11. Gruppen-Charaktere. Dirichletsche L-Reihen

11.1. Definition (Gruppen-Charaktere). Sei G eine Gruppe. Ein *Charakter* von G ist ein Gruppen-Homomorphismus

$$\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

Ist speziell G eine *endliche* Gruppe (multiplikativ geschrieben) der Ordnung r und Einselement e, so gilt für jedes Element $x \in G$

$$\chi(x)^r = \chi(x^r) = \chi(e) = 1,$$

also ist $\chi(x)$ eine r-te Einheitswurzel. Es folgt

$$|\chi(x)| = 1 \quad \text{und} \quad \overline{\chi(x)} = \chi(x)^{-1} = \chi(x^{-1}) \quad \text{für alle } x \in G.$$

Beispiel. Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung r und $g \in G$ ein erzeugendes Element von G, d.h.

$$G = \{e = g^0, g = g^1, g^2, g^3, \ldots, g^{r-1}\} =: \langle g \rangle, \qquad (g^r = e).$$

Ist dann $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ ein Charakter, so ist $\chi(g)$ eine r-te Einheitswurzel, also existiert eine ganze Zahl k, $0 \leqslant k < r$, mit $\chi(g) = e^{2\pi i k/r}$. Umgekehrt wird für jedes solche k durch

$$\chi_k(g^s) := e^{2\pi i k s/r}$$

ein Gruppen-Charakter von G definiert.

11.2. Satz und Definition (Charakter-Gruppe)
Sei G eine Gruppe. Die Menge aller Gruppen-Charaktere $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ bildet selbst eine Gruppe, wenn man die Multiplikation zweier Charaktere χ_1, χ_2 durch

$$(\chi_1\chi_2)(x) := \chi_1(x)\chi_2(x) \quad \text{für alle } x \in G$$

definiert. Diese Gruppe ist abelsch. Ihr Einselement ist der sog. Einheits-Charakter $\chi_0 : G \to \mathbb{C}^*$ *mit*

$$\chi_0(x) := 1 \quad \textit{für alle } x \in G.$$

Die Gruppe aller Charaktere heißt die Charakter-Gruppe *von G und wird mit $\widehat{G}$ bezeichnet.*

Beweis. Die einfache Verifikation der Gruppen-Axiome sei der Leserin überlassen.

11.3. Lemma. *Sei G eine (multiplikativ geschriebene) endliche abelsche Gruppe mit Einselement e. Dann gibt es zu jedem $g \in G$ mit $g \neq e$ einen Charakter $\chi \in \widehat{G}$, so dass $\chi(g) \neq 1$.*

Beweis. Sei $H := \langle g \rangle \subset G$ die von g erzeugte zyklische Untergruppe. Sei $r := \#H$ die Ordnung von H. Da $g \neq e$, gilt $r \geqslant 2$. Die Zahl $1 \neq \omega := e^{2\pi i/r}$ ist eine r-te Einheitswurzel und mit der Definition $\eta(g^k) := \omega^k$ wird ein Charakter $\eta : H \to \mathbb{C}^*$ mit $\eta(g) \neq 1$ definiert. Die Behauptung des Lemmas folgt nun aus dem

11.4. Hilfssatz. *Sei G eine (multiplikativ geschriebene) endliche abelsche Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und $\eta : H \to \mathbb{C}^*$ ein Charakter. Dann kann η zu einem Charakter $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ mit $\chi \mid H = \eta$ fortgesetzt werden.*

Beweis. Wir können $H \subsetneqq G$ voraussetzen, da sonst nichts zu beweisen ist.

a) Wir betrachten zuerst den Spezialfall, dass $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $r := \#G$ ist. Die Untergruppe H ist dann ebenfalls zyklisch. Nach Satz 3.4 gilt $H = \langle g^k \rangle$ mit einem Teiler $k \mid r$. Der Wert $\eta(g^k) \in \mathbb{C}^*$ ist eine (r/k)-te Einheitswurzel. Es gibt ein $\omega \in \mathbb{C}^*$ mit $\omega^k = \eta(g^k)$. Dies ω ist eine r-te Einheitswurzel. Durch die Definition $\chi(g^\nu) := \omega^\nu$ für alle ν wird nun ein Charakter $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ definiert, der auf H mit η übereinstimmt.

