Komplexe Analysis mehrerer Veränderlichen

Vorlesung von Otto Forster
im Sommersemester 1973
an der Universität Regensburg

11. Anwendungen von Theorem B

§ 11. Anwendungen von Theorem B

Hilfssatz. $\mathcal{O}_x$ sei der Ring der holomorphen Funktionskeime in einem Punkt x einer komplexen Mannigfaltigkeit. $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_x$ sei das maximale Ideal aller Funktionskeime, die in x verschwinden. M sei ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_x$-Modul. Dann gilt:
Ein System $f_1,\dots,f_k$ von Elementen aus M ist genau dann ein Erzeugendensystem von M über $\mathcal{O}_x$, wenn ihre Restklassen in $M/\mathfrak{m}M$ ein Erzeugendensystem von $M/\mathfrak{m}M$ über $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}$ bilden.

Zum Beweis dient das Lemma von Nakayama:
Sei L ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_x$-Modul mit $L = \mathfrak{m}L$. Dann ist $L = 0$.

Beweis des Lemmas. Sei $g_1,\dots,g_l$ ein minimales Erzeugendensytem von L über $\mathcal{O}_x$.
Annahme: $l \geq 1$
Da $L = \mathfrak{m}L$, gibt es Elemente $m_1,\dots,m_l \in \mathfrak{m}$ mit

$$g_l = m_1 g_1 + \dots + m_l g_l \Rightarrow$$

$$(1-m_l)g_l = \sum_{i=1}^{l-1} m_i g_i .$$

$(1-m_l)$ ist invertierbar in $\mathcal{O}_x$, da $(1-m_l) \notin \mathfrak{m}$. Also

$$g_l = \sum_{i=1}^{l-1} \frac{m_i}{1-m_l} g_i .$$

Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität des Erzeugendensystems.

Korollar. Sei M ein endlich erzeugter Modul über $\mathcal{O}_x$ und N ein Untermodul von M mit

$$N + \mathfrak{m}M = M$$

Dann gilt $N = M$.

Beweis des Korollars. $L := M/N \Rightarrow \mathfrak{m}L = (\mathfrak{m}M+N)/N = M/N = L$
Also: $L = 0 \Rightarrow N = M$.

Beweis des Hilfssatzes. Die Restklassen von $f_1,\dots,f_k$ mögen $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen.

$$N := \sum_{i=1}^{k} \mathcal{O}_x f_i \subset M$$

Nach Voraussetzung: $N + \mathfrak{m}M = M$. Daraus folgt nach dem Korollar $N = M$, d.h. $f_1,\dots,f_k$ erzeugen M.

Satz 1 (Theorem A von Cartan-Serre). [6]
Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Modulgarbe auf einer Steinschen Mannigfaltigkeit X und $x \in X$. Dann erzeugen die Elemente von $\mathcal{F}(X)$ den Halm $\mathcal{F}_x$ über $\mathcal{O}_x$.

Beweis. Sei $\mathfrak{m}(x) \subset \mathcal{O}$ die Idealgarbe des Punktes x.
(Es gilt: $\mathfrak{m}(x)_y = \mathcal{O}_y$ falls $y \neq x$ und $\mathfrak{m}(x)_x = \mathfrak{m}_x$, wobei $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ das maximale Ideal ist).
$\mathfrak{m}(x)\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$ ist eine kohärente Untermodulgarbe, da endlich erzeugt.

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}(x)\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathfrak{m}(x)\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

ist eine exakte Garbensequenz.

$$(\mathcal{F}/\mathfrak{m}(x)\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x/\mathfrak{m}(x)_x\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{F}_x$$

$(\mathcal{F}/\mathfrak{m}(x)\mathcal{F})_y = 0$ für $x \neq y$
Daraus folgt: $H^0(X,\mathcal{F}/\mathfrak{m}(x)\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{F}_x$. Nach Theorem B ist $H^1(X,\mathfrak{m}(x)\mathcal{F}) = 0$
Also ist

$$H^0(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\beta} H^0(X,\mathcal{F}/\mathfrak{m}(x)\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

exakt, das heißt

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{F}_x$$

ist surjektiv.

