1. Zeta-Funktion und Euler-Produkt

1.1. Die *Riemannsche Zeta-Funktion* ist für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$ definiert durch

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Traditionell schreibt man $s = \sigma + it$ mit $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$n^s = n^{\sigma+it} = e^{(\sigma+it)\log n} = e^{\sigma \log n} e^{it \log n} = n^\sigma e^{it\log n},$$

also

$$\frac{1}{n^s} = \frac{e^{-it\log n}}{n^\sigma},$$

und wegen $|e^{i\alpha}| = 1$ für α reell folgt daraus

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^\sigma}.$$

Für jedes $\delta > 0$ ist die Reihe $\sum \frac{1}{n^{1+\delta}} < \infty$ eine Majorante für $\sum \frac{1}{n^s}$, $\operatorname{Re} s \geq 1 + \delta$. Deshalb ist die Zeta-Reihe in jeder abgeschlossenen Halbebene

$$\overline{H(1+\delta)} := \{s \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} s \geq 1 + \delta\}$$

absolut und gleichmäßig konvergent. Hieraus folgt, dass die Zeta-Funktion in der Halbebene

$$H(1) := \{s \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} s > 1\}$$

holomorph ist.

1.2. Satz (Euler-Produkt). *Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$ gilt*

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen zu erstrecken ist.

Das Euler-Produkt konvergiert sogar normal in $H(1)$.

[0]Mitschrift von Andreas Wadhwa. Letzte Änderung: 2009-11-11

1.3. Erinnerung. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f_\nu : G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Man sagt, das Produkt

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + f_\nu)$$

konvergiert *normal*, falls für jedes Kompaktum $K \subset G$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} ||f_\nu||_K < \infty.$$

Dabei wird gesetzt

$$||f||_K := \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

Falls $\prod(1 + f_\nu)$ in G normal konvergiert, konvergiert

$$F_k(z) := \prod_{\nu=1}^{k}(1 + f_\nu(z))$$

für $k \to \infty$ auf jedem Kompaktum $K \subset G$ gleichmäßig, also ist dann

$$F(z) := \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + f_\nu(z))$$

eine in G holomorphe Funktion.

In diesem Fall gilt $F(z_0) = 0$ genau dann, wenn $1 + f_\nu(z_0) = 0$ für wenigstens ein ν gilt. Für die Ordnung der Nullstelle gilt

$$\mathrm{ord}_{z_0}(F) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{ord}_{z_0}(1 + f_\nu).$$

Hier sind nur endlich viele Summanden von 0 verschieden.

1.4. *Beweis* der normalen Konvergenz des Euler-Produkts. In $\overline{H(1+\delta)}$ gilt

$$\left|\frac{1}{p^s}\right| = \left|\frac{1}{p^\sigma}\right| \leq \frac{1}{p^{1+\delta}}.$$

Für $|z| \leq \frac{1}{2}$ gilt

$$\left|1 - \frac{1}{1-z}\right| = \frac{|z|}{|1-z|} \leq \frac{|z|}{1/2} = 2|z|.$$

Damit gilt für $s \in \overline{H(1+\delta)}$

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = 1 + f_p(s)$$

mit $|f_p(s)| \leq 2\frac{1}{p^{1+\delta}}$. Da

$$\sum_p \frac{1}{p^{1+\delta}} \leq \sum_n \frac{1}{n^{1+\delta}} < \infty,$$

folgt daraus die behauptete normale Konvergenz. □

1.5. *Beweis*, dass das Euler-Produkt die Zeta-Funktion darstellt. Sei $\mathcal{P}_n := \{p_1, \ldots, p_n\}$ die Menge der ersten n Primzahlen und

$$\mathbb{N}(\mathcal{P}_n) := \{N \in \mathbb{N} \,:\, N = p_1^{k_1} \cdots P_n^{k_n} \ (k_\nu \geq 0)\}.$$

Behauptung.

$$\prod_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{N \in \mathbb{N}(\mathcal{P}_n)} \frac{1}{N^s}.$$

Beweis durch Induktion nach n.

