10. Äquivalenzen zur Riemannschen Vermutung

Satz. *Sei* $\frac{1}{2} \le \vartheta < 1$. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathcal{O}(x^{\vartheta+\epsilon})$ *für alle* $\epsilon > 0$,

(ii) $\vartheta(x) = x + \mathcal{O}(x^{\vartheta+\epsilon})$ *für alle* $\epsilon > 0$,

(iii) $\psi(x) = x + \mathcal{O}(x^{\vartheta+\epsilon})$ *für alle* $\epsilon > 0$,

(iv) $M(x) = \mathcal{O}(x^{\vartheta+\epsilon})$ *für alle* $\epsilon > 0$,

(v) $\mathrm{RV}(\vartheta)$.

Dabei ist $M(x) := \sum_{n\le x} \mu(n)$ *die* Mertens-Summe.

Wir werden den Beweis in Etappen führen. Zunächst zeigen wir die Äquivalenz der Aussagen (i) - (iii) und die Implikationen „(iii) $\Rightarrow$ (v)“ und „(iv) $\Rightarrow$ (v)“. Dann werden wir die *Perronsche Formel* und einige weitere Aussagen aus der Theorie der Dirichlet-Reihen beweisen, so dass sich die verbleibenden Implikationen „(v) $\Rightarrow$ (iii)“ und „(v) $\Rightarrow$ (iv)“ schließlich als leichte Folgerung aus dem bereits Bekannten ergeben werden.

Erinnerung. Es ist $\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log u}$, und partielle Integration liefert

$$\mathrm{li}(x) = \frac{u}{\log u}\bigg|_2^x + \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log^2 u} = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log^2 u} + \mathcal{O}(1).$$

Direkt aus der Definition von $\mathrm{li}(x)$ folgt außerdem $\mathrm{li}(x) = \sum_{2\le n\le x} \frac{1}{\log n} + \mathcal{O}(1)$.

10.1. *Beweis der Äquivalenz von* (i), (ii) *und* (iii). In Kapitel 4 wurde $\psi(x) = \vartheta(x) + \mathcal{O}(x^{1/2})$ gezeigt. Also gilt „(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)“. Zu „(ii) $\Rightarrow$ (i)“: Es ist

$$\pi(x) = \sum_{p\le x} 1 = \sum_{p\le x} \frac{\log p}{\log p},$$

so dass man mit abelscher partieller Summation und $\vartheta(x) = x + R(x)$

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(u)}{u\log^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log^2 u} + \frac{R(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{R(u)}{u\log^2 u}\,\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{li}(x) + \frac{R(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{R(u)}{u\log^2 u}\,\mathrm{d}u + \mathcal{O}(1)\end{aligned}$$

[0]Mitschrift von Andreas Wadhwa. Letzte Änderung: 2009-11-11

erhält, also $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathcal{O}(x^{\vartheta+\epsilon})$, falls $R(x) = \mathcal{O}(x^{\vartheta+\epsilon})$. Zu „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Mit

$$a_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ prim,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist

$$\vartheta(x) - x = \sum_{2 \le n \le x} \log n \cdot \Big(a_n - \frac{1}{\log n}\Big) + \mathcal{O}(1),$$

und mit abelscher partieller Summation und $R(x) := \pi(x) - \mathrm{li}(x)$ erhält man

$$\vartheta(x) - x = \log x \cdot \big(R(x) + \mathcal{O}(1)\big) - \int_2^x \frac{R(u) + \mathcal{O}(1)}{u}\,\mathrm{d}u + \mathcal{O}(1).$$

Ist also $R(x) = \mathcal{O}(x^{\vartheta+\epsilon})$, so folgt

$$\vartheta(x) - x = \log x \cdot \mathcal{O}(x^{\vartheta+\epsilon}) + \mathcal{O}(x^{\vartheta+\epsilon}) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(x^{\vartheta+2\epsilon}).$$ □

10.2. *Beweis der Implikation „(iii) $\Rightarrow$ (v)“.* Wir betrachten die Funktion $F(s) := -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$. Die Dirichlet-Reihe

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s} =: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

konvergiert für $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Wir zeigen, dass unter der Voraussetzung (iii) die Dirichlet-Reihe sogar für $\mathrm{Re}\, s > \vartheta$ konvergiert, woraus dann (v) folgt.

