3. Euler-Mascheronische Konstante und Dirichletscher Teilersatz

3.1. Satz und Definition. *Der folgende Limes existiert:*

$$\gamma := \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n} - \log x\right).$$

Genauer gilt

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(1/x)$$

mit

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}dx = 0.57721566\ldots.$$

Die Zahl γ heißt Euler-Mascheronische Konstante.

Beweis. Wir wenden die Abelsche partielle Summation für $\sum_{n\leqslant x} a_n f(n)$ mit $a_n = 1$ und $f(x) = 1/x$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n} &= \frac{\lfloor x\rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2}dt \\
&= 1 - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x} + \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt \\
&= \log x + \left(1 - \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt\right) - \frac{x-\lfloor x\rfloor}{x} + \int_x^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt \\
&= \log x + \gamma + O\Big(\frac{1}{x}\Big)
\end{aligned}$$

mit

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt.$$

3.2. Satz. *Mit der Euler-Mascheronischen Konstanten γ gilt*

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma.$$

Dies bedeutet, dass die Laurent-Entwicklung der Zetafunktion um den Punkt $s = 1$ folgende Gestalt hat

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{\nu=1}^\infty c_\nu (s-1)^\nu.$$

Beweis. Sei $\mathrm{Re}(s) > 1$. Wir wenden die Abelsche partielle Summation für $\sum_{n\leqslant x} a_n f(n)$ mit $a_n = 1$ und $f(x) = 1/x^s$ an und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s} &= \frac{\lfloor x\rfloor}{x^s} + s\int_1^x \frac{\lfloor t\rfloor}{t^{s+1}}dt \\ &= s\int_1^x \frac{dt}{t^s} - s\int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^{s+1}}dt + \frac{\lfloor x\rfloor}{x^s}.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_1^x \frac{dt}{t^s} = \frac{-1}{s-1}\cdot\frac{1}{t^{s-1}}\Big|_1^x = \frac{1}{s-1}\Big(1-\frac{1}{x^{s-1}}\Big).$$

Setzen wir dies oben ein, so kommt

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s} = \frac{s}{s-1}\Big(1-\frac{1}{x^{s-1}}\Big) - s\int_1^x \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^{s+1}}dt + \frac{\lfloor x\rfloor}{x^s}.$$

Jetzt lassen wir x gegen ∞ gehen und erhalten

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{s}{s-1} - \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^{s+1}}dt \\ &= \frac{1}{s-1} + 1 - s\int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^{s+1}}dt.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung für $\zeta(s)$ gilt sogar für alle $s \neq 1$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$. Es folgt

$$\lim_{s\to 1}\Big(\zeta(s) - \frac{s}{s-1}\Big) = 1 - \int_1^\infty \frac{t-\lfloor t\rfloor}{t^2}dt = \gamma, \quad \text{q.e.d.}$$

3.3. Der Hyperbel-Trick. In der analytischen Zahlentheorie tauchen öfter Summen der Gestalt

$$\sum_{k\ell\leqslant x} c_{k\ell}$$

auf. Dabei sind $c_{k\ell}$ $(k,\ell \geqslant 1)$ komplexe Zahlen, x eine positive reelle Zahl und es wird über alle Paare k,ℓ positiver ganzer Zahlen summiert, für die $k\ell \leqslant x$ ist. Der Summationsbereich ist also

$$H_x := \{(k,\ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 : k\ell \leqslant x\}.$$

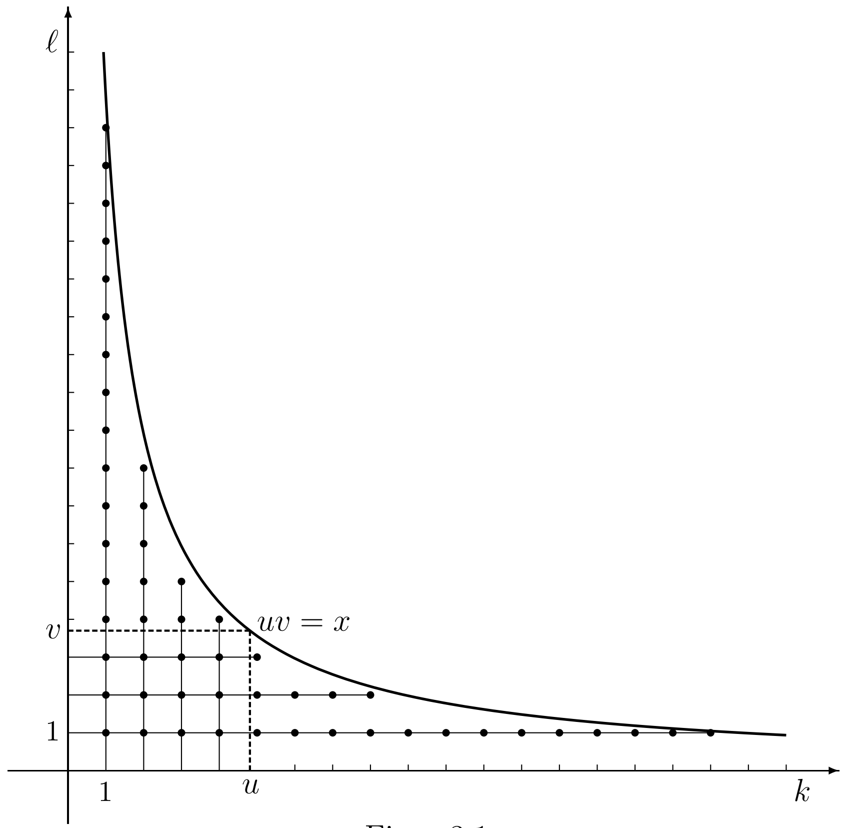
Dies sind alle Gitterpunkte mit positiven ganzzahligen Koordinaten der ξ-η-Ebene, die unterhalb oder auf der Hyperbel $\xi\eta = x$ liegen. Seien nun u, v positive reelle Zahlen mit $uv = x$ und

