell \geqslant x$,

$$(6) \qquad \left|\sum_{\ell\leqslant L} M\Big(\frac{z}{\ell}\Big)\right| \leqslant \varepsilon(x)z\sum_{\ell\leqslant L}\frac{1}{\ell} \leqslant \varepsilon(x)z(\log L + 1)$$

und

$$(7) \qquad |M(x)L| \leqslant \varepsilon(x)xL = \varepsilon(x)z.$$

Setzt man (5), (6), (7) in (4) ein und dividiert durch z, so kommt

$$(8) \qquad |m(x)| = \left|\sum_{k\leqslant x}\frac{\mu(k)}{k}\right| \leqslant \frac{1}{xL} + \frac{1}{L} + \varepsilon(x)(\log L + 2).$$

Sei nun $\delta > 0$ beliebig vorgegeben. Dann wählen wir zunächst L so groß, dass

$$2/L < \delta/2$$

Anschließend können wir x_0 so groß wählen, dass

$$\varepsilon(x_0) \leqslant \frac{1}{2(\log L + 2)}.$$

Dann folgt aus (8)

$$|m(x)| < \delta \quad \text{für alle } x \geqslant x_0.$$

Da $\delta > 0$ beliebig klein war, ist damit die Behauptung $m(x) = o(1)$ bewiesen.