b) Im allgemeinen Fall setzen wir η auf folgende Weise zu einem Charakter $\eta_1 : H_1 \to \mathbb{C}^*$ auf einer größeren Untergruppe $H_1 \subset G$ mit $H \subsetneqq H_1$ fort:
Wir wählen ein $a \in G \smallsetminus H$. Sei $A := \langle a \rangle$ die von a erzeugte zyklische Untergruppe. Dann ist $A_0 := H \cap A$ eine Untergruppe von A. Auf A_0 hat man den Charakter $\eta \mid A_0 \to \mathbb{C}^*$, der nach a) zu einem Charakter $\alpha : A \to \mathbb{C}^*$ fortgesetzt werden kann. Wir definieren nun

$$H_1 := AH = \{gh : \ g \in A,\ h \in H\}$$

Da G abelsch ist, ist dies tatsächlich eine Untergruppe von G mit $H_1 \supsetneqq H$. Wir definieren einen Charakter $\eta_1 : H_1 \to \mathbb{C}^*$ durch

$$\eta_1(x) := \alpha(g)\eta(h) \quad \text{für } x = gh,\ g \in A, h \in H.$$

Dies ist wohldefiniert, denn für $x = gh = \tilde{g}\tilde{h}$ ist $g\tilde{g}^{-1} = \tilde{h}h^{-1} \in A \cap H = A_0$, also

$$\alpha(g\tilde{g}^{-1}) = \eta(\tilde{h}h^{-1}) \quad \Longrightarrow \quad \alpha(g)\eta(h) = \alpha(\tilde{g})\eta(\tilde{h}).$$

Außerdem prüft man leicht nach, dass $\eta_1(xy) = \eta_1(x)\eta_1(y)$ für alle $x, y \in H_1 = AH$, woraus folgt, dass $\eta_1 : H_1 \to \mathbb{C}^*$ ein Charakter ist. Falls $H_1 = G$, sind wir fertig, andernfalls wiederhole man diesen Erweiterungs-Prozess. Nach endlich vielen Schritten ist der Charakter $\eta : H \to \mathbb{C}^*$ auf ganz G fortgesetzt.

11.5. Satz. *Sei G eine (multiplikativ geschriebene) endliche abelsche Gruppe der Ordnung r mit Einselement e.*

a) *Sei $\chi \in \widehat{G}$ ein vorgegebener Charakter. Dann ist*

$$\sum_{x\in G} \chi(x) = \begin{cases} r, & \text{wenn } \chi = \chi_0 \text{ der Einheits-Charakter ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) *Sei $x \in G$ ein vorgegebenes Element. Dann ist*

$$\sum_{\chi\in \widehat{G}} \chi(x) = \begin{cases} r, & \text{wenn } x = e, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. a) Die Formel ist trivial für den Einheits-Charakter. Ist χ irgend ein vom Einheits-Charakter verschiedener Charakter, so gibt es ein Element $x_1 \in G$ mit $\chi(x_1) \neq 1$. Durchläuft x alle Gruppen-Elemente, so auch $x_1 x$. Deshalb ist

$$\sum_{x\in G} \chi(x) = \sum_{x\in G} \chi(x_1 x) = \chi(x_1) \sum_{x\in G} \chi(x)$$

und es folgt

$$(1 - \chi(x_1)) \sum_{x\in G} \chi(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{x\in G} \chi(x) = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

b) Die Formel ist trivial für das Einselement e. Für ein Gruppen-Element $x \neq e$ existiert nach Lemma 11.3 mindestens ein Charakter $\chi_1 \in \widehat{G}$ mit $\chi_1(x) \neq 1$. Durchläuft χ die Gruppe $\widehat{G}$ aller Charaktere, so auch $\chi_1\chi$. Deshalb ist

$$\sum_{\chi\in \widehat{G}} \chi(x) = \sum_{\chi\in \widehat{G}} (\chi_1\chi)(x) = \chi_1(x) \sum_{\chi\in \widehat{G}} \chi(x)$$

und es folgt

$$(1 - \chi_1(x)) \sum_{\chi\in \widehat{G}} \chi(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{\chi\in \widehat{G}} \chi(x) = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

