8. Die Nullstellen der Zeta-Funktion

8.1. Wie vorher sei

$$\xi(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s).$$

ξ ist meromorph in ganz $\mathbb{C}$, hat Pole (erster Ordnung) nur bei $s = 1$ und $s = 0$ und genügt der Funktionalgleichung

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Daraus folgt: Für $\operatorname{Re} s < 0$ hat die Zeta-Funktion Nullstellen (erster Ordnung) an den Stellen $s = -2n$, $n \geq 1$ und ist sonst in $\operatorname{Re} s < 0$ holomorph und von Null verschieden. Außerdem gilt $\zeta(s) \neq 0$ für $\operatorname{Re} s = 1$ und $\operatorname{Re} s = 0$.

Weitere mögliche („nicht-triviale") Nullstellen der Zeta-Funktion liegen im Streifen $0 < \operatorname{Re} s < 1$. In diesem Streifen stimmen die Nullstellen von ζ und ξ überein.

Da $\xi(s)$ für reelle s reelle Werte hat (mit Ausnahme der beiden Pole), gilt $\xi(\bar{s}) = \overline{\xi(s)}$ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip (und ebenso $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$).

Die Funktionalgleichung lässt sich schreiben als

$$(\dagger) \qquad \xi\Big(\frac{1}{2} + s\Big) = \xi\Big(\frac{1}{2} - s\Big),$$

$$\overline{\xi\Big(\frac{1}{2} + s\Big)} = \xi\Big(\frac{1}{2} - \bar{s}\Big),$$

bzw. mit $s = \sigma + it$ als

$$(\ddagger) \qquad \overline{\xi\Big(\frac{1}{2} + \sigma + it\Big)} = \xi\Big(\frac{1}{2} - \sigma + it\Big).$$

Dabei ist $\frac{1}{2} + \sigma + it \mapsto \frac{1}{2} - \sigma + it$ die Spiegelung an der Geraden $\operatorname{Re} s = \sigma = \frac{1}{2}$. Daraus folgt: Ist

$$\frac{1}{2} + \sigma + it \qquad \Big(\sigma \in \mathbb{R},\ |\sigma| \leq \frac{1}{2}\Big)$$

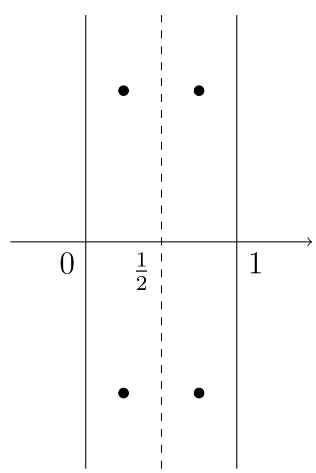
eine Nullstelle der Zeta-Funktion, so sind auch

$$\frac{1}{2} - \sigma + it,$$

$$\frac{1}{2} + \sigma - it,$$

$$\frac{1}{2} - \sigma - it$$

Nullstellen.



[0]Mitschrift von Andreas Wadhwa. Letzte Änderung: 2009-11-11

(RV) Riemannsche Vermutung: Alle nicht-trivialen Nullstellen der Zeta-Funktion liegen auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Definition. Sei $T > 0$. Dann bezeichne $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen s der Zeta-Funktion mit $0 < \operatorname{Re} s < 1$ und $0 \le \operatorname{Im} s \le T$ (wobei darunter die Anzahl mit eventueller Vielfachheit zu verstehen ist).

Man vermutet, dass es nur einfache Nullstellen gibt, aber dieses Problem ist noch ungelöst.

Ziel: Beweis der asymptotischen Formel für $N(T)$:

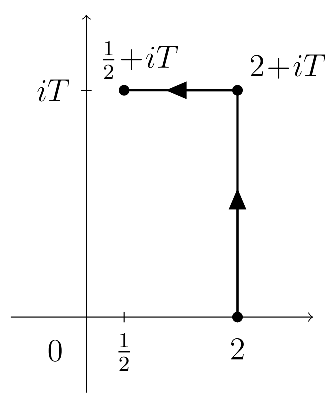
$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\Big(\log\frac{T}{2\pi} - 1\Big) + \mathcal{O}(\log T).$$

Bemerkung. Dies vergleiche man mit $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

