5. Elementare Abschätzungen zur Primzahlverteilung und das Bertrandsche Postulat

5.1. Für reelles $x > 0$ bezeichnen wir mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $p \leqslant x$. Dies kann man auch so schreiben:

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1.$$

$\pi(x)$ ist eine Treppenfunktion mit Sprüngen der Höhe 1 bei allen Primzahlen. Natürlich gilt $\pi(x) = 0$ für $x < 2$. Einige andere Werte sind

x	10	100	1000	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$\pi(x)$	4	25	168	1229	9592	78498	664579	5761455

Von Legendre und Gauß wurde vermutet, dass sich $\pi(x)$ für $x \to \infty$ asymptotisch wie $x/\log x$ verhält, in Zeichen

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{für } x \to \infty,$$

Dies ist definiert als

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Dieser Primzahlsatz wurde 1896 unabhängig von Jacques Hadamard und Charles de la Vallée Poussin bewiesen. In diesem Kapitel werden wir den Primzahlsatz nicht beweisen, sondern nur einige elementare Abschätzungen, die in diese Richtung gehen, wie

$$c_1 \cdot \frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant c_2 \cdot \frac{x}{\log x} \quad \text{für alle } x \geqslant 3.$$

mit Konstanten $0 < c_1 < 1 < c_2$.

Tschebyscheff führte 1852 zwei Funktionen ϑ und ψ ein, die zur Untersuchung der Primzahl-Verteilung oft bequemer sind als die Funktion $\pi(x)$.

5.2. Definition. Die Tschebyscheffschen Funktionen $\vartheta, \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \log p,$$

$$\psi(x) := \sum_{p^k \leqslant x} \log p.$$

Dabei wird im ersten Fall über alle Primzahlen $p \leqslant x$ und im zweiten Fall über alle Primzahlpotenzen $p^k \leqslant x$, $k \geqslant 1$, summiert.
Für $x < 2$ ist die Summe leer, deshalb gilt

$$\vartheta(x) = \psi(x) = 0 \quad \text{für } 0 \leqslant x < 2.$$

Die Funktion $\vartheta(x)$ ist eine monoton wachsende Treppenfunktion, die bei allen Primzahlen $x = p$ Sprünge der Höhe $\log p$ macht, die Funktion $\psi(x)$ macht Sprünge der Höhe $\log p$ bei allen Primzahlen p und allgemeiner Primzahlpotenzen $x = p^k$, $(k \geqslant 1)$.

Die Definition der ψ-Funktion lässt sich mithilfe der *Mangoldtschen Funktion*

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & \text{falls } n = p^k,\ p \text{ prim},\ k \geqslant 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

auch schreiben als

$$\psi(x) := \sum_{n \leqslant x} \Lambda(n).$$

5.3. Satz. *Für alle reellen $x \geqslant 1$ gilt*

a) $\quad \psi(x) = \sum_{k \geqslant 1} \vartheta(x^{1/k}),$

b) $\quad \psi(x) - 2\psi(x^{1/2}) = \sum_{k \geqslant 1} (-1)^{k-1} \vartheta(x^{1/k}) = \vartheta(x) - \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) \mp \ldots,$

insbesondere

c) $\quad \psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) \leqslant \vartheta(x).$

Beweis. a) folgt daraus, dass $p^k \leqslant x$ gleichbedeutend mit $p \leqslant x^{1/k}$ ist. Die Summe über k ist natürlich in Wirklichkeit endlich, da $\vartheta(x^{1/k}) = 0$, sobald $x^{1/k} < 2$.

b) Dies ergibt sich aus a) wegen $\psi(x^{1/2}) = \sum_{k \geqslant 1} \vartheta(x^{1/2k})$.

c) Die Ungleichung c) folgt aus b), da die Folge $(\vartheta(x^{1/k}))_{k \geqslant 1}$ monoton fällt.

