2. Dirichlet-Reihen. Arithmetische Funktionen

2.1. Eine *Dirichlet-Reihe* ist eine Reihe der Gestalt

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

wobei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen und s eine komplexe Variable ist.

2.2.

$$\sigma_a(f) := \inf\Big\{\sigma \ : \ \sum \frac{|a_n|}{n^\sigma} < \infty\Big\}$$

heißt *absolute Konvergenz-Abszisse.* Dabei können auch die Fälle $\sigma_a(f) = +\infty$ (Reihe konvergiert nirgends absolut) und $\sigma_a(f) = -\infty$ (Reihe knovergiert überall absolut) auftreten.

Bemerkung. Die Reihe konvergiert absolut für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \sigma_a(f)$ und sogar gleichmäßig in jeder Halbebene $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq \sigma_a(f)+\delta\} = \overline{H\big(\sigma_a(f)+\delta\big)}$, $\delta > 0$.

Die Funktion $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ ist also holomorph in der Halbebene $H\big(\sigma_a(f)\big) = \{s \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} s > \sigma_a(f)\}$.

Zum Beispiel gilt für die Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \sigma_a(\zeta) = 1.$$

Weiteres Beispiel:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} \pm \ldots, \quad \sigma_a(f) = 1;$$

nach dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen gilt: $f(\sigma)$ konvergiert (bedingt, d.h. nicht notwendig absolut) für alle $\sigma > 0$.

2.3.

$$\sigma_c(f) := \inf\Big\{\operatorname{Re} s \ : \ \sum \frac{a_n}{n^s} \text{ konvergiert}\Big\}$$

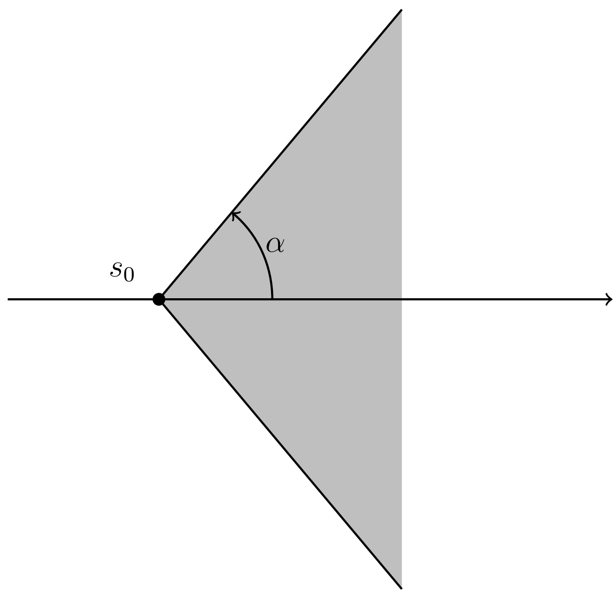
heißt *bedingte Konvergenz-Abszisse.* Die Reihe konvergiert dann in der Halbebene $H\big(\sigma_c(f)\big) = \{s \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} s > \sigma_c(f)\}$, vergleiche dazu den folgenden Satz.

[0]Mitschrift von Andreas Wadhwa. Letzte Änderung: 2009-11-11

2.4. Satz. *Sei $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ eine Dirichlet-Reihe, die für $s = s_0$ (nicht notwendig absolut) konvergiert. Dann konvergiert die Reihe gleichmäßig in jedem Winkelbereich*

$$W(s_0, \alpha) := \{s_0 + re^{i\varphi} \,:\, r \geq 0, |\varphi| \leq \alpha\},$$

$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.



Beweis. 1. Schritt: O.B.d.A. $s_0 = 0$.

$$\sum \frac{a_n}{n^s} = \sum \frac{a_n}{n^{s_0}} \frac{1}{n^{s-s_0}} = \sum \frac{\widetilde{a_n}}{n^{s_0}}, \qquad \widetilde{a_n} = \frac{a_n}{n^{s_0}}, \qquad \widetilde{s} = s - s_0.$$

Dann konvergiert also $\sum a_n$.