Es ist

$$A(x) := \sum_{n \le x} a_n = \sum_{n \le x} \big(\Lambda(n) - 1\big) = \psi(x) - \lfloor x \rfloor = \mathcal{O}(x^{\vartheta+\epsilon})$$

für alle $\epsilon > 0$ (nach (iii)). Abelsche partielle Summation liefert

$$\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n) - 1}{n^s} = \frac{A(x)}{x^s} + s \int_1^x \frac{A(u)}{u^{s+1}}\,\mathrm{d}u,$$

so dass sich für $\mathrm{Re}\, s > 1$ (und $\vartheta + \epsilon < 1$)

$$F(s) = s \int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x$$

ergibt. Die rechte Seite existiert für $\mathrm{Re}\, s > \vartheta$ und stellt dort eine holomorphe Funktion von s dar. (Dass die Dirichlet-Reihe dann auch konvergiert, folgt aus dem Cauchy-Kriterium unter Verwendung „desselben“ Integrals $\int A(x)/x^{s+1}\,\mathrm{d}x$.) □

10.3. *Beweis der Implikation „(iv) $\Rightarrow$ (v)".* Hier kann man den gleichen Beweis wie bei „(iii) $\Rightarrow$ (v)" führen, wobei man jetzt die Funktion $F(s) := \frac{1}{\zeta(s)}$ mit der Dirichlet-Reihe

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

betrachtet. $\square$

10.4. Lemma (Perronsche Formel). *Sei*

$$h(x) := \begin{cases} 0 & \textit{für } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2} & \textit{für } x = 1, \\ 1 & \textit{für } x > 1. \end{cases}$$

Dann gilt für $x > 0$ und $\kappa > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} = h(x).$$

Dabei ist $\int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} := \lim_{T\to\infty} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}$ zu verstehen.
Genauer gilt

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} - h(x) \right| \le \begin{cases} x^\kappa \min\big(1, \frac{1}{\pi T |\log x|}\big) & \textit{für } x \ne 1, \\ \min\big(\frac{1}{2}, \frac{\kappa}{\pi T}\big) & \textit{für } x = 1. \end{cases}$$

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall $x = 1$. Hier ist

$$\int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{\mathrm{d}s}{s} = \log s \Big|_{\kappa - iT}^{\kappa + iT},$$

wobei

$$\log s = \log |s| + i\alpha$$

den Hauptwert des Logarithmus in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ bezeichnet. Für $s = \kappa + iT$ ist

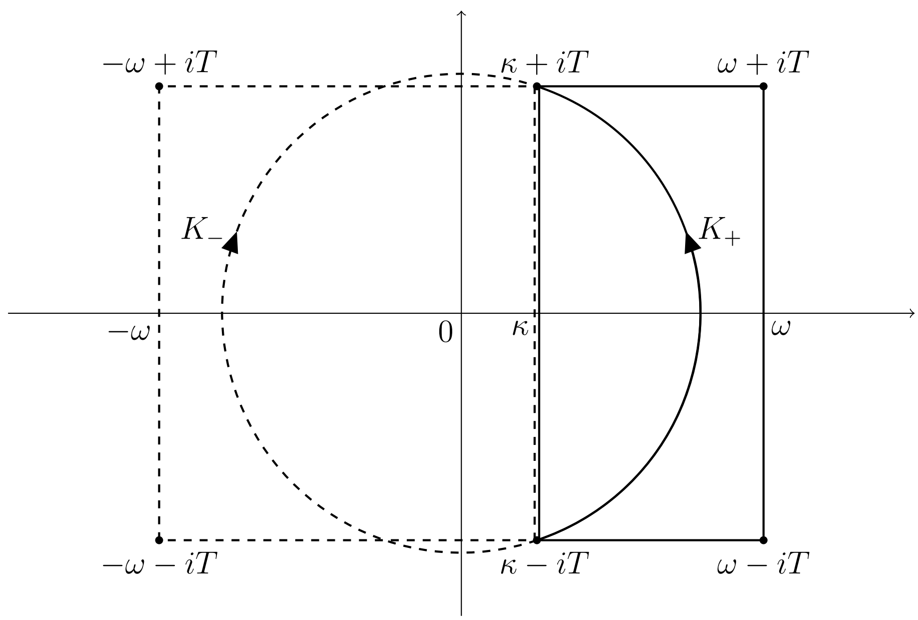
$$\alpha = \arctan\Big(\frac{T}{\kappa}\Big) \qquad \Big(\to \frac{\pi}{2} \text{ für } T \to \infty\Big),$$