Sei $m_1,\dots,m_k$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{m}_x\mathfrak{M}_x$ über $\mathbb{C}$ und seien $f_1,\dots,f_k$ Elemente von $\mathfrak{M}(X)$ mit $\beta(f_i) = m_i$ für $i = 1,\dots,k$. Nach dem Hilfssatz folgt:
Die Keime von $f_1,\dots,f_k$ in x erzeugen $\mathfrak{M}_x$ über $\mathcal{O}_x$.

<u>Satz 2.</u> Sei X eine Steinsche Mannigfaltigkeit und Y eine analytische Untermannigfaltigkeit. Sei

$$I(Y) := \{f \in \mathcal{O}(X) : f|Y = 0\}$$

Dann gilt:

$$Y = V(I(Y)) := \{x \in X : f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I(Y)\}$$

<u>Beweis.</u> Trivialerweise gilt $V(I(Y)) \supset Y$.
Zu zeigen: Sei $x \notin Y$. Dann existiert eine Funktion $f \in \mathcal{O}(X)$ mit

$$f(x) \neq 0 \text{ und } f|Y = 0.$$

(Bemerkung: Diese Aussage ist i.A. falsch, wenn X nicht Steinsch ist).

Beweis hierfür: Sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ die Idealgarbe von Y.
$I(Y) = \mathcal{J}(X) \simeq H^0(X,\mathcal{J})$.
Sei $x \in X \setminus Y \Rightarrow \mathcal{J}_x = \mathcal{O}_x$. Nach Theorem A existiert ein $f \in \mathcal{J}(X)$ mit $f(x) \neq 0$.

<u>Satz 3.</u> Sei X eine Steinsche Mannigfaltigkeit und Y eine analytische Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es zu jeder holomorphen Funktion $f: Y \longrightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion $F: X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $F|Y = f$.

<u>Beweis.</u> Sei $\mathcal{J}$ die Idealgarbe von Y. Dann ist

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

exakt und es gilt:

$$\mathcal{O}_{Y,x} = 0 \text{ für } x \in X \setminus Y, \text{ da}$$

$\mathcal{O}_Y(U) \simeq$ Menge der holomorphen Funktionen $f: Y \cap U \longrightarrow \mathbb{C}$ für U offen in X. Da nach Theorem B $H^1(X,\mathcal{J}) = 0$, folgt:

$$H^0(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{O}_Y) \longrightarrow 0$$

ist exakt; also ist die Beschränkungsabbildung

$$\mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(Y)$$

surjektiv.

<u>Satz 4.</u> Sei X eine Steinsche Mannigfaltigkeit und seien $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{O}(X)$ ohne gemeinsame Nullstellen. Dann existieren Funktionen $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathcal{O}(X)$ mit

$$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k = 1.$$

<u>Beweis.</u> Sei $\varphi: \mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{O}$

$$e_i \longmapsto f_i$$

für $i = 1,\dots,k$. Da $f_1,\dots,f_k$ keine gemeinsamen Nullstellen haben, ist für jedes $x \in X$ die Abbildung

$$\varphi_x: \mathcal{O}_x^k \longrightarrow \mathcal{O}_x$$

surjektiv. Sei $\mathcal{R} := \operatorname{Ker}(\mathcal{O}^k \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O})$. $\mathcal{R}$ ist kohärent und

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

exakt. Also ist

$$H^0(X,\mathcal{O}^k) \longrightarrow H^0(X,\mathcal{O}) \longrightarrow 0$$

exakt, d.h.

$$\mathcal{O}(X)^k \longrightarrow \mathcal{O}(X)$$

$$e_i \longmapsto f_i$$

ist surjektiv. Daraus folgt die Behauptung. q.e.d.

Bemerkung. Für $K[T_1,\dots,T_n]$ statt $\mathcal{O}(X)$ (K algebraisch abgeschlossener Körper) ist dies der Hilbertsche Nullstellensatz.

Gegenbeispiel für nicht Steinsches X

Sei $0 \leq r < R \leq \infty$ und $n \geq 2$.

$$X := \{z \in \mathbb{C}^n : r < |z| < R\}$$

Vorgegeben seien die Koordinatenfunktionen $z_1,\dots,z_n$ im $\mathbb{C}^n$, die in X ohne gemeinsame Nullstelle sind.