Induktions-Anfang $n = 1$:

$$\frac{1}{1-p_1^{-s}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{\nu s}} = \sum_{N \in \mathbb{N}(\mathcal{P}_1)} \frac{1}{N^s}.$$

Induktions-Schluss $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
\prod_{p \in \mathbb{N}(\mathcal{P}_{n+1})} \frac{1}{1-p^{-s}} &= \Big(\prod_{p \in \mathbb{N}(\mathcal{P}_n)} \frac{1}{1-p^{-s}} \Big) \frac{1}{1-p_{n+1}^{-s}} \\
&= \Big(\sum_{N \in \mathbb{N}(\mathcal{P}_n)} \frac{1}{N^s} \Big) \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_{n+1}^{\nu s}} \Big) \\
&= \sum_{N \in \mathbb{N}(\mathcal{P}_{n+1})} \frac{1}{N^s}.
\end{aligned}$$

(Wegen absoluter Konvergenz ist gliedweise Multiplikation und Umordnung erlaubt.)

Die im Satz behauptete Formel folgt durch Grenzübergang $n \to \infty$. □

1.6. Satz (Abelsche partielle Summation). *Sei $(a_n)_{n\geq n_0}$ eine Folge komplexer Zahlen und*

$$f\ :\ [n_0,\infty[\to\mathbb{C}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Für eine reelle Zahl $x\geq n_0$ werde gesetzt

$$A(x):=\sum_{n_0\leq n\leq x}a_n.$$

Dann gilt

$$\sum_{n_0\leq n\leq x}a_nf(n)=A(x)f(x)-\int_{n_0}^{x}A(u)f'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Beweis. Zunächst wird der Fall behandelt, dass $x=N$ ganz ist. Induktion nach $N\geq n_0$.

$N=n_0:\quad \mathrm{LS}=a_{n_0}f(n_0);\ \mathrm{RS}=A(n_0)f(n_0)=a_{n_0}f(n_0)$.

$N\to N+1$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{LS}(N+1)-\mathrm{LS}(N)=a_{N+1}f(N+1);\\&\mathrm{RS}(N+1)-\mathrm{RS}(N)\\&\qquad=A(N+1)f(N+1)-A(N)f(N)-\int_N^{N+1}A(u)f'(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Für $N\leq u<N+1$ gilt $A(u)=A(N)$, also

$$\int_N^{N+1}A(u)f'(u)\,\mathrm{d}u=A(N)\big(f(N+1)-f(N)\big),$$

d.h. LS = RS.

Falls x nicht ganz ist, setzte $N:=\lfloor x\rfloor$.

$$\begin{aligned}&\mathrm{LS}(x)-\mathrm{LS}(N)=0;\\&\mathrm{RS}(x)-\mathrm{RS}(N)=A(N)\big(f(x)-f(N)\big)-\int_N^xA(u)f'(u)\,\mathrm{d}u\\&\qquad=A(N)\big(f(x)-f(N)\big)-A(N)\int_N^xf'(u)\,\mathrm{d}u=0.\end{aligned}$$

□

1.7. Satz. *Die Zeta-Funktion lässt sich meromorph fortsetzten in die Halbebene* $H(0) = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}$. *Die fortgesetzte Funktion ist holomorph bis auf einen Pol erster Ordnung an der Stelle* $s = 1$ *mit dem Residuum* 1.

Bemerkung. Später wird bewiesen, dass sich die Zeta-Funktion sogar in die ganze Ebene $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzen lässt.

Beweis. Für $\operatorname{Re} s > 1$ gilt

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} = \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s \int_1^x \frac{\lfloor \xi \rfloor}{\xi^{s+1}} \, \mathrm{d}\xi$$

(abelsche Summation mit $a_n = 1$, $f(x) = x^{-s}$, $f'(x) = -sx^{-s-1}$).

