- **Zahlentheoretische (arithmetische) Funktionen** $a : \mathbb{N}_1 \longrightarrow \mathbb{C}$.

  Beispiele: $\mathbb{1}$, δ_1, $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$, Teileranzahl-Funktion τ, Mangoldt-Funktionen Λ, Λ_1.

- **Definition** multiplikativ, vollständig multiplikativ.

- **Summatorische Funktion** $F(n) := \sum_{d|n} f(d)$.

- **Zugeordnete Dirichlet-Reihe** $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$, Identitätssatz.

  Zeta-Funktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, Primzeta-Funktion $\mathcal{P}(s) = \sum_{p} \frac{1}{p^s}$

- **Produkt, Dirichlet-Faltung**

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)}{k^s}\Big)\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{b(\ell)}{\ell^s}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$$

  mit $c(n) = (a * b)(n) := \sum_{k\ell=n} a(k)b(\ell) = \sum_{k|n} a(k)b(n/k)$.

- **Konvergenz-Satz:** **Vor.** $A(x) := \sum_{n \leqslant x} a(n) = O(x^{\alpha})$ für $x \to \infty$, $(\alpha \in \mathbb{R}_+)$.

  Beh. $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ konvergiert für $s > \alpha$, sogar gleichmäßig auf $[\alpha + \varepsilon, \infty[$.

  Der Beweis stützt sich auf

- **Satz** (Abelsche partielle Summation)

  Vor. $a : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$, $A(x) = \sum_{n \leqslant a} a(n)$, $f\colon [1, \infty] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar.

  Beh. $\sum_{n \leqslant x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt$.

- **Logarithmus der Zetafunktion**

$$\log \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)}{n^s} = \mathcal{P}(s) + \underbrace{\sum_{k \geqslant 2} \frac{\mathcal{P}(ks)}{k}}_{\text{beschr. für } s \geqslant 1}.$$

- **Verhalten für $s \searrow 1$:**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sim \frac{1}{s-1}, \quad \mathcal{P}(s) = \sum_{p} \frac{1}{p^s} \sim \log \frac{1}{s-1},$$

  insbesondere $\sum_{p} \frac{1}{p} = \infty$ (Euler).