Annahme. Es gäbe $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathcal{O}(X)$ mit

$$\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n = 1.$$

Nach dem Satz von Hartogs (Satz 4 in § 5) existieren $A_\nu \in \mathcal{O}(\tilde{X})$, wobei $\tilde{X} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\}$ mit

$$A_\nu | X = \alpha_\nu .$$

Mit der Eindeutigkeit analytischer Fortsetzung gilt hiermit auf $\tilde{X}$:

$$A_1 z_1 + \dots + A_n z_n = 1$$

Dies kann aber im Nullpunkt nicht gelten.

Bemerkung. Es gilt sogar:
Eine offene Menge X im $\mathbb{C}^n$ ist genau dann Steinsch, wenn in X die Aussage von Satz 4 gilt.

Satz 5. Auf einer Steinschen Mannigfaltigkeit X ist jedes Cousin-I-Problem lösbar.

Beweis. $H^1(X,\mathcal{O}) = 0$.

Satz 6. Auf einer Steinschen Mannigfaltigkeit X gilt

$$H^1(X,\mathcal{O}^*) \cong H^2(X,\mathbb{Z})$$

Corollar. Gilt für eine Steinsche Mannigfaltigkeit X, daß $H^2(X,\mathbb{Z}) = 0$ so ist auf X jedes Cousin-II-Problem lösbar.

Bemerkung. a) Für jede offene (d.h. nicht kompakte) Riemannsche Fläche gilt $H^2(X,\mathbb{Z}) = 0$, also insbesondere für Gebiete in $\mathbb{C}$.
b) Sei $Y := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ und $X := Y \times Y \subset \mathbb{C}^2$.
Dann gilt $H^2(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ und in X ist nicht jedes Cousin-II-Problem lösbar.
Zu dem in b) angesprochenen Problem vergleiche Gronwall [11].

Beweis von Satz 6.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$$

$$f \longmapsto e^{2\pi i f}$$

ist exakte Garbensequenz. Daraus folgt:

$$0 = H^1(X,\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{O}) = 0$$

ist exakt.

Satz 7 ("Holomorpher Satz von de Rham" von Serre).
Sei X eine Steinsche Mannigfaltigkeit. Für $q \in \mathbb{N}$ bezeichne $\Omega^q(X)$ den Vektorraum aller holomorphen Differentialformen vom Grad q.
Es sei

$$Rh^q_\omega(X) := \frac{\operatorname{Ker}\,(\Omega^q(X) \longrightarrow \Omega^{q+1}(X))}{\operatorname{Im}\,(\Omega^{q-1}(X) \longrightarrow \Omega^q(X))}$$

Dann gilt für alle $q \in \mathbb{N}$:

$$Rh_{\omega}^{q}(X) \cong H^{q}(X,\mathbb{C}).$$

Beweis. Seien Ω^q die Garben der holomorphen Differentialformen vom Grad q auf X. Dann ist die Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Omega^n \longrightarrow 0$$

exakt (wobei n die komplexe Dimension der Mannigfaltigkeit X bezeichne) nach dem Poincaréschen Lemma.
Diese Garbensequenz ist eine azyklische Auflösung von $\mathbb{C}$, d.h. $H^k(X,\Omega^q) = 0$ für alle $k \geq 1$, $q \in \mathbb{N}$, nach Theorem B, da Ω^q als lokalfreie $\mathcal{O}$-Modulgarbe kohärent ist. Ω^q ist lokal-frei, denn für einen Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ ist und in U gilt dann

$$\Omega^q(U) = \{\sum_{i_1<\ldots<i_q} a_{i_1\ldots i_q} z_{i_1}\wedge\ldots\wedge z_{i_q} : a_{i_1\ldots i_q} \in \mathcal{O}(U)\} \cong \mathcal{O}(U)^m$$

wobei $m = \binom{n}{q}$.
Mit dem abstrakten Satz von de Rham folgt die Behauptung.

Korollar. Sei X eine n-dimensionale Steinsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$H^q(X,\mathbb{C}) = 0 \text{ für } q > n$$

Bemerkung. Es läßt sogar beweisen, daß für eine beliebige Abelsche Gruppe G

$$H^q(X,G) = 0 \text{ für alle } q > n.$$

Dies folgt aus einer Arbeit von Andreotti-Narasimhan [1].