Grenzübergang $x \to \infty$ liefert

$$\zeta(s) = 0 + s \int_1^\infty \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x.$$

(Das Integral konvergiert, da $\left|\frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\right| \le \frac{1}{x^\sigma}$, $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$.)

Wegen

$$\int_1^\infty \frac{x}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x^s} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{s-1}$$

gilt für $\operatorname{Re} S > 1$

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x.$$

Das Integral konvergiert sogar für $\operatorname{Re} s > 0$, da

$$\left|\frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\right| \le \frac{1}{|x^{s+1}|} = \frac{1}{x^{\sigma+1}},$$

und es stellt in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ eine holomorphe Funktion dar. Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung zum Integral.

$$\int_1^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{x - n}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x,$$

$$\left|\frac{x - n}{x^{s+1}}\right| \le \frac{1}{n^{\sigma+1}} \quad \text{für } n \le x < n+1.$$

Da $\sum \frac{1}{n^{\sigma+1}} < \infty$, konvergiert die unendliche Reihe gegen eine holomorphe Funktion, also stellt das Integral für $\operatorname{Re} s > 0$ eine holomorphe Funktion dar.

Wir halten fest:

$$\boxed{\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} \, \mathrm{d}x \qquad \text{für } \operatorname{Re} s > 0.}$$

1.8. Satz. *Die (fortgesetzte) Zeta-Funktion hat keine Nullstellen auf der Geraden* $\operatorname{Re} s = 1$.

Beweis. Für $\operatorname{Re} s > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}},$$

insbesondere $\zeta(s) \neq 0$. In der Halbebene $H(1)$ existiert deshalb $\log \zeta(s)$; der Wert ist eindeutig bestimmt durch die Bedingung, dass $\log \zeta(\sigma)$ rell sei für $\sigma > 1$ reell. Es ist

$$\log \zeta(s) = \sum_p \log \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Wir wenden die für $|z| < 1$ gültige Formel

$$\log \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

mit $z = p^{-s}$ an:

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{ms}} = \sum_n \frac{\Lambda_1(n)}{n^s}$$

mit $\Lambda_1(n) := \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{für } n = p^m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Für $\sigma > 1$ ist

$$\log \zeta(\sigma + it) = \sum_n \frac{\Lambda_1(n)}{n^\sigma} e^{-it \log n},$$

also

$$\log |\zeta(\sigma + it)| = \sum_n \frac{\Lambda_1(n)}{n^\sigma} \cos(t \log n).$$

Annahme: $\zeta(1 + i\tau) = 0$ für ein $\tau \in \mathbb{R}^*$.

Wir betrachten die Funktion

$$F(s) = \zeta(s)^3 \zeta(s + i\tau)^4 \zeta(s + 2i\tau).$$

F ist in einer Umgebung von $s = 1$ holomorph und es gilt $F(1) = 0$ (unter der getroffenen Annahme).

Sei $\sigma > 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}\log|F(\sigma)| &= \log|\zeta(\sigma)|^3|\zeta(\sigma+i\tau)|^4|\zeta(\sigma+2i\tau)| \\ &= \sum \frac{\Lambda_1(n)}{n^\sigma} \underbrace{\big(3+4\cos(\tau\log n)+\cos(2\tau\log n)\big)}_{\geq 0 \text{ nach unterem HS}} \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

also $|F(s)| \geq 1$ für alle $\sigma > 1$. Widerspruch zu $F(1) = 0$. □

Hilfssatz. *Für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$3 + 4\cos\alpha + \cos 2\alpha \geq 0.$$

Beweis. Es ist $2(1+\cos\alpha)^2 = 3 + 4\cos\alpha + \cos 2\alpha$. Dies sieht man unter Verwendung von $\cos\alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$. □

1.9. *Bemerkung.* Die Riemannsche Vermutung besagt, dass

$$\zeta(s) \neq 0$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.