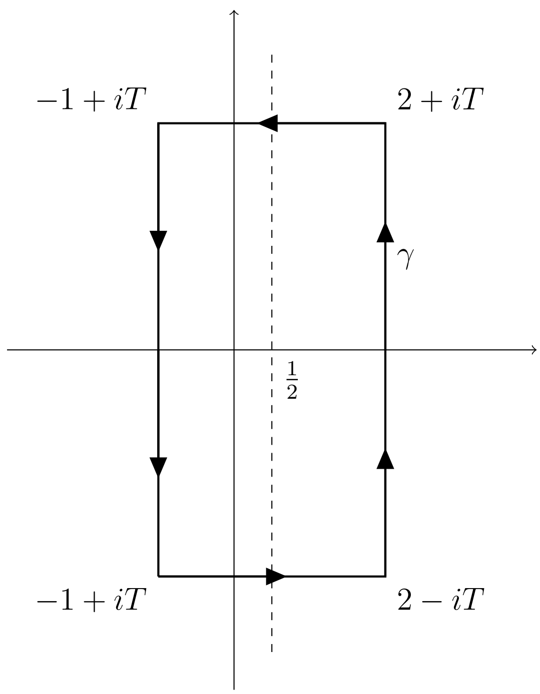
8.2. Satz. *Sei $T > 0$ so gewählt, dass es keine Nullstelle s der Zeta-Funktion mit $\operatorname{Im} s = T$ gibt. Dann gilt*

$$N(T) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\int\limits_L \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\,\mathrm{d}s + 1.$$

Der Integrationsweg L ist dabei der Streckenzug von 2 über $2 + iT$ nach $\frac{1}{2} + iT$:



Beweis. Die Funktion $\xi(s)$ hat im Inneren des unten skizzierten Weges γ genau $2N(T)$ Nullstellen und 2 Polstellen (erster Ordnung).



Deshalb ist

$$2N(T) - 2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\, \mathrm{d}s.$$

Dies lässt sich wegen der Symmetrie (†) schreiben als

$$N(T) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\, \mathrm{d}s,$$

wobei γ_+ der Teil des geschlossenen Weges γ ist, der in der oberen Halbebene $\operatorname{Im} s \geq 0$ liegt. Mit der Symmetrie (‡) folgt hieraus weiter

$$N(T) - 1 = \frac{1}{2\pi i}\, 2i \operatorname{Im} \int\limits_L \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\, \mathrm{d}s. \qquad \square$$

8.3. Argument-Funktion einer holomorphen Funktion. Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}^*$ eine holomorphe Funktion. Dann kann lokal in $\mathcal{U}$ eine harmonische Funktion $\arg f : V \to \mathbb{R}$ definiert werden durch

$$f(z) = |f(z)| e^{i \arg f(z)}.$$

Es gilt also

$$\arg f(z) = \operatorname{Im}\bigl(\log f(z)\bigr).$$

Die Funktion $\arg f(z)$ ist nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt. Das Differential

$$\mathrm{d}\arg f(z)$$

ist global eindeutig bestimmt.

Ist $\mathcal{U}$ einfach zusammenhängend, so lässt sich ein in ganz $\mathcal{U}$ harmonischer Zweig von $\arg f$ wählen. Durch die Vorgabe des Wertes von $\arg f(z_0)$ für einen festen Punkt $z_0 \in \mathcal{U}$ (mit $f(z_0) = |f(z_0)|e^{i \arg f(z_0)}$) ist dann $\arg f$ in $\mathcal{U}$ eindeutig bestimmt.

8.4. *Anwendung* auf die Funktion ξ in einer kleinen einfach zusammenhängenden offenen Umgebung $\mathcal{U}$ des Integrationsweges L:

Es lässt sich ein eindeutig bestimmter Zweig

$$\arg \xi(x)$$

wählen mit $\arg \xi(2) = 0$. Die Formel

$$N(T) - 1 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_L \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} \mathrm{d}s$$

lässt sich damit schreiben als

$$N(T) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_L \mathrm{d}\arg \xi(s) = \frac{1}{\pi} \arg \xi\Big(\frac{1}{2} + iT\Big).$$

Da $\xi(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)\zeta(s)$, gilt

$$\arg \xi(s) = \arg e^{-\frac{1}{2}s\log\pi} + \arg \Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big) + \arg \zeta(s).$$

Dabei sind die einzelnen Argumentfunktionen so zu wählen, dass sie an der Stelle $s = 2$ den Wert 0 haben.