also $\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{\mathrm{d}s}{s} = 2i \arctan\big(\frac{T}{\kappa}\big)$. Wegen

$$\arctan\Big(\frac{T}{\kappa}\Big) = \frac{\pi}{2} - \beta \text{ mit } \beta = \arctan\Big(\frac{\kappa}{T}\Big) \le \min\Big(\frac{\kappa}{T}, \frac{\pi}{2}\Big)$$

(hier wurde benutzt, dass die Steigung des Arcus-Tangens höchstens 1 ist) folgt die Behauptung im Fall $x = 1$.

Sei nun $x < 1$. Das Integral $\int x^s \frac{\mathrm{d}s}{s}$ über den Rand des durchgezogen gezeichneten Rechtecks in der Skizze



verschwindet. Zudem gilt auf dem rechten Rand (des Rechtecks)

$$\frac{|x^s|}{|s|} \le \frac{|x^s|}{\omega} = \frac{x^\omega}{\omega} = \frac{e^{\omega \log x}}{\omega} = \frac{e^{-\omega |\log x|}}{\omega} \longrightarrow 0 \ \text{ für } \ \omega \longrightarrow \infty.$$

Da man sowohl auf dem oberen als auch auf dem unteren Rand $|s| \ge T$ und $|x^s| = e^{-\sigma|\log x|}$ hat, folgt

$$\left| \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \right| \le 2 \int_\kappa^\infty e^{-\sigma|\log x|} \frac{\mathrm{d}\sigma}{T} = \frac{2}{T|\log x|} e^{-\kappa|\log x|} = \frac{2x^\kappa}{T|\log x|}.$$

Dies ist die zweite behauptete Abschätzung im Fall $x < 1$. Für die erste Abschätzung ersetzen wir den Integrationsweg von $\kappa - iT$ nach $\kappa + iT$ durch den durchgezogen gezeichneten Kreisbogen K_+ mit Radius $R = \sqrt{\kappa^2 + T^2}$ und erhalten

$$\left| \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \right| = \left| \int_{K_+} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \right| \le \frac{x^\kappa}{R} \cdot \pi R \le 2\pi x^\kappa,$$

womit der Fall $x < 1$ abgehandelt ist.

Sei nun $x > 1$. Wir integrieren die Funktion $\frac{x^s}{s}$ einmal im mathematisch positiven Sinne über den Rand des gestrichelt gezeichneten Rechtecks in obiger Skizze. Nun hat $\frac{x^s}{s}$ bei $s = 0$ das Residuum 1, also hat das Integral über das Rechteck den Wert $2\pi i$. Analog zu oben gilt jetzt auf dem linken Rand des Rechtecks

$$\frac{|x^s|}{|s|} \le \frac{|x^s|}{\omega} = \frac{x^{-\omega}}{\omega} = \frac{e^{-\omega \log x}}{\omega} = \frac{e^{-\omega |\log x|}}{\omega} \longrightarrow 0 \ \text{ für } \ \omega \longrightarrow \infty,$$

und sowohl auf dem oberen als auch auf dem unteren Rand hat man $|s| \geq T$ sowie $|x^s| = x^\sigma = e^{\sigma \log x}$, so dass

$$\left| \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} - 2\pi i \right| \leq 2 \int_{-\infty}^{\kappa} e^{\sigma \log x} \frac{\mathrm{d}\sigma}{T} = \frac{2}{T \log x} e^{\kappa \log x} = \frac{2x^\kappa}{T|\log x|}$$

herauskommt und damit die zweite behauptete Abschätzung im Fall $x > 1$ gezeigt ist. Für die erste ersetzen wir (unter Beachtung des Residuums 1 von $\frac{x^s}{s}$ bei $s = 0$) den Integrationsweg von $\kappa - iT$ nach $\kappa + iT$ durch den gestrichelt gezeichneten Kreisbogen K_- (mit Radius $R = \sqrt{\kappa^2 + T^2}$) und erhalten

$$\left| \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} - 2\pi i \right| = \left| \int_{K_-} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \right| \leq \frac{x^\kappa}{R} \cdot 2\pi R = 2\pi x^\kappa,$$

womit auch der Fall $x > 1$ abgehandelt und damit das Lemma bewiesen ist. □

10.5. Satz (Perron). *Sei $F(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n^s}$ eine Dirichlet-Reihe mit $\sigma_a(F) < \infty$, und sei $A(x) := \sum_{n \leq x} a_n$. $\kappa > \max\bigl(0, \sigma_a(F)\bigr)$, $T > 0$ und $x \geq 1$*