2. Schritt: O.B.d.A. $\sum a_n = 0$, sonst Abänderung von a_1.

3. Schritt: Setze $A(x) := \sum_{n \leq x} a_n$. Mit Abelscher partieller Summation erhält man

$$\sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^s} = \frac{A(x)}{x^s} + s \int_1^x \frac{A(u)}{u^{s+1}} \,\mathrm{d}u,$$

$$\sum_{x<n \leq y} \frac{a_n}{n^s} = \frac{A_(y)}{y^s} - \frac{A(x)}{x^s} + s \int_x^y \frac{A(u)}{u^{s+1}} \,\mathrm{d}u,$$

$$\left| \sum_{x<n \leq y} \frac{a_n}{n^s} \right| \leq |A(y)| + |A(x)| + |s| \int_x^y \frac{|A(u)|}{u^{\sigma+1}} \,\mathrm{d}u$$

für $s \in W(0, \alpha)$.

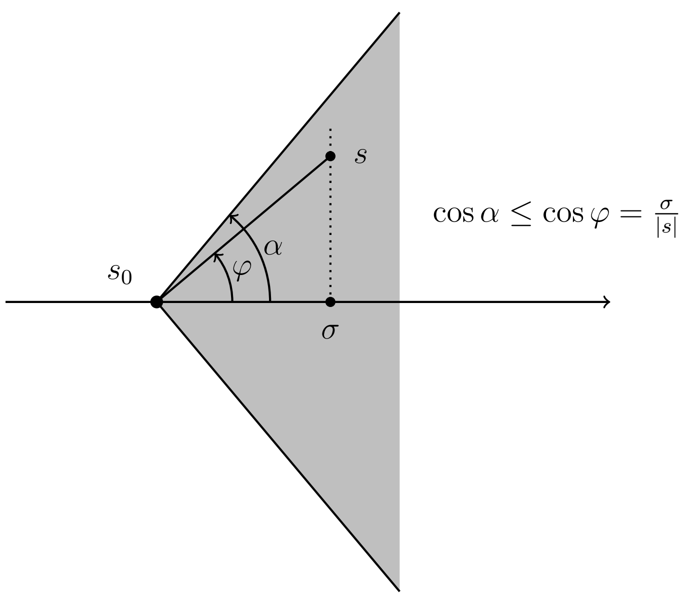
Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Setze

$$\epsilon' := \frac{\epsilon}{2 + \frac{a}{\cos\alpha}} > 0.$$

Sei $x_0 \geq 1$ so groß, dass $|A(\xi)| \leq \epsilon'$ für alle $\xi \geq x_0$, dann folgt für $s \in W(0, \alpha)$ und $x_0 \leq x < y$

$$\left| \sum_{x<n\leq y} \frac{a_n}{n^s} \right| \leq 2\epsilon' + \begin{cases} \frac{|s|}{\sigma} \frac{\epsilon'}{x^\sigma}, & \text{falls } s \in W(0,\alpha) \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{falls } s = 0. \end{cases}$$

Unter Beachtung von $\frac{a}{x^\sigma} \leq 1$ und der Skizze



erhält man

$$\left| \sum_{x<n\leq y} \frac{a_n}{n^s} \right| \leq \Big(2 + \frac{1}{\cos\alpha}\Big)\epsilon' = \epsilon$$

für alle $s \in W(0, \alpha)$. Dies zeigt die Behauptung. □

2.5. Corollar. *In der Halbebene $H\big(\sigma_c(f)\big)$ konvergiert $f(s) = \sum \frac{a_n}{n^s}$ auf jedem Kompaktum gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion.*

2.6. Satz. *Für eine Dirichlet-Reihe* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *gilt:*

$$\boxed{\sigma_a(f) - \sigma_c(f) \le 1}.$$

Beweis. Die Reihe konvergiere für $s = s_0$ (bedingt). Nur zu zeigen ist: Für jedes $\epsilon > 0$ konvergiert die Reihe für $s = s_0 + 1 + \epsilon$ sogar absolut. Es gibt eine Konstante $M \in \mathbb{R}_+$, so dass $\left|\frac{a_n}{n^{\sigma_0}}\right| \le M$ für alle $n \ge 1$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{|n^{\sigma_0+1+\epsilon}|} \le M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} < \infty$$

□

Für $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$ gilt $\sigma_c(f) = 0$, $\sigma_a(f) = 1$.