$$\begin{aligned}H'_x &:= \{(k,\ell) \in H_x : k \leqslant u\} = \{(k,\ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 : k \leqslant u,\ \ell \leqslant x/k\}, \\ H''_x &:= \{(k,\ell) \in H_x : \ell \leqslant v\} = \{(k,\ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 : \ell \leqslant v,\ k \leqslant x/\ell\}.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$H_x = H'_x \cup H''_x \quad \text{und} \quad H'_x \cap H''_x = \{(k,\ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 : k \leqslant u,\ \ell \leqslant v\},$$

vgl. Figur 3.1. Hier ist H'_x die Menge der durch die vertikalen Linien verbundenen Gitterpunkte und H''_x die Menge der durch die horizontalen Linien verbundenen Gitterpunkte.



Figur 3.1

Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k\ell \leqslant x} c_{k\ell} &= \sum_{(k,\ell)\in H_x} c_{k\ell} \\
&= \sum_{(k,\ell)\in H'_x} c_{k\ell} + \sum_{(k,\ell)\in H''_x} c_{k\ell} - \sum_{(k,\ell)\in H'_x \cap H''_x} c_{k\ell} \\
&= \sum_{k\leqslant u} \Big(\sum_{\ell \leqslant x/k} c_{k\ell} \Big) + \sum_{\ell \leqslant v} \Big(\sum_{k \leqslant x/\ell} c_{k\ell} \Big) - \sum_{\substack{k\leqslant u \\ \ell \leqslant v}} c_{k\ell}
\end{aligned}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist $c_{k\ell} = a_k b_\ell$ mit Folgen (a_k) und (b_ℓ). Aus der obigen Formel ergibt sich unmittelbar

3.4. Satz. *Seien* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *und* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *zwei Folgen komplexer Zahlen. Für reelles* $x>0$ *werde definiert*

$$A(x) := \sum_{n\leqslant x} a_n \quad \textit{und} \quad B(x) := \sum_{n\leqslant x} b_n.$$

Dann gilt für alle reellen $u, v, x > 0$ *mit* $uv = x$

$$\sum_{k\ell\leqslant x} a_k b_\ell = \sum_{k\leqslant u} a_k B\Big(\frac{x}{k}\Big) + \sum_{\ell\leqslant v} b_\ell A\Big(\frac{x}{\ell}\Big) - A(u)B(v).$$

Als Anwendung von Satz 3.4 beweisen wir nun den *Dirichletschen Teilersatz*. Dieser macht eine Aussage über die durchschnittliche Teilerzahl von natürlichen Zahlen.

3.5. Satz (Dirichlet). *Für eine natürliche Zahl* n *bezeichne* $\tau(n)$ *die Anzahl der positiven Teiler von* n*. Dann gilt für reelles* $x>0$

$$\sum_{n\leqslant x} \tau(n) = x(\log x + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}).$$

Dabei ist γ *die Euler-Mascheronische Konstante.*

Die mittlere Teilerzahl der natürlichen Zahlen $\leqslant x$ ist also etwa $\log x + 2\gamma - 1$. Der Fehler ist von der Größenordnung $O(1/\sqrt{x})$.

Beweis. Die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl n ist gleich der Anzahl der Paare $(k,\ell) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1$ mit $k\ell = n$. Dies lässt sich schreiben als

$$\tau(n) = \sum_{k\ell = n} 1.$$

Daraus folgt

$$\sum_{n\leqslant x} \tau(n) = \sum_{k\ell\leqslant x} 1 = \sum_{k\ell\leqslant x} a_k b_\ell$$

mit $a_k = b_\ell = 1$ für alle $k, \ell \geqslant 1$. Mit den Bezeichnungen von Satz 3.4 ist dann

$$A(x) = B(x) = \lfloor x \rfloor$$

und es folgt mit $u = v = \sqrt{x}$

$$(1) \qquad \sum_{n\leqslant x} \tau(n) = \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} \Big\lfloor \frac{x}{k} \Big\rfloor + \sum_{\ell\leqslant\sqrt{x}} \Big\lfloor \frac{x}{\ell} \Big\rfloor - \lfloor\sqrt{x}\rfloor^2 = 2\sum_{n\leqslant\sqrt{x}} \Big\lfloor \frac{x}{n} \Big\rfloor - x + O(\sqrt{x}).$$

Nun folgt mit Satz 3.1

$$\sum_{n\leqslant\sqrt{x}} \Big\lfloor \frac{x}{n} \Big\rfloor = \sum_{n\leqslant\sqrt{x}} \frac{x}{n} + O(\sqrt{x})$$

$$\begin{aligned} &= x(\log\sqrt{x} + \gamma + O(1/\sqrt{x})) + O(\sqrt{x}) \\ &= \frac{x}{2}(\log x + 2\gamma) + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Setzt man dies in (1) ein, ergibt sich die Behauptung.