7. Funktionalgleichung der Zeta-Funktion

7.1. Satz (Poissonsche Summationsformel). *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(x) = \mathcal{O}(|x|^{-2})$ für $|x| \to \infty$. Sei $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Fourier-Transformierte von f, d.h.*

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixt}\,\mathrm{d}x.$$

Dann gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Beweis. Sei $F(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$. Dann ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und periodisch mit der Periode 1. Daher lässt sich F in eine Fourier-Reihe entwickeln:

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi inx}.$$

Da F stetig differenzierbar ist, konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäig. Aus

$$c_n = \int_0^1 F(x)e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x$$

folgt deshalb

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+k)e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x)e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \hat{f}(n). \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx},$$

woraus sich für $x = 0$ die Behauptung ergibt. □

[0]Mitschrift von Andreas Wadhwa. Letzte Änderung: 2009-11-11

7.2. Beispiel einer Fourier-Transformation. Für $f(x) := e^{-\pi x^2}$ ist

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x t}\,\mathrm{d}x$$

zu berechnen. Zunächst ist

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x \overset{u=\sqrt{\pi}x}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$
$$\overset{t=u^2}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = 1.$$

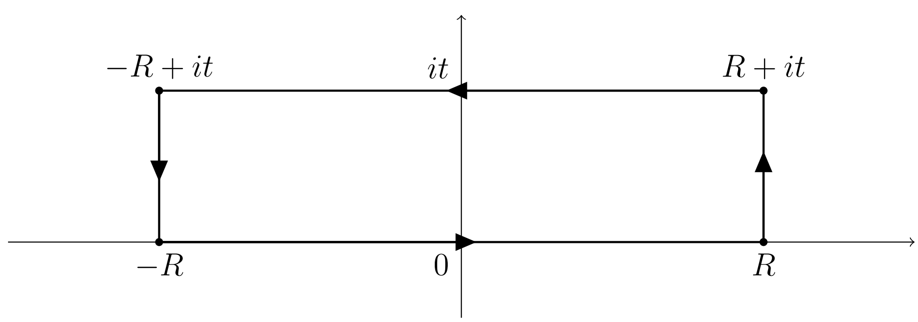
Sei jetzt $t \neq 0$. Wegen $e^{-\pi x^2 - 2\pi i x t} = e^{-\pi(x+it)^2} e^{-\pi t^2}$ ist

$$\hat{f}(t) = e^{-\pi t^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+it)^2}\,\mathrm{d}x \underset{\tilde{x}=x+it}{\overset{(!)}{=}} e^{-\pi t^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x = e^{-\pi t^2}.$$

Begründung von (!): Es ist

$$\int_{-R}^{R} e^{-\pi(x+it)^2}\,\mathrm{d}x \overset{z=x+it}{=} \int_{-R+it}^{R+it} e^{-\pi z^2}\,\mathrm{d}z,$$

und der Cauchysche Integralsatz angewendet auf $z \mapsto e^{-\pi z^2}$ längs des rechteckigen Integrationsweges



ergibt

$$\int_{-R}^{R} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-R+it}^{R+it} e^{-\pi z^2} - \underbrace{\int_{R}^{R+it} e^{-\pi z^2}\,\mathrm{d}z}_{\to 0 \text{ für } R\to\infty} + \underbrace{\int_{-R}^{-R+it} e^{-\pi z^2}\,\mathrm{d}z}_{\to 0 \text{ für } R\to\infty}.$$

Es folgt $\hat{f}(t) = e^{-\pi t^2} = f(t)$, die Poissonsche Summationsformel ist in diesem Beispiel also trivial.

7.3. Hilfssatz. *Es sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *eine stetig differenzierbare Funktion mit* $f(x) = \mathcal{O}\left(|x|^{-2}\right)$ *für* $|x| \to \infty$. *Für* $\lambda > 0$ *sei ferner*

$$f_\lambda(x) := f(\lambda x).$$

Dann gilt

$$\widehat{f_\lambda}(t) = \frac{1}{\lambda} \hat{f}\Big(\frac{t}{\lambda}\Big).$$

Beweis. $\widehat{f_\lambda}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda x) e^{-2\pi i x t}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda x) e^{-2\pi i (\lambda x) \frac{t}{\lambda}}\, \mathrm{d}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \hat{f}\big(\frac{t}{\lambda}\big)$. □

7.4. Satz (Funktionalgleichung der Theta-Reihe). *Sei*

$$\Theta(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x} \qquad (x > 0).$$

Dann gilt

$$\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\, \Theta\Big(\frac{1}{x}\Big) \qquad \textit{für alle } x > 0.$$

Beweis. Für $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_1(x) := e^{-\pi x^2}$ gilt $\widehat{f_1}(x) = f_1(x)$, und für $\lambda > 0$, $f_\lambda(x) := e^{-\pi x^2 \lambda}$ gilt $\widehat{f_\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(x) e^{-\pi x^2/\lambda}$. Die Poissonsche Summationsformel

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_\lambda(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f_\lambda}(n)$$

ergibt somit

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 \lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/\lambda},$$

d.h. $\Theta(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, \Theta\big(\frac{1}{\lambda}\big)$. □

7.5. Corollar. *Für* $\Theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}$ *gilt* $\Theta(x) = \mathcal{O}\big(\frac{1}{\sqrt{x}}\big)$ *für* $x \searrow 0$.