Daraus folgt sofort:

8.5. Satz.

$$N(T) - 1 = \frac{1}{\pi}\Big(\arg e^{(-\frac{1}{4} - i\frac{T}{2})\log\pi}\Big) + \frac{1}{\pi} \arg \Gamma\Big(\frac{1}{4} + i\frac{T}{2}\Big) + \frac{1}{\pi} \arg \zeta\Big(\frac{1}{2} + iT\Big). \quad \square$$

Hier gilt:

(1) $\arg e^{(-\frac{1}{4} - i\frac{T}{2})\log\pi} = -\frac{T}{2}\log\pi$.

(2) Die $\Gamma-$ Funktion ist in der ganzen Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ holomorph und $\neq 0$, also lässt sich $\arg\Gamma$ in der ganzen rechten Halbebene eindeutig definieren.

8.6. Satz (Stirlingsche Formel für die Gamma-Funktion). *In der Halbebene* $\operatorname{Re} z > 0$ *gilt*

$$\log \Gamma(z) = \Big(z - \frac{1}{2}\Big)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + \mathcal{O}\bigg(\frac{1}{|z|}\bigg).$$

Dabei ist $\log z$ *der Hauptzweig des Logarithmus (der reell ist für positive relle* z*), und ebenso ist* $\log\Gamma(z)$ *reell für reelle* $z > 0$.

Für den Beweis werden einige Aussagen benötigt, die wir deshalb dem Beweis voranstellen.

8.7. *Erinnerung.* Die *klassische Stirlingsche Formel* besagt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n,$$

woraus durch Logarithmieren

$$\log n! = \Big(n + \frac{1}{2}\Big)\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \epsilon_n$$

mit $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ folgt.

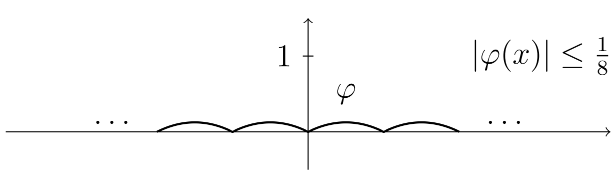
8.8. Lemma (Trapez-Regel). *Sei* $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ *eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Sei* $\varphi(x) := \frac{1}{2}x(1-x)$. *Dann gilt*

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(f(0) + f(1)\big) - \int_0^1 \varphi(x) f''(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis durch zweimaliges partielles Integrieren von $\int_0^1 \varphi(x) f''(x)\,\mathrm{d}x$. □

8.9. Corollar. *Sei* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}x(1-x) \quad \text{für } 0 \le x \le 1,$$
$$\varphi(x) := \varphi(x - \lfloor x \rfloor) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$



Weiter sei $f : [n_0, N] \to \mathbb{C}$ *zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_{n_0}^N f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=n_0}^N f(k) - \frac{1}{2}\big(f(n_0) + f(N)\big) - \int_{n_0}^N \varphi(x) f''(x)\,\mathrm{d}x.$$ □

8.10. *Beweis* der Stirlingschen Formel. Nach Gauß ist

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)},$$

also

$$\begin{aligned}\log\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty}\Big[\log(n!) + z\log n - \sum_{k=0}^{n}\log(z+k)\Big]\\ &= \lim_{n\to\infty}\Big[\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\log n - n + z\log n - \sum_{k=0}^{n}\log(z+k) + \epsilon_n\Big] + \log\sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

mit der Notation aus (8.7.). Auf die auftretende Summe wenden wir das Corollar aus der Trapez-Regel an und erhalten

$$\sum_{k=0}^{n}\log(z+k) = \\ \int_0^n \log(z+t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\big(\log z + \log(z+n)\big) - \int_0^n \varphi(t)\frac{1}{(z+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Hier ist

$$\int_0^n \log(z+t)\,\mathrm{d}t = (z+n)\big(\log(z+n)-1\big) - z(\log z - 1),$$

und für $\operatorname{Re} z > 0$ und $t \geq 0$ ist $|z| \leq |z+t|$ sowie $t \leq |z+t|$, so dass $|z+t| \geq A(|z|+t)$ mit $A = \frac{1}{2}$ gilt, weshalb