11.6. Corollar (Orthogonalitäts-Relationen). *Sei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung r.*

a) *Für Charaktere $\chi, \psi \in \widehat{G}$ gilt*

$$\sum_{x \in G} \chi(x)\overline{\psi(x)} = \begin{cases} r, & \textit{falls } \chi = \psi, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

b) *Für Elemente $x, y \in G$ gilt*

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x)\overline{\chi(y)} = \begin{cases} r, & \textit{falls } x = y, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. a) Da $|\psi(x)| = 1$, gilt $\overline{\psi(x)} = \psi(x)^{-1} = \psi^{-1}(x)$. Damit folgt

$$\sum_{x \in G} \chi(x)\overline{\psi(x)} = \sum_{x \in G} (\chi\psi^{-1})(x).$$

Nach Satz 11.5 a) ist die letzte Summe gleich r, falls $\chi\psi^{-1} \equiv 1$, d.h. wenn $\chi = \psi$, und sonst gleich 0.

b) Dies folgt in analoger Weise aus Satz 11.5 b).

Bemerkung. Die Orthogonalitäts-Relationen lassen sich auch so intepretieren: Sei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung r. Die Menge aller Funktionen

$$f : G \to \mathbb{C}$$

bildet dann einen r-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^G \cong \mathbb{C}^r$. Dieser Vektorraum wird zu einem unitären Vektorraum mit folgendem hermiteschen Skalarprodukt:

$$\mathbb{C}^G \times \mathbb{C}^G \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle := \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)}$$

Corollar 11.6 a) besagt dann, dass verschiedene Charaktere $\chi, \psi \in \widehat{G}$ zueinander orthogonal sind, genauer

$$\langle \chi, \psi \rangle = \begin{cases} 0, & \text{falls } \chi \neq \psi, \\ \#G, & \text{falls } \chi = \psi. \end{cases}$$

Aus dem nächsten Satz geht hervor, dass die Charaktere sogar eine Orthogonal-Basis des Raums $\mathbb{C}^G$ bilden.

11.7. Satz (Vollständigkeit der Charaktere). *Sei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung r und $\widehat{G}$ die Gruppe aller Charaktere von G. Für $a \in G$ sei $e_a : G \to \mathbb{C}$ die Funktion mit*

$$e_a(x) := \begin{cases} 1, & \textit{falls } x = a, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Bekanntlich bilden die $(e_a)_{a\in G}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^G$. Die e_a lassen sich wie folgt als Linearkombinationen der Charaktere darstellen:

$$(1) \qquad e_a = \frac{1}{r} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{\chi(a)}\, \chi.$$

Es folgt, dass die Charaktere $\chi \in \widehat{G}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^G$ bilden, insbesondere gilt

$$\#G = \#\widehat{G}.$$

Beweis. Für alle $x \in G$ ist wegen Satz 11.5 b)

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{\chi(a)}\chi(x) &= \sum_{\chi} \chi(a)^{-1}\chi(x) \\ &= \sum_{\chi} \chi(a^{-1}x) = \begin{cases} r, & \text{falls } x = a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\ &= r \cdot e_a(x). \end{aligned}$$

Daraus folgt Formel (1), q.e.d.