2.7. Satz (Identitätssatz für Dirichlet-Reihen). *Sei* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *eine Dirichlet-Reihe mit* $\sigma_a(f) < \infty$. *Es gebe eine Punktfolge* $s_1, s_2, s_3, \ldots$ *mit* $\operatorname{Re} s_\nu > \sigma_a(f)$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \operatorname{Re} s_\nu = \infty$, *so dass* $f(s_\nu) = 0$ *für alle* ν. *Dann gilt* $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0$.

Beweis. Annahme: Nicht alle $a_\nu = 0$. Sei $k \ge 1$ minimal mit $a_k \ne 0$.

$$f(s) = \frac{a_k}{k^s} + \sum_{n>k} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{k^s}\Big(a_k + \sum_{n>k} \frac{a_n}{(n/k)^s}\Big).$$

Die Reihe konvergiert für ein s_0 absolut:

$$\sum_{n>k} \frac{|a_n|}{(n/k)^{\sigma_0}} =: M < \infty.$$

Dann gilt

$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{(n/k)^{s_0+r}}\right| \le \sum_{n>k} \frac{|a_n|}{(n/k)^{\sigma_0}} \Big(\frac{k}{k+1}\Big)^{\operatorname{Re} r} \le M \Big(\frac{k}{k+1}\Big)^{\operatorname{Re} r} \longrightarrow 0$$

für $\operatorname{Re} r \longrightarrow \infty$. Daraus folgt: Es gibt ein $\sigma_* \in \mathbb{R}$, so dass

$$\left|\sum_{n>k} \frac{a_n}{(n/k)^s}\right| < |a_k| \qquad \text{für } \operatorname{Re} s \ge \sigma_*.$$

Also $f(s) \ne 0$ für $\operatorname{Re} s \ge \sigma_*$, Widerspruch! □

Bemerkung. $F(s) = \sin s$, $F(\nu\pi) = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}$, aber F ist nicht identisch 0.

2.8. Arithmetische Funktionen und Dirichlet-Reihen. Eine *arithmetische Funktion* ist eine Abbildung

$$a \,:\, \mathbb{N}_1 \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Dieser Funktion ist eine Dirichlet-Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

zugeordnet. Wenn diese Reihe irgendwo in $\mathbb{C}$ konvergiert, ist umgekehrt die arithmetische Funktion durch die holomorphe Funktion

$$f \,:\, H\bigl(\sigma_c(f)\bigr) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eindeutig bestimmt.

2.9. Satz und Definition. *Seien* $a, b : \mathbb{N}_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ *zwei arithmetische Funktionen, so dass die Dirichlet-Reihen*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \qquad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}$$

absolute Konvergenz-Abszissen $< \infty$ *haben. Für* $\operatorname{Re} s > \max\bigl(\sigma_a(f), \sigma_a(g)\bigr)$ *gilt dann*

$$h(s) := f(s)\, g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

mit

$$c(n) = \sum_{d|n} a(d)\, b\Bigl(\frac{n}{d}\Bigr) = \sum_{kl=n} a(k)\, b(l).$$

Man schreibt hierfür

$$c = a * b$$

*(*Dirichlet-Faltung arithmetischer Funktionen*).*

Beweis.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)}{k^s}\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{b(l)}{l^s}\right) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{a(k)\, b(l)}{(kl)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{kl=n} a(k)\, b(l)\right) \frac{1}{n^s}.$$

$\square$

2.10. Satz. *Die Dirichlet-Faltung für arithmetische Funktionen genügt folgenden Rechenregeln:*

(i) $a * b = b * a$,

(ii) $(a * b) * c = a * (b * c)$,

(iii) $a * (b_1 + b_2) = a * b_1 + a * b_2$,

(iv) $a * \delta_1 = a$ *für alle* a,

wobei $\delta_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *wie folgt definiert ist:*

$$\delta_1(n) = \delta_{1n} = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1, \\ 0, & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

Beweis. Leicht. □

2.11. Definition. Die *Möbius-Funktion* $\mu : \mathbb{N}_1 \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist definiert durch

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0, & \text{falls } n \text{ nicht quadratfrei}, \\ (-1)^r & \text{für } n = p_1 p_2 \cdots p_r, \quad p_j \text{ paarweise verschieden.} \end{cases}$$

2.12. Satz.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1n}.$$

Beweis. $n = 1$: Klar. $n \geq 2$: Sei n' der quadratfreie Kern von n. Es folgt

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n'} \mu(d) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^r} (-1)^{|\alpha|} = \big((-1)^0 + (-1)^1\big)^r = 0$$

($n' = p_1 p_2 \cdots p_r$, $r \geq 1$, $|\alpha| = \sum \alpha_\nu$). □

Andere Formulierung: Sei

$\mathit{1} : \mathbb{N}_1 \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\mathit{1}(n) = 1$.