$$\left|\int_0^n \varphi(t)\frac{1}{(z+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{8}A\int_0^n (|z|+t)^{-2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{A}{8|z|} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\log\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\Big[&\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\log n - n + z\log n\\ &- (z+n)\big(\log(z+n)-1\big) + z(\log z - 1) - \frac{1}{2}\big(\log z + \log(z+n)\big)\Big]\\ &+ \log\sqrt{2\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)\\ = \log\sqrt{2\pi} &+ \Big(z-\frac{1}{2}\Big)\log z\\ &+ \lim_{n\to\infty}\Big[\Big(n+\frac{1}{2}+z\Big)\Big(\log n - \log(z+n)\Big)\Big] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right).\end{aligned}$$

Nun ist $\log(z+n) = \log(n(1+z/n)) = \log n + \log(1+z/n)$, und für festes z und große n gilt $\log(1+z/n) = z/n + \mathcal{O}(1/n^2)$. Wir erhalten

$$\log\Gamma(z) = \log\sqrt{2\pi} + \Big(z-\frac{1}{2}\Big)\log z - z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right). \qquad \square$$

8.11. *Anwendung* der Stirlingschen Formel zur Berechnung von $\arg\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\right) = \operatorname{Im}\log\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{2}T\right)$. Es ist

$$\log\Gamma\Big(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big) = \\ \Big(-\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big)\log\Big(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big) - \Big(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big) + \log\sqrt{2\pi} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{T}\Big),$$

also

$$\begin{aligned}\arg\Gamma\Big(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big) &= \\ &= \operatorname{Im}\Big[\Big(-\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big)\Big(\log\Big|\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big| + i\arctan 2T\Big)\Big] - \frac{T}{2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{T}\Big) \\ &= \frac{T}{2}\log\Big|\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big| - \frac{1}{4}\arctan 2T - \frac{T}{2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{T}\Big).\end{aligned}$$

Nun ist

$$\lim_{x\to\infty} x\Big(\arctan x - \frac{\pi}{2}\Big) = \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x - \pi/2}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/(1+x^2)}{-1/x^2} = -1$$

(mit Hilfe der l'Hospitalschen Regel), weshalb $\arctan x = \pi/2 + \mathcal{O}(1/x)$, also $\arctan 2T = \pi/2 + \mathcal{O}(1/T)$.

Ferner ist $x(|a+ix| - x) = x\sqrt{a^2+x^2} - x^2 \le a^2$ für $a, x \ge 0$, also

$$\Big|\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big| = \frac{T}{2} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{T}\Big) = \frac{T}{2}\Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{T^2}\Big)\Big)$$

und daher $\log|1/4 + iT/2| = \log(T/2) + \mathcal{O}(1/T^2)$.

Es folgt

$$\arg\Gamma\Big(\frac{1}{4}+i\frac{T}{2}\Big) = \frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2} - \frac{\pi}{8} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{T}\Big).$$

8.12. Als Zwischen-Ergebnis können wir festhalten

$$N(T) = 1 + \frac{1}{\pi}\Big(\frac{T}{2}\log\frac{T}{2} - \frac{T}{2}\Big) - \frac{1}{8} - \frac{T}{2\pi}\log\pi + \frac{1}{\pi}\int_L d\arg\zeta(s) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{T}\Big),$$

bzw.

$$\boxed{N(T) = \tfrac{T}{2\pi}\log\tfrac{T}{2\pi} - \tfrac{T}{2\pi} + \tfrac{7}{8} + S(T) + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{T}\right)},$$

wobei

$$S(T) = \frac{1}{\pi}\int_L \mathrm{d}\arg\zeta(s) = \frac{1}{\pi}\arg\zeta(2+iT) + \frac{1}{\pi}\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \mathrm{d}\arg\zeta(s).$$

Hier gilt:

Behauptung. $|\arg\zeta(2+iT)| < \frac{\pi}{2}$.

Beweis. Für $\operatorname{Re} s \geq 2$ gilt $\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ und

$$|\zeta(s) - 1| \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1,$$

d.h. für $\operatorname{Re} s \geq 2$ liegt $\zeta(s)$ innerhalb eines Kreises vom Radius 1 um den Punkt 1, der Winkel $\arg\zeta(s)$ ist für $\operatorname{Re} s \geq 2$ daher dem Betrage nach kleiner als $\frac{\pi}{2}$. □

Abzuschätzen bleibt das Integral

$$\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \mathrm{d}\arg\zeta(s).$$

Dafür werden noch einige Hilfsmittel benötigt.