5.4. Definition. Für eine natürliche Zahl n sei $V(n)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1, 2, \ldots, n$, d.h.

$$V(n) := \operatorname{lcm}(1, 2, ..., n).$$

Für die Primfaktor-Zerlegung von $V(n)$ gilt offenbar

$$V(n) = \prod_{p \leqslant n} p^{r(p,n)},$$

wobei für eine Primzahl p der Exponent $r(p,n)$ wie folgt definiert ist:

$$r(p,n) := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : p^k \leqslant n\} = \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor.$$

Wir setzen noch $V(0) := 1$ und $V(x) := V(\lfloor x \rfloor)$ für jede reelle Zahl $x \geqslant 0$. Damit gilt für die Tschebyscheffsche Psi-Funktion

$$\psi(x) = \log V(x).$$

Beispiele. Die Werte von $V(n)$ für $n \leqslant 10$ sind:

$$\begin{aligned}
V(1) &= 1, \\
V(2) &= 2, \\
V(3) &= 2 \cdot 3 = 6, \\
V(4) &= 2^2 \cdot 3 = 12, \\
V(5) &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 = V(6), \\
V(7) &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420, \\
V(8) &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840, \\
V(9) &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520 = V(10).
\end{aligned}$$

5.5. Satz (Legendre). *Sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt für die Primfaktor-Zerlegung von $n!$*

$$n! = \prod_{p \leqslant n} p^{\alpha(p,n)},$$

wobei $\quad \alpha(p,n) := v_p(n!) = \sum_{k \geqslant 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$

Bemerkung. Die Summe ist natürlich endlich, denn $\lfloor n/p^k \rfloor = 0$ für $p^k > n$.

Beweis. Die Anzahl der Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, n\}$, die durch p teilbar sind, ist gleich $\lfloor n/p \rfloor$. Davon sind $\lfloor n/p^2 \rfloor$ sogar durch p^2 teilbar, $\lfloor n/p^3 \rfloor$ durch p^3, usw. Daraus folgt die Behauptung.

Beispiele. a) Für $n = 10$ hat $10!$ die Primfaktoren $2, 3, 5, 7$ mit den Vielfachheiten

$$\begin{aligned} v_2(10!) &= \left\lfloor\frac{10}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10}{4}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10}{8}\right\rfloor = 5 + 2 + 1 = 8, \\ v_3(10!) &= \left\lfloor\frac{10}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{10}{9}\right\rfloor = 3 + 1 = 4, \\ v_5(10!) &= \left\lfloor\frac{10}{5}\right\rfloor = 2, \\ v_7(10!) &= \left\lfloor\frac{10}{7}\right\rfloor = 1, \end{aligned}$$

also $\quad 10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3\,628\,800.$

b) Wir wollen Satz 5.5 benützen, um zu untersuchen, auf vieviele Nullen die Dezimaldarstellung von 100! endet. Wir suchen also den größten Exponenten k, so dass 10^k ein Teiler von $100!$ ist. Wegen $10 = 2 \cdot 5$ und $v_2(n!) \geqslant v_5(n!)$ ist der gesuchte Exponent gleich

$$k = v_5(100!) = \left\lfloor\frac{100}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{100}{25}\right\rfloor = 20 + 4 = 24.$$

Die Dezimaldarstellung von 100! endet also auf 24 Nullen.

5.6. Hilfssatz. *Seien $a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 2$. Dann gilt*

i) $$\left\lfloor\frac{a+b}{m}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{a}{m}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{b}{m}\right\rfloor \in \{0, 1\},$$

ii) $$\left\lfloor\frac{a+b+1}{m}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{a}{m}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{b}{m}\right\rfloor \in \{0, 1\}.$$

Beweis. Division mit Rest ergibt

$$\begin{aligned} a &= q_1 m + \alpha, && 0 \leqslant \alpha \leqslant m - 1, \\ b &= q_2 m + \beta, && 0 \leqslant \beta \leqslant m - 1. \end{aligned}$$

Dabei ist $\lfloor\frac{a}{m}\rfloor = q_1$ und $\lfloor\frac{b}{m}\rfloor = q_2$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} a + b &= (q_1 + q_2)m + (\alpha + \beta), && 0 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 2m - 2, \\ a + b + 1 &= (q_1 + q_2)m + (\alpha + \beta + 1), && 0 \leqslant \alpha + \beta + 1 \leqslant 2m - 1. \end{aligned}$$