Dann ist

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d)\, \mathit{1}\Big(\frac{n}{d}\Big),$$

also

$$\boxed{\mu * \mathit{1} = \delta_1}.$$

2.13. Corollar.

$$\Big(\sum \frac{\mu(n)}{n^s}\Big)\Big(\sum \frac{1}{n^s}\Big) = 1,$$

d.h.

$$\boxed{\tfrac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\mu(n)}{n^s}}.$$

2.14. Definition. Die *Von-Mangoldt-Funktionen* sind definiert durch

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & \text{falls } n = p^m,\ p \text{ prim},\ m \geq 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\Lambda_1(n) := \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{falls } n = p^m,\ p \text{ prim},\ m \geq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $\Lambda(n) = \Lambda_1(n) \log n$.

Die *Teileranzahl-Funktion* τ ist definiert durch

$$\tau(n) = \text{Anzahl der Teiler } d \text{ von } n,\ 1 \leq d \leq n,\ d|n.$$

Anders ausgedrückt:

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1.$$

2.15. Satz. *Für* $\operatorname{Re} s > 1$ *gilt*

(i) $$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

(ii) $$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s},$$

(iii) $$\log \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)}{n^s},$$

(iv) $$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

(v) $$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}.$$

Beweis. (i) und (iii) wurden bereits früher gezeigt; (ii) folgt durch Differenzieren der Dirichlet-Reihe für ζ, (iv) durch Differenzieren von (iii). Zu (v):

$$\zeta(s)\,\zeta(s) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

mit $c_n = \sum_{d|n} 1 \cdot 1 = \tau(n)$ (Dirichlet-Produkt), d.h. $c = \mathit{1} * \mathit{1} = \tau$. □

2.16. Mellin-Transformation. Sei $f : [1,\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion. Es gebe ein $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = \mathcal{O}(x^{\sigma_0}) \quad \text{für } x \longrightarrow \infty.$$

Dann existiert für $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ das Integral

$$\boxed{F(s) := \textstyle\int_1^\infty f(x) x^{-s} \frac{\mathrm{d}x}{x}},$$

und $F(s)$ ist eine holomorphe Funktion.

Die Zuordnung $f \mapsto F$ heißt *Mellin-Transformation.*

Bemerkung (Vergleich mit der Laplace-Transformation). Mit der Variablen-Substitution $x = e^t$, $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t$ lässt sich die Mellin-Transformation schreiben als

$$F(s) = \int_0^\infty f(e^t)\, e^{-ts}\, \mathrm{d}t.$$

$$G(s) := \int_0^\infty g(t)\, e^{-ts}\, \mathrm{d}t$$

ist die Laplace-Transformation einer messbaren Funktion $g : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, die geeigneten Wachstums-Bedingungen genügt.

2.17. Satz. *Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine arithmetische Funktion und*

$$A(x) := \sum_{n \leq x} a_n.$$

Es gelte $A(x) = \mathcal{O}(x^{\sigma_0})$ mit $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert die Dirichlet-Reihe

$$f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

für $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, *und es gilt*

$$f(s) = s \int_1^\infty A(x)\, x^{-s} \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \textit{(Mellin-Transformation).}$$

Beweis. Abelsche partielle Summation liefert:

$$\sum_{n \le x} \frac{a_n}{n^s} = \frac{A(x)}{x^s} + s \int_1^\infty \frac{A(u)}{u^s} \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

Die Behauptung ergibt sich durch Grenzübergang $x \longrightarrow \infty$. $\square$

Bemerkung. Spezialfall: $\zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x$ für $\operatorname{Re} s > 1$.