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + \mathcal{O}\left(x^\kappa \sum_{n=1}^\infty \frac{|a_n|}{n^\kappa \bigl(1 + T|\log(x/n)|\bigr)} \right).$$

Beweis. Ist x nicht ganz, so gilt

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n=1}^\infty a_n h\Bigl(\frac{x}{n}\Bigr)$$

mit der Funktion h aus der Perronschen Formel, und ist x ganz, so gilt

$$A(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n h\Bigl(\frac{x}{n}\Bigr) + \frac{1}{2} a_x.$$

Mit der effektiven Abschätzung der Perronschen Formel erhält man für $x \neq n$

$$\begin{aligned}
&\left| a_n h\Bigl(\frac{x}{n}\Bigr) - a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{x^s}{n^s} \frac{\mathrm{d}s}{s} \right| \leq |a_n| \frac{x^\kappa}{n^\kappa} \cdot \min\Bigl(1, \frac{1}{\pi T |\log(x/n)|}\Bigr) \\
&\quad = \frac{x^\kappa}{n^\kappa} \frac{|a_n|}{\max\bigl(1, \pi T |\log(x/n)|\bigr)} \leq \frac{x^\kappa}{n^\kappa} \frac{|a_n|}{\frac{1}{2}\bigl(1 + \pi T |\log(x/n)|\bigr)} \\
&\quad \leq 2 \frac{x^\kappa}{n^\kappa} \frac{|a_n|}{1 + T|\log(x/n)|}
\end{aligned}$$

und für $x = n$

$$\left| a_n h\Big(\frac{x}{n}\Big) - a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{x^s}{n^s} \frac{\mathrm{d}s}{s} \right| \leq \frac{1}{2}|a_n| = \frac{1}{2} \frac{x^\kappa}{n^\kappa} \frac{|a_n|}{1 + T|\log(x/n)|}.$$

Mit dem Symbol $\delta := 1$ für x ganz, $\delta := 0$ für x nicht ganz folgt

$$\begin{aligned}
&\left| A(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} F(s) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \right| \\
&\quad = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n h\Big(\frac{x}{n}\Big) + \delta \frac{1}{2} a_x - \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} F(s) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \right| \\
&\quad \leq \delta \frac{1}{2} |a_x| + 2 \sum_{n \neq x} \frac{x^\kappa}{n^\kappa} \frac{|a_n|}{1 + T|\log(x/n)|} + \delta \frac{1}{2} |a_x| \\
&\quad \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^\kappa}{n^\kappa} \frac{|a_n|}{1 + T|\log(x/n)|}.
\end{aligned}$$

□

10.6. Corollar. *Mit den Bezeichnungen des Satzes gilt für x nicht ganz*

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} F(s) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Mit $A^*(s) := \frac{1}{2}\big(A(x+0) + A(x-0)\big)$[1] gilt

$$A^*(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} F(s) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s}$$

auch für $x = n$ ganz.

Beweis. Ist x nicht ganz, so folgt dies sofort aus obigem Satz. Ist x ganz, so gilt

$$A^*(x) = A(x) - a_x + \frac{1}{2} a_x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \Big(\sum_{n \neq x} \frac{a_n}{n^s} \Big) x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + \frac{1}{2} a_x$$

nach dem Satz und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \frac{a_x}{x^s} x^s \frac{\mathrm{d}s}{s} = a_x \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} 1 \frac{\mathrm{d}s}{s} \Big) = \frac{1}{2} a_x$$

nach der Perronschen Formel. Daraus folgt die Behauptung. □

[1] $A^*(x)$ unterscheidet sich also von $A(x)$ nur, wenn $x = n$ ganz ist, und in diesem Fall gilt $A^*(x) = A(x) - \frac{1}{2} a_n$.