Zum Beweis der Behauptung ii) unterscheiden wir zwei Fälle:

Falls sogar $\alpha+\beta+1 \leqslant m-1$, folgt $\lfloor\frac{a+b+1}{m}\rfloor = q_1+q_2$, d.h.

$$\Big\lfloor\frac{a+b+1}{m}\Big\rfloor - \Big\lfloor\frac{a}{m}\Big\rfloor - \Big\lfloor\frac{b}{m}\Big\rfloor = 0.$$

Falls aber $\alpha+\beta+1 \geqslant m$, folgt $\alpha+\beta+1-m \leqslant m-1$, d.h.

$$a+b+1 = (q_1+q_2+1)m+\gamma \quad \text{mit } 0 \leqslant \gamma \leqslant m-1.$$

Dann ist $\lfloor\frac{a+b+1}{m}\rfloor = q_1+q_2+1$, also $\lfloor\frac{a+b+1}{m}\rfloor - \lfloor\frac{a}{m}\rfloor - \lfloor\frac{b}{m}\rfloor = 1$, q.e.d.

Die Behauptung i) beweist man analog, sie ist sogar etwas einfacher.

5.7. Lemma. *Die Funktion* $V(n) = \operatorname{lcm}(1,2,...,n)$ *genügt den folgenden Teilbarkeits-Relationen*

a) *Für* $1 \leqslant m < n$ *gilt*

$$m\binom{n}{m} \,\Big|\, V(n),$$

b) *Für* $1 \leqslant m < n \leqslant 2m$ *gilt*

$$V(n) \,\Big|\, \binom{n}{m}V(m).$$

Beweis. a) Es ist zu zeigen: Ist p eine Primzahl und k der maximale Exponent mit $p^k \,\Big|\, m\binom{n}{m}$, so folgt $p^k \leqslant n$. Dies sieht man so: Es gilt

$$m\binom{n}{m} = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}.$$

Ist r der maximale Exponent mit $p^r \leqslant n$, so folgt mit dem Satz von Legendre

$$k = v_p\Big(\frac{n!}{(m-1)!(n-m)!}\Big) = \sum_{\nu=1}^{r}\Big(\Big\lfloor\frac{n}{p^\nu}\Big\rfloor - \Big\lfloor\frac{m-1}{p^\nu}\Big\rfloor - \Big\lfloor\frac{n-m}{p^\nu}\Big\rfloor\Big) \leqslant r,$$

da nach Hilfssatz 5.6 ii) jeder Summand gleich 0 oder 1 ist. Daraus folgt die Behauptung.

b) Sei p prim und r der maximale Exponent mit $p^r \leqslant n$. Es ist zu zeigen, dass p^r ein Teiler von $\binom{n}{m}V(m)$ ist.

Falls sogar $p^r \leqslant m$, gilt $p^r \mid V(m)$, und wir sind fertig.

Falls aber $p^r > m$, gilt $p^{r-1} \leqslant m$, also $p^{r-1} \mid V(m)$. Es muss also nur noch gezeigt werden, dass dann $p \mid \binom{n}{m}$. Dies sieht man so (man beachte $0 < n - m \leqslant m$):

$$\begin{aligned} v_p\binom{n}{m} &= \sum_{\nu=1}^{r}\Big(\Big\lfloor\frac{n}{p^\nu}\Big\rfloor - \Big\lfloor\frac{m}{p^\nu}\Big\rfloor - \Big\lfloor\frac{n-m}{p^\nu}\Big\rfloor\Big) \\ &\geqslant \Big\lfloor\frac{n}{p^r}\Big\rfloor - \Big\lfloor\frac{m}{p^r}\Big\rfloor - \Big\lfloor\frac{n-m}{p^r}\Big\rfloor = 1 - 0 - 0 = 1, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