Beweis. $\lim_{x \to \infty} \Theta(x) = 1$. □

7.6. Satz. *Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$ gilt*

$$\Gamma\Big(\frac{1}{s}\Big)\zeta(s) = \pi^{s/2}\int_0^\infty t^{s/2}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Bemerkung. $\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}\right) =: \psi(t) = \frac{1}{2}\left(\Theta(t) - 1\right)$. Für $t \searrow 0$ gilt damit $\psi(t) = \mathcal{O}\big(\frac{1}{\sqrt{t}}\big)$. Daraus folgt, dass das Integral existiert.

Beweis. Es ist $\Gamma\big(\frac{s}{2}\big) = \int_0^\infty t^{s/2}e^{-t}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$. Die Substitution

$$t = \pi n^2\tilde{t}, \quad n \geq 1, \quad \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\tilde{t}}$$

liefert

$$\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big) = \pi^{s/2}n^s\int_0^\infty t^{s/2}e^{-\pi n^2 t}\,\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

also

$$\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) = \pi^{s/2}\int_0^\infty t^{s/2}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

wobei sich die Vertauschung von Integration und Summation mit majorisierter Konvergenz und getrennter Betrachtung von $\int_0^1$ und $\int_1^\infty$ rechtfertigen lässt. □

7.7. Satz (Funktionalgleichung).

(a) *Sei $\xi(s) := \pi^{-s/2}\Gamma\big(\frac{s}{2}\big)\zeta(s)$. Diese zunächst in der Halbebene $\{\operatorname{Re} s > 1\}$ holomorphe Funktion lässt sich zu einer in ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortsetzen. Die fortgesetzte Funktion hat Pole erster Ordnung an den Stellen $s = 1$ und $s = 0$ und ist sonst holomorph. Sie genügt der Funktionalgleichung*

$$\xi(s) = \xi(1 - s).$$

(b) *Dadurch lässt sich die Zetafunktion meromorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzen. Der einzige Pol ist bei $s = 1$. Für ζ gilt die Funktionalgleichung*

$$\boxed{\zeta(1 - s) = 2(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\cos\big(\tfrac{\pi s}{2}\big)\zeta(s)}.$$

Beweis. Zu (a)⇒(b): Nach (a) ist

$$\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\zeta(1-s) = \pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s),$$

also

$$\zeta(1-s) = \sqrt{\pi}\pi^{-s}\,\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)^{-1}\zeta(s).$$

Wegen

$$\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1+s}{2}\Big) = \frac{\pi}{\sin\big(\pi\,\frac{1+s}{2}\big)} = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi s}{2}}$$

und

$$\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Big(\frac{s+1}{2}\Big) = 2^{1-s}\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)$$

folgt das Gewünschte.

Zu (a): Nach dem vorherigen Satz ist

$$\xi(s) = \int_0^\infty t^{s/2}\psi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad (\operatorname{Re}s > 1),$$

wobei $\psi(t) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} = \frac{1}{2}\big(\Theta(t)-1\big)$.

Wir behandeln zunächst das Integral $\int_0^1 t^{s/2}\psi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$. Wegen

$$\psi\Big(\frac{1}{t}\Big) = \frac{1}{2}\bigg(\Theta\Big(\frac{1}{t}\Big)-1\bigg) = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{t}\Theta(t)-1\Big) = \sqrt{t}\psi(t) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t}$$

ist

$$\int_0^1 t^{s/2}\psi(t)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^1 t^{s/2}\bigg(t^{-1/2}\psi\Big(\frac{1}{t}\Big) + \frac{1}{2}\Big(t^{-1/2}-1\Big)\bigg)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$= \int_0^1 t^{(s-1)/2}\psi\Big(\frac{1}{t}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{t} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 \big(t^{(s-1)/2} - t^{s/2}\big)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}}.$$

Für das erste Integral führen wir die Substitution $\tilde{t} = \frac{1}{t}$, $\frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{\tilde{t}}$. Wir erhalten

$$\int_0^1 t^{(s-1)/2}\psi\Big(\frac{1}{t}\Big)\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^\infty t^{(s-1)/2}\psi(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Insgesamt folgt

$$(*) \quad \xi(s) = \Big(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s}\Big) + \int_1^\infty \big(t^{s/2}+t^{(1-s)/2}\big)\psi(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Da $\psi(t)$ für $t \to \infty$ exponentiell gegen 0 konvergiert, existiert das Integral für alle $s \in \mathbb{C}$ und stellt dort eine holomorphe Funktion von s dar. Damit ist ξ meromorph fortgesetzt. Die Darstellung in $(*)$ ist invariant gegenüber der Substitution $s \mapsto 1 - s$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Dieser kunstvolle Beweis stammt von Riemann.

7.8. Satz.

(a) $\zeta(-2k) = 0$ *für alle natürlichen Zahlen* $k \geq 1$. $\zeta(s)$ *hat keine weiteren Nullstellen mit* $\operatorname{Re} s < 0$.

(b) $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

(c) $\zeta(1 - 2k) = -\frac{B_{2k}}{2k}$ *für* $k \geq 1$. *Insbesondere ist* $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$.

Beweis. Zu (a): $\operatorname{Re}(1 - s) < 0$ gilt genau dann, wenn $\operatorname{Re} s > 1$. Die einzigen Nullstellen von $\zeta(1 - s)$ kommen von $\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$.

Zu (b): Übung!

Zu (c): Mittels Funktionalgleichung und $\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$ folgt

$$\zeta(1 - 2k) = 2(2\pi)^{-2k} \underbrace{\Gamma(2k)}_{(2k-1)!} \underbrace{\cos(\pi k)}_{(-1)^{k-1}} \zeta(2k) = -\frac{B_{2k}}{2k}. \qquad \square$$