8.13. Hilfssatz. *Sei k die Anzahl der Nullstellen von $\operatorname{Re}\zeta(s)$ (gezählt ohne Vielfachheiten) auf der Geraden*

$$s = \sigma + iT, \qquad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2.$$

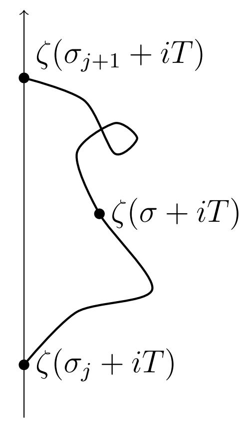
Dann gilt

$$\left|\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} \mathrm{d}\arg\zeta(s)\right| \leq (k+1)\pi.$$

Beweis. Seien $\frac{1}{2} \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_k \leq 2$ die Nullstellen von

$$\sigma \mapsto \operatorname{Re}\zeta(\sigma + iT) \qquad (T \text{ fest}).$$

Für $\sigma_j < \sigma < \sigma_{j+1}$ liegt $\zeta(\sigma + iT)$ entweder ganz in der rechten Halbebene $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ oder ganz in der linken Halbebene $\{\operatorname{Re} z < 0\}$.



Der Winkel $\arg\zeta(\sigma + iT)$ variiert deshalb um weniger als π für $\sigma_j < \sigma < \sigma_{j+1}$, d.h.

$$\left| \int_{\sigma_j+iT}^{\sigma_{j+1}+iT} \mathrm{d}\arg\zeta(s) \right| \leq \pi. \qquad \square$$

8.14. Es gilt

$$2\,\mathrm{Re}\,\zeta(\sigma + iT) = \zeta(\sigma + it) + \overline{\zeta(\sigma + it)} = \zeta(\sigma + it) + \zeta(\sigma - it).$$

Wir setzen

$$F(s) := \zeta(s + iT) + \zeta(s - iT).$$

Die Funktion $F(s)$ ist holomorph für $s \neq 1 \pm iT$, und die Anzahl der Nullstellen von $\mathrm{Re}\,\zeta(\sigma + iT)$ auf der Geraden $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 2$ ist kleiner gleich der Anzahl der Nullstellen von $F(S)$ im Kreis $\{s \in \mathbb{C} : |s - 2| \leq \frac{3}{2}\}$.

8.15. Hilfssatz. *Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} \log|e^{i\varphi} - a|\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

Beweis. Für $|z| = 1$ gilt $|z - a| = |\bar{z} - \bar{a}| \cdot |z| = |1 - \bar{a}z|$, also ist

$$\log|z - a| = \log|1 - \bar{a}z|$$

eine harmonische Funktion in $|z| \leq 1$. Der Mittelwertsatz für harmonische Funktionen liefert

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|1 - \bar{a}e^{i\varphi}|\,\mathrm{d}\varphi = \log|1| = 0. \qquad \square$$

8.16. Satz (Jensen). *Es sei* $D_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. *Sei* F *holomorph in einer Umgebung von* $\overline{D_R}$. F *habe keine Nullstellen auf* ∂D_R *und es gelte* $F(0) \neq 0$. *Dann gilt*

$$\log|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(Re^{i\varphi})|\,\mathrm{d}\varphi + \sum_{j=1}^{n} \log\left(\frac{|a_j|}{R}\right).$$

Dabei sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *die Nullstellen von* F *in* D_R.

Beweis. Wir setzen

$$G(z) := \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{z}{R} - \frac{a_j}{R}\right).$$

Nach dem Hilfssatz gilt

$$\int_0^{2\pi} \log|G(Re^{i\varphi})|\,\mathrm{d}\varphi = 0,$$

also ist

$$\int_0^{2\pi} \log|F(Re^{i\varphi})|\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \log\left|\frac{F(Re^{i\varphi})}{G(Re^{i\varphi})}\right|\mathrm{d}\varphi.$$

Die Funktion

$$z \mapsto \log\left|\frac{F(z)}{G(z)}\right|$$

ist harmonisch in $|z| \leq R$, und der Mittelwertsatz auf sie angewendet ergibt die Behauptung. □