10.7. Satz. *Sei* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *eine Dirichlet-Reihe, die für* $\operatorname{Re} s > 1$ *absolut konvergiert und die sich in die Halbebene* $\operatorname{Re} s > \vartheta \quad (\frac{1}{2} \le \vartheta < 1)$ *holomorph fortsetzen lässt. Für jedes* $\vartheta_1 > \vartheta$ *und für jedes* $\epsilon > 0$ *gelte*

$$F(s) = \mathcal{O}(|t|^\epsilon) \quad (t = \operatorname{Im} s)$$

gleichmäßig in $\operatorname{Re} s \ge \vartheta_1$. *Dann folgt*

$$A(x) := \sum_{n \le x} a_n = \mathcal{O}(x^{\vartheta'}) \qquad \textit{für alle } \vartheta' > \vartheta.$$

Insbesondere konvergiert dann die Dirichlet-Reihe von $F(s)$ *für* $\operatorname{Re} s > \vartheta$.

Beweis. Man kann x als halbganz annehmen. Dann gibt es eine Konstante c mit

$$\left|\log \frac{x}{n}\right| \ge c\,\frac{1}{n},$$

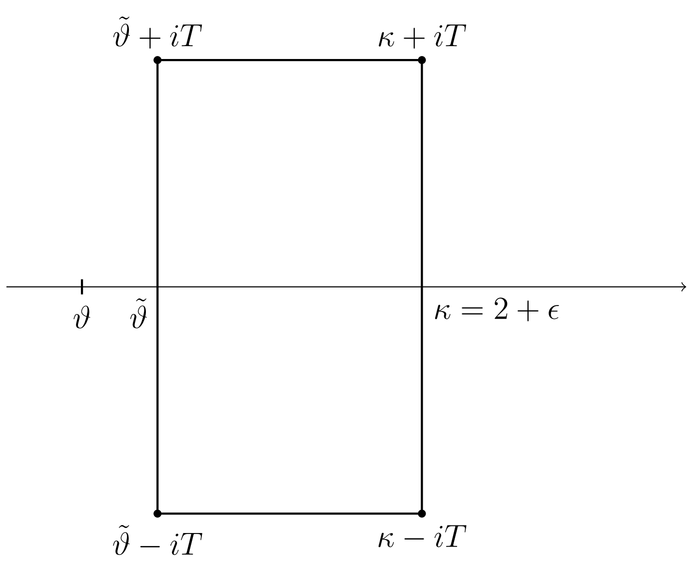
so dass also

$$\frac{1}{n^\kappa\big(1 + T|\log(x/n)|\big)} \le \frac{1}{cTn^{\kappa-1}}.$$

Wählen wir $\kappa = 2 + \epsilon$ (mit $\epsilon > 0$ fest), so ist $\kappa - 1 > 1 \ge \sigma_a(F)$, und mit dem Satz von Perron und $T = x^2$ folgt

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} F(s) x^s \, \frac{\mathrm{d}s}{s} + \mathcal{O}\Big(x^\kappa \, \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\kappa-1}}\Big) = \mathcal{O}\Big(\frac{x^\kappa}{T}\Big) = \mathcal{O}(x^\epsilon).$$

Es bleibt also das Integral $\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(x)x^s \frac{\mathrm{d}s}{s}$ $(T = x^2)$ abzuschätzen. Dazu wählen wir $\tilde\vartheta > \vartheta$ und $\epsilon > 0$ so, dass $\tilde\vartheta + 2\epsilon < \vartheta'$ sowie $3\epsilon > \vartheta'$. Das Integral $\int F(s)x^s \frac{\mathrm{d}s}{s}$ über den Rand des Rechtecks



verschwindet, es genügt also, die Integrale über den oberen, unteren und linken Rand des Rechtecks abzuschätzen.