5.8. Hilfssatz. *Für alle ganzen Zahlen $m \geqslant 1$ gelten folgende Abschätzungen für die Binomial-Koeffizienten:*

i) $$\frac{2^{2m-2}}{m} \leqslant \binom{2m-1}{m-1} = \binom{2m-1}{m} \leqslant 2^{2m-2},$$

ii) $$\frac{2^{2m-1}}{m} \leqslant \binom{2m}{m} \leqslant 2^{2m-1}.$$

Beweis. Aus $(1+1)^{2m-1} = 2^{2m-1}$ folgt mit dem binomischen Lehrsatz

$$1 + \ldots + \binom{2m-1}{m-1} + \binom{2n-1}{m} + \ldots + 1 = 2^{2m-1}. \qquad (*)$$

Daraus folgt einerseits

$$\binom{2m}{m} = \binom{2m-1}{m-1} + \binom{2m-1}{m} \leqslant 2^{2m-1}$$

und andrerseits, da $\binom{2m-1}{m-1} = \binom{2m-1}{m}$ die größten der $2m$ Summanden der linken Seite von $(*)$ sind,

$$\binom{2m-1}{m-1} = \binom{2m-1}{m} \geqslant \frac{2^{2m-1}}{2m} = \frac{2^{2m-2}}{m}$$

und

$$\binom{2m}{m} = 2\binom{2m-1}{m} \geqslant \frac{2^{2m-1}}{m}.$$

5.9. Satz. *Das kleinste gemeinsame Vielfache $V(n) = \mathrm{lcm}(1, 2, \ldots, n)$ der natürlichen Zahlen von 1 bis n genügt folgenden Abschätzungen:*

a) *Für alle $n \geqslant 1$ gilt*

$$V(n) \leqslant 4^n.$$

b) *Für alle $n \geqslant 7$ gilt*

$$V(n) \geqslant 2^{n+1}.$$

Bemerkung. Wegen $V(x) := V(\lfloor x \rfloor)$ gilt dann auch

a)′ $\quad V(x) \leqslant 4^x \quad$ für alle reellen $x \geqslant 1$ und

a)′ $\quad V(x) \geqslant 2^x \quad$ für alle reellen $x \geqslant 7$.

Beweis. a) Wir beweisen $V(n) \leqslant 4^n$ durch vollständige Induktion über n.

Induktions-Anfang. Für $n = 1$ und $n = 2$ ist die Aussage trivialerweise richtig.

Induktions-Schritt. Sei $n \geqslant 3$. Wir setzen voraus, dass die Aussage $V(k) \leqslant 4^k$ für alle $k < n$ richtig ist.

Sei zunächst $n = 2m - 1$ ungerade. Nach Lemma 5.7 b) gilt

$$\begin{aligned} V(2m-1) &\leqslant \binom{2m-1}{m} V(m) \\ &\underset{\text{IV}}{\leqslant} \binom{2m-1}{m} 4^m \leqslant 2^{2m-2} 4^m = 4^{2m-1}. \end{aligned}$$

Sei nun $n = 2m$ gerade. Dann erhalten wir mit Lemma 5.7 b)

$$V(2m) \leqslant \binom{2m}{m} V(m) \leqslant 2^{2m-1} 4^m < 4^{2m}.$$

b) Nach Lemma 5.7 a) gilt

$$\begin{aligned} m\binom{2m-1}{m} &\leqslant V(2m-1), \\ (m-1)\binom{2m-1}{m-1} &\leqslant V(2m-1). \end{aligned}$$

Da $\gcd(m, m-1) = 1$ und $\binom{2m-1}{m} = \binom{2m-1}{m-1}$ folgt

$$m(m-1)\binom{2m-1}{m} \leqslant V(2m-1).$$

Nach Hilfssatz 5.8 i) ist $\binom{2m-1}{m} \geqslant \dfrac{2^{2m-2}}{m}$, also

$$V(2m-1) \geqslant (m-1) 2^{2m-2} = \frac{m-1}{4} \cdot 2^{2m}.$$

Für *ungerades* $n = 2m-1$ folgt daher die zu beweisende Ungleichung $V(n) \geqslant 2^{n+1}$ falls $m \geqslant 5$, d.h. für $n \geqslant 9$. Die Ungleichung gilt aber auch für $n = 7$, da $V(7) = 840 > 2^8 = 256$.