11.8. Definition (Dirichlet-Charaktere). Sei $m \geqslant 2$ eine ganze Zahl. Eine arithmetische Funktion $\chi : \mathbb{N}_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt Dirichlet-Charakter modulo m, falls χ durch einen Gruppen-Charakter

$$\tilde{\chi} : (\mathbb{Z}/m)^* \longrightarrow \mathbb{C}^*,$$

induziert wird, d.h.

$$\chi(n) = \begin{cases} \tilde{\chi}(n \bmod m), & \text{falls } \gcd(n, m) = 1, \\ 0, & \text{falls } \gcd(n, m) > 1. \end{cases}$$

Der Dirichletsche *Hauptcharakter* modulo m ist der vom Einheits-Charakter $1 : (\mathbb{Z}/m)^* \to \mathbb{C}$ induzierte Dirichlet-Charakter. Wir bezeichnen ihn mit χ_{0m}

oder kurz χ_0, wenn der Modul m aus dem Zusammenhang klar ist. Es gilt also

$$\chi_{0m}(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \gcd(n,m) = 1, \\ 0, & \text{falls } \gcd(n,m) > 1. \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass eine arithmetische Funktion $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ genau dann ein Dirichlet-Charakter modulo m ist, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

i) f ist vollständig multiplikativ, d.h. $f(1) = 1$ und

$$f(nn') = f(n)f(n') \quad \text{für alle } n, n' \in \mathbb{N}_1.$$

ii) $f(n) = f(n')$, falls $n \equiv n' \bmod m$.

iii) $f(n) = 0$ für alle n mit $\gcd(n,m) > 1$.

11.9. Definition (Dirichletsche L-Reihen). Sei $\chi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ ein Dirichlet-Charakter. Die zugeordnete *L-Reihe* (oder *L-Funktion*) ist die Dirichlet-Reihe

$$L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Diese Reihe konvergiert absolut für alle $s > 1$.

Beispiele. Sei $m = 4$.
i) Für den Hauptcharakter modulo 4 gilt $\chi_{0,4}(n) = 1$ für ungerades n und $\chi_{0,4}(n) = 0$ für gerades n. Daher ist

$$L(s,\chi_{0,4}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^s} = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \ldots$$

Da $2^{-s}\zeta(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k)^s}$, folgt

$$L(s,\chi_{0,4}) = (1 - 2^{-s})\zeta(s).$$

Da $\lim\limits_{s\searrow 1} \zeta(s) = \infty$, gilt auch $\lim\limits_{s\searrow 1} L(s,\chi_{0,4}) = \infty$.

ii) Da $(\mathbb{Z}/4)^* = \{\overline{1}, \overline{3}\}$ aus zwei Elementen besteht, gibt es genau einen vom Hauptcharakter verschiedenen Dirichlet-Charakter χ_1 modulo 4, nämlich

$$\chi_1(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 1, & \text{falls } m \equiv 1 \bmod 4, \\ -1, & \text{falls } m \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Also ist

$$L(s, \chi_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - + \ldots$$

Diese Dirichlet-Reihe konvergiert für alle $s > 0$. Für $s = 1$ erhält man die bekannte Leibniz'sche Reihe, d.h.

$$L(1, \chi_1) = \frac{\pi}{4}.$$

In Verallgemeinerung dieser Beispiele gilt folgender Satz.

11.10. Satz. *Sei $m \geqslant 2$ eine ganze Zahl.*

a) *Für den Hauptcharakter χ_{0m} modulo m lautet die zugehörige L-Reihe*

$$L(s, \chi_{0m}) = \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ \gcd(n,m)=1}} \frac{1}{n^s}.$$

Dabei wird über alle Zahlen $n \in \mathbb{N}_1$, die zu m teilerfremd sind, summiert. Diese Reihe konvergiert für $s > 1$ und es gilt

$$L(s, \chi_{0m}) = \prod_{p|m} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big) \zeta(s).$$

b) *Für jeden vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter χ modulo m konvergiert die L-Reihe $L(s, \chi)$ sogar für $s > 0$.*

Bemerkung. Der Faktor $\Phi_m(s) := \prod_{p|m} \Big(1 - \frac{1}{p^s}\Big)$ ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion mit $\Phi_m(1) = \varphi(m)/m$ (dabei ist $\varphi(m)$ die Eulersche Phi-Funktion). Es folgt also

$$\lim_{s \searrow 1} (s-1) L(s, \chi_{0m}) = \frac{\varphi(m)}{m}.$$