8.17. Corollar. *Die Bezeichnungen und Voraussetzungen des Satzes von Jensen seien beibehalten. Zusätzlich sei* $0 < \rho < R$ *und bezeichne* $N_F(\rho)$ *die Anzahl der Nullstellen von* F *im Kreis* $|z| \leq \rho$. *Dann gilt*

$$N_F(\rho) \leq \frac{1}{\log(R/\rho)}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log|F(Re^{i\varphi})|\,\mathrm{d}\varphi - \log|F(0)|\right).$$

Beweis. $N_F(\rho) \leq \frac{1}{\log(R/\rho)} \sum_{j=1}^{n} \log\left(\frac{R}{|a_j|}\right)$. □

8.18. *Anwendung* zur Abschätzung der Anzahl der Nullstellen der Funktion

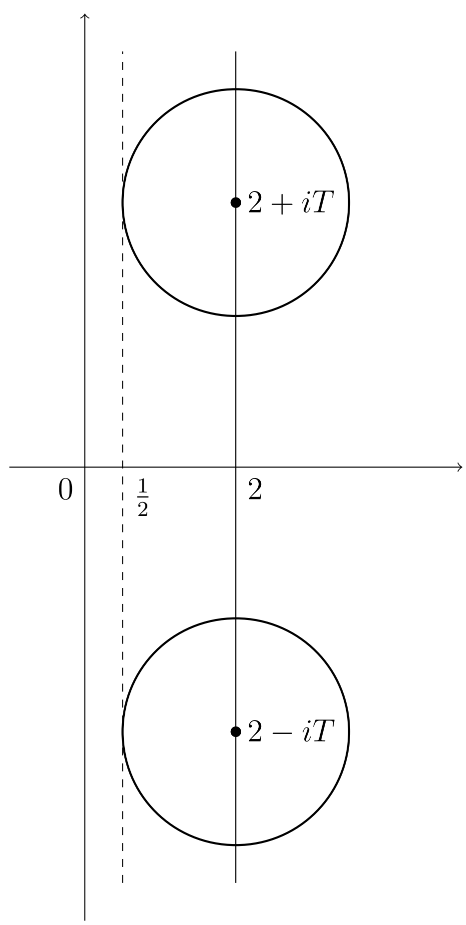
$$F_T(s) := F(s) = \zeta(s+iT) + \zeta(s-iT)$$

aus (8.14.) im Kreis $\{s \in \mathbb{C} : |s-2| \leq \frac{3}{2}\}$. Für $T \geq 2$ ist F holomorph im Kreis $\{|s-2| < 2\}$. Wähle ein R mit $\frac{7}{4} \leq R \leq \frac{15}{8}$ derart, dass F auf der Kreislinie $|s-2| = R$ keine Nullstellen hat. Setze

$$\widetilde{F_T}(z) := F(2+z) = F_T(2+z).$$

Dann ist $N_{\widetilde{F_T}}(\rho)$ die Anzahl der Nullstellen von $F(s)$ im Kreis $|s-2| \leq \rho$. Das Corollar mit $\rho = \frac{3}{2}$ ergibt

$$N_{\widetilde{F_T}}\left(\frac{3}{2}\right) \leq \frac{1}{\log(7/6)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|F(2+Re^{i\varphi})| \, \mathrm{d}\varphi - \log|F(2)| \right).$$



Aus der für $\operatorname{Re} s > 0$ gültigen Formel

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{u - \lfloor u \rfloor}{u^{1+s}}\,\mathrm{d}u$$

folgt $|\zeta(s)| = \mathcal{O}(t)$ ($t = \operatorname{Im} s$) gleichmäßig in $\operatorname{Re} s \geq \delta > 0$, $|s-1| \geq \delta' > 0$. Also ist

$$\log|F_T(2+z)| = \mathcal{O}(\log T)$$

im Kreis $|z| \leq \frac{15}{8}$. Es folgt

$$N_{\widetilde{F_T}}\left(\frac{3}{2}\right) = \mathcal{O}(\log T).$$

Dies ergibt (unter Berücksichtigung von (8.12.), (8.13.) und (8.14.)) schließlich:

8.19. Satz.

$$\boxed{N(T) = \tfrac{T}{2\pi}\log\tfrac{T}{2\pi} - \tfrac{T}{2\pi} + \mathcal{O}(\log T)}. \qquad \square$$