Für *gerades* $n = 2m$ hat man

$$V(2m) \geqslant V(2m-1) \geqslant \frac{m-1}{8} \cdot 2^{2m+1},$$

die Behauptung ist daher für $m \geqslant 9$, d.h. für $n \geqslant 18$, bewiesen. Für $V(2m)$ mit $4 \leqslant m \leqslant 8$ prüft man die Ungleichung $V(2m) \geqslant 2^{2m+1}$ direkt nach.

Bemerkung. Für die folgenden Sätze ist es nützlich, Abschätzungen für den numerischen Wert von $\log 2$ zu kennen: Es ist

$$\tfrac{2}{3} < 0.693 < \log 2 < 0.694 < 0.7.$$

5.10. Satz. *Für die Tschebyscheffschen Funktionen ϑ und ψ gelten die folgenden Ungleichungen:*

a) $\vartheta(x) \leqslant \psi(x) \leqslant x \log 4$ *für alle $x \geqslant 1$,*

b) $\psi(x) \geqslant x \log 2$ *für alle $x \geqslant 7$,*

c) $\vartheta(x) \geqslant \dfrac{x}{2}$ *für alle $x \geqslant 11$,*

Beweis. Die Abschätzungen a) und b) ergeben sich durch Logarithmieren unmittelbar aus Satz 5.9.

Zu c). Nach Satz 5.3 c) ist $\vartheta(x) \geqslant \psi(x) - 2\psi(\sqrt{x})$. Mit a) und b) erhält man daraus für $x \geqslant 7$

$$\begin{aligned}\vartheta(x) &\geqslant x \log 2 - 2\sqrt{x} \log 4 = x\Big(\log 2 - \frac{4 \log 2}{\sqrt{x}}\Big)\\ &\geqslant x\Big(0.69 - \frac{2.8}{\sqrt{x}}\Big)\\ &\geqslant x \cdot \frac{1}{2} \qquad \text{für } x \geqslant 15^2 = 225, \text{ da } \frac{2.8}{15} < 0.19.\end{aligned}$$

Für $11 \leqslant x < 225$ prüft man die Ungleichung $\vartheta(x) \geqslant x/2$ direkt nach.

5.11. Satz. *Für jede reelle Zahl $x \geqslant 1$ gilt*

$$\log(\lfloor x \rfloor !) = \sum_{n \leqslant x} \log n = \sum_{k \leqslant x} \psi\Big(\frac{x}{k}\Big).$$

Beweis. Wir berechnen die rechte Seite der zu beweisenden Formel

$$\sum_{k \leqslant x} \psi\Big(\frac{x}{k}\Big) = \sum_{k \leqslant x} \sum_{\ell \leqslant \frac{x}{k}} \Lambda(\ell)$$

Indem wir alle Glieder zusammenfassen, für die $k\ell = n$ ist bei einem gegebenen Wert $n \leqslant x$, wird daraus

$$\sum_{k \leqslant x} \psi\Big(\frac{x}{k}\Big) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{\ell | n} \Lambda(\ell) = \sum_{n \leqslant x} \log n = \log(\lfloor x \rfloor !).$$

Dabei haben die Formel $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$ für die summatorische Funktion der Mangoldt-Funktion (Satz **??**.**??**) benutzt.

Aus Satz 5.11 ergibt sich unmittelbar

5.12. Corollar. *Für die Funktion*

$$T(x) := \log\Big(\frac{\lfloor x \rfloor !}{(\lfloor x/2 \rfloor !)^2}\Big) = \log(\lfloor x \rfloor !) - 2\log(\lfloor x/2 \rfloor !)$$

gilt

$$T(x) = \sum_{k \geqslant 1} (-1)^{k-1} \psi\Big(\frac{x}{k}\Big) = \psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3) - \psi(x/4) \pm \ldots$$

Insbesondere gelten die Ungleichungen

$$\psi(x) - \psi(x/2) \;\leqslant\; T(x) \;\leqslant\; \psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3).$$

5.13. Satz. *Die Funktion*

$$T(x) = \log\Big(\frac{\lfloor x \rfloor !}{(\lfloor x/2 \rfloor !)^2}\Big)$$

genügt den Abschätzungen

a) $\quad T(x) \geqslant \frac{2}{3}x \quad$ *für alle* $x \geqslant 256 \quad$ *und*

b) $\quad T(x) \leqslant \frac{3}{4}x \quad$ *für alle* $x \geqslant 64.$

Beweis. a) Abschätzung nach unten. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $\quad 2m - 1 \leqslant x < 2m \quad$ mit einer natürlichen Zahl m.