Auf dem oberen Rand gilt $|F(s)| \le c'\,T^\epsilon = c'\,x^{2\epsilon}$ mit einer geeigneten Konstanten c' (nach Voraussetzung), ferner $|x^s| = x^\sigma \le x^{2+\epsilon}$ und $|s| \ge T = x^2$, also

$$\left|\int_{\tilde\vartheta+iT}^{\kappa+iT} F(s)x^s\,\frac{\mathrm{d}s}{s}\right| \le c'\,x^{2\epsilon}(2+\epsilon)\frac{x^{2+\epsilon}}{x^2} = \mathcal{O}(x^{3\epsilon}) = \mathcal{O}(x^{\vartheta'}).$$

Auf dem unteren Rand erhält man genauso

$$\left|\int_{\tilde\vartheta-iT}^{\kappa-iT} F(s)x^s\,\frac{\mathrm{d}s}{s}\right| = \mathcal{O}(x^{3\epsilon}) = \mathcal{O}(x^{\vartheta'}).$$

Auf dem linken Rand hat man $|F(s)| \le c'|t|^\epsilon$, $|x^s| = x^\sigma = x^{\tilde\vartheta}$ sowie $|s| \ge |t|$. Es folgt

$$\left|\int_{\tilde\vartheta+i0}^{\tilde\vartheta+iT} F(s)x^s\,\frac{\mathrm{d}s}{s}\right| \le c'x^{\tilde\vartheta}\int_0^T t^{\epsilon-1}\,\mathrm{d}t = \frac{c'}{\epsilon}\,x^{\tilde\vartheta}\,T^\epsilon = \frac{c'}{\epsilon}\,x^{\tilde\vartheta}\,x^{2\epsilon}$$

$$= \mathcal{O}(x^{\tilde\vartheta+2\epsilon}) = \mathcal{O}(x^{\vartheta'})$$

und ebenso

$$\left|\int_{\tilde\vartheta-iT}^{\tilde\vartheta+i0} F(s)x^s\,\frac{\mathrm{d}s}{s}\right| \le \frac{c'}{\epsilon}\,x^{\tilde\vartheta}\,x^{2\epsilon} = \mathcal{O}(x^{\tilde\vartheta+2\epsilon}) = \mathcal{O}(x^{\vartheta'}).$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

10.8. *Beweis der Implikation „(v) ⇒ (iii)".* Wir betrachten die Funktion

$$F(s) := -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \zeta(s)$$

(mit der Dirichlet-Reihe $F(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)-1}{n^s}$). Nach Voraussetzung (v) lässt sich diese in die Halbebene $\mathrm{Re}\,s > \vartheta$ fortsetzen. In Kapitel 9 wurde gezeigt, dass aus $\mathrm{RV}(\vartheta)$ für alle $\vartheta_1 > \vartheta$ folgt

$$|\log\zeta(s)| = \mathcal{O}(\log|t|) \quad \text{gleichmäßig für } \mathrm{Re}\,s = \sigma \ge \vartheta_1,\ |t| \ge t_0.$$

Ist $\vartheta' > \vartheta_1$, so ergibt die Cauchyformel angewendet mit Radius $\delta = \vartheta' - \vartheta_1$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \mathcal{O}(\log|t|) \quad \text{gleichmäßig für } \mathrm{Re}\,s = \sigma \ge \vartheta',\ |t| \ge t_0'.$$

Zudem wurde in Kapitel 9 gezeigt, dass aus $\mathrm{RV}(\vartheta)$ für alle $\vartheta_1 > \vartheta$ und alle $\epsilon > 0$ folgt

$$|\zeta(s)| = \mathcal{O}(|t|^\epsilon) \quad \text{für } |t| \ge t_0 \text{ gleichmäßig in } \mathrm{Re}\,s \ge \vartheta_1.$$

Die Voraussetzungen des obigen Satzes sind also erfüllt, und für $A(x) := \sum_{n\le x}\big(\Lambda(n)-1\big) = \psi(x) - \lfloor x\rfloor$ folgt $A(x) = \mathcal{O}(x^{\vartheta'})$ für alle $\vartheta' > \vartheta$. □

10.9. *Beweis der Implikation „*(v) $\Rightarrow$ (iv)*“.* Hier kann man obigen Satz anwenden auf die Funktion

$$F(s) := \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

für die ja auch nach Kapitel 9 für alle $\vartheta_1 > \vartheta$ und alle $\epsilon > 0$

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \mathcal{O}(|t|^{\epsilon}) \quad \text{für } |t| \geq t_0 \text{ gleichmäßig in } \operatorname{Re} s \geq \vartheta_1$$

gilt, falls RV(ϑ) erfüllt ist. $\square$