Dann ist $\lfloor x \rfloor = 2m-1$ und $\lfloor x/2 \rfloor = m-1$, also mit Hilfssatz 5.8

$$\frac{\lfloor x \rfloor!}{\lfloor x/2 \rfloor!^2} = \frac{(2m-1)!}{(m-1)!^2} = m\binom{2m-1}{m} \geqslant 2^{2m-2} \geqslant \frac{2^x}{4}.$$

(ii) $\quad 2m \leqslant x < 2m+1 \quad$ mit einer natürlichen Zahl m.

Dann ist $\lfloor x \rfloor = 2m$ und $\lfloor x/2 \rfloor = m$, also

$$\frac{\lfloor x \rfloor!}{\lfloor x/2 \rfloor!^2} = \frac{(2m)!}{m!^2} = \binom{2m}{m} \geqslant \frac{2^{2m-1}}{m} = \frac{2^{2m+1}}{4m} \geqslant \frac{2^x}{2x}.$$

Dieselbe Abschätzung gilt auch im Fall (i), falls $x \geqslant 2$. Also hat man für $x \geqslant 2$ in jedem Fall die Abschätzung

$$T(x) \geqslant x \log 2 - \log(2x) = x\Big(\log 2 - \frac{\log(2x)}{x}\Big).$$

Für $x \geqslant 2^8 = 256$ gilt $\dfrac{x}{\log(2x)} > 40$, also

$$T(x) \geqslant \Big(\log 2 - \frac{1}{40}\Big) \geqslant \frac{2}{3} \cdot x, \qquad \text{q.e.d.}$$

b) Abschätzung nach oben (dieser Teil wird im folgenden nicht gebraucht, kann also übersprungen werden). Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

(i) $\quad 2m-1 \leqslant x < 2m \quad$ mit einer natürlichen Zahl m.

Dann ist $\lfloor x \rfloor = 2m-1$ und $\lfloor x/2 \rfloor = m-1$. Wie in a), Teil (i) folgt

$$\frac{\lfloor x \rfloor!}{\lfloor x/2 \rfloor!^2} = \frac{(2m-1)!}{(m-1)!^2} = (2m-1)\binom{2m-2}{m}.$$

Dies lässt sich wie folgt nach oben abschätzen:

$$(2m-1)\binom{2m-1}{m} \leqslant x \cdot 2^{2m-2} \leqslant \frac{x}{2} \cdot 2^x,$$

also

$$\begin{aligned} T(x) &\leqslant x \log 2 + \log(x/2) = x\Big(\log 2 + \frac{\log(x/2)}{x}\Big) \\ &\leqslant x\left(\log 2 + \log(2^5)/2^6\right) \leqslant \tfrac{3}{4} \cdot x \qquad \text{für } x \geqslant 2^6 = 64, \end{aligned}$$

da $\log 2 + (5\log 2)/64 < 0.694 + 0.055 < 0.75$.

(ii) $\quad 2m \leqslant x < 2m+1 \quad$ mit einer natürlichen Zahl m.

Dann ist $\lfloor x \rfloor = 2m$ und $\lfloor x/2 \rfloor = m$, also

$$\frac{\lfloor x \rfloor!}{\lfloor x/2 \rfloor!^2} = \frac{(2m)!}{m!^2} = \binom{2m}{m} \leqslant 2^{2m-1} < 2^x,$$

woraus folgt $T(x) < \log(2^x) = x \log 2 < \frac{3}{4} \cdot x$, q.e.d.

5.14. Satz (Bertrandsches Postulat). *Zu jeder ganzen Zahl $n \geqslant 1$ gibt es mindestens eine Primzahl p mit*

$$n < p \leqslant 2n.$$

Beweis. Nach Corollar 5.12 und Satz 5.13 hat man für $x \geqslant 256$

$$\psi(x) - \psi(x/2) + \psi(x/3) \geqslant T(x) \geqslant \frac{2}{3}x.$$

Da $\psi(x/3) \leqslant (x/3)\log 4$, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\psi(x) - \psi(x/2) &\geqslant \frac{2}{3}x - \psi(x/3) \\
&\geqslant \frac{2x}{3} - \frac{x}{3}\log 4 \\
&= \frac{2x}{3}(1 - \log 2) \geqslant \frac{2x}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{x}{5}.
\end{aligned}$$

Da nach Satz 5.3c) gilt $\vartheta(x) \geqslant \psi(x) - 2\psi(\sqrt{x})$, folgt daraus

$$\begin{aligned}
\vartheta(x) - \vartheta(x/2) &\geqslant \psi(x) - 2\psi(\sqrt{x}) - \psi(x/2) \\
&\geqslant \frac{x}{5} - 2\sqrt{x}\log 4 \\
&= \frac{x}{5}\left(1 - \frac{20\log 2}{\sqrt{x}}\right) > 0 \quad \text{für } x \geqslant 256,
\end{aligned}$$

denn falls $x \geqslant 256$, ist $\sqrt{x} \geqslant 16 > 20\log 2$.

Es ist also

$$\vartheta(2x) - \vartheta(x) = \sum_{x<p\leqslant 2x} \log p \; > \; 0 \quad \text{für } x \geqslant 128.$$

Daher gibt es für $x \geqslant 128$ mindestens eine Primzahl p mit $x < p \leqslant 2x$. Die Folge der Primzahlen $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 151$, von denen jede kleiner als das Doppelte ihres Vorgängers ist, zeigt, dass dies sogar für alle $x \geqslant 1$ richtig ist.

5.15. Satz. *Für alle* $x \geqslant 3$ *gilt*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\log x} < \pi(x) < 4 \cdot \frac{x}{\log x}.$$

Beweis
a) Abschätzung nach unten. Für $3 \leqslant x \leqslant 11$ prüft man die Ungleichung $\pi(x) > \frac{x}{2\log(x)}$ direkt nach. Für $n > 11$ verwenden wir die Ungleichung $\vartheta(x) > x/2$ aus Satz 5.10. Damit ist

$$\frac{x}{2} < \sum_{p \leqslant x} \log x \leqslant \pi(x) \log x,$$

woraus die Behauptung folgt.

b) Abschätzung nach oben. Für $1 < x \leqslant 64$ prüft man die Ungleichung $\pi(x) < \frac{4x}{\log x}$ direkt nach.
Sei nun $x_0 \geqslant 64$. Wir zeigen:
Gilt die Ungleichung für alle $x' \leqslant x_0$, so gilt sie auch für alle x mit $x_0 < x \leqslant x_0^2$. Dann folgt offenbar die Ungleichung für alle $x \in \,]1, \infty[$.
Sei also $x_0 < x \leqslant x_0^2$. Wir benutzen die Abschätzung $\vartheta(x) < x \log 4$ aus Satz 5.10.

$$x \log 4 > \vartheta(x) \geqslant \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant x} \log p \geqslant \big(\pi(x) - \pi(\sqrt{x})\big) \log(\sqrt{x}).$$

Daraus folgt wegen $\log(\sqrt{x}) = \log(x)/2$

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) \leqslant \frac{2x \log 4}{\log x} < \frac{3x}{\log x}.$$

Da $\sqrt{x} \leqslant x_0$, gilt nach Voraussetzung

$$\pi(\sqrt{x}) < \frac{4\sqrt{x}}{\log(\sqrt{x})} < \frac{x}{\log x}, \quad \text{da } \sqrt{x} < x/8 \text{ wegen } x > 64.$$

Es folgt

$$\pi(x) < \frac{3x}{\log x} + \frac{x}{\log x} = \frac{4x}{\log x}, \qquad \text{q.e.d.}$$