Additiv automorphe Funktionen

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $\pi: \tilde{X} \longrightarrow X$ die universelle Überlagerung. Dann gilt bekanntlich (vgl. Schubert [27])

$$\pi_1(X) \cong \mathrm{Deck}\,(\tilde{X}/X),$$

wobei Deck $(\tilde{X}/X)$ = Gruppe aller Homöomorphismen $f: \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ mit $\pi = \pi\circ f$,
und Deck $(\tilde{X}/X)$ wirkt transitiv auf jeder Faser, d.h. sind $x,x' \in \tilde{X}$ mit $\pi(x) = \pi(x')$, so gibt es (genau) ein $\sigma \in$ Deck $(\tilde{X}/X) =: G$ mit $\sigma(x) = x'$.
$\tilde{X}$ ist in naheliegender Weise eine komplexe Mannigfaltigkeit und die Abbildungen $\sigma \in G$ sind biholomorph.
G wirkt auf $\mathcal{O}(\tilde{X})$ wie folgt:
Sei $f \in \mathcal{O}(\tilde{X})$, $\sigma \in G$.

$$(\sigma f)(x) := f(\sigma^{-1}(x)).$$

Es gilt dann $\sigma f \in \mathcal{O}(\tilde{X})$ und

$$(\tau\sigma)f \text{ und } \tau(\sigma f) \text{ für } \sigma,\tau \in G$$

und die durch $f \longmapsto \sigma f$ gegebene Abbildung ist ein Automorphismus von $\mathcal{O}(\tilde{X})$.
Die surjektive holomorphe Abbildung $\pi: \tilde{X} \longrightarrow X$ induziert einen Monomorphismus

$$\pi^*: \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(\tilde{X})$$

$\mathcal{O}(X)$ werde mit $\pi^*(\mathcal{O}(X)) \subset \mathcal{O}(\tilde{X})$ identifiziert. Dann sind die Funktionen aus $\mathcal{O}(X)$ genau diejenigen aus $\mathcal{O}(\tilde{X})$, die bei allen Decktransformationen invariant sind.

Definition. Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\tilde{X})$ heißt automorph mit Automorphiesummanden $a_\sigma \in \mathcal{O}(X)$, $\sigma \in G$, falls für alle σ gilt:

$$\sigma f - f = a_\sigma$$

Bemerkung. Die Zuordnung $\sigma \longmapsto a_\sigma$ ist ein Gruppenhomomorphismus

$$a: \pi_1(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$$

Satz 8 (Stein). Sei X eine Steinsche Mannigfaltigkeit und

$$a: \pi_1(X) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$$

$$\sigma \longmapsto a_\sigma$$

ein Homomorphismus. Dann gibt es eine holomorphe Funktion f auf der universellen Überlagerung von X mit den Automorphiesummanden a_σ, $\sigma \in \pi_1(X)$.

Beweis. Sei $G = \mathrm{Deck}\,(\tilde{X}/X) \cong \pi_1(X)$ mit der diskreten Topologie versehen. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U und einen spurtreuen Homöomorphismus

$$\varphi: \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

mit folgender Eigenschaft:

Sei $\varphi(x) = (\xi,\sigma) = (\pi(x),\eta(x))$ und $\tau \in G$. Dann gilt $\varphi(\tau x) = (\xi,\tau\sigma) = (\pi(x),\tau(\eta(x)))$.

Für die durch die Gleichung $\varphi(x) = (\pi(x), \eta(x))$ definierte Abbildung $\eta: \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ gilt also

$$\tau\eta(x) = \eta(\tau x).$$

Es gibt eine offene Steinsche Überdeckung $(U_i)_{i\in I} =: \mathfrak{U}$ von X und Homöomorphismen

$$\varphi_i: \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times G \quad , \varphi_i(x) = (\pi(x),\eta_i(x))$$

mit den obigen Eigenschaften.

Die Funktion $f_i \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U_i))$ sei wie folgt definiert

$$f_i(x) := -a_{\eta_i(x)}(x)$$

Behauptung. Es gilt $\sigma f_i - f_i = a_\sigma$

Beweis. $(\sigma f_i)(x) = f_i(\sigma^{-1}(x)) = -a_{\eta_i(\sigma^{-1}(x))}(x)$, da σ Decktransformation und $a_{\eta_i(\sigma^{-1}(x))} \in \mathcal{O}(X)$.

$$(\sigma f_i - f_i)(x) = -a_{\sigma^{-1}\eta_i(x)}(x) + a_{\eta_i(x)}(x) =$$

$$= a_\sigma(x) - a_{\eta_i(x)}(x) + a_{\eta_i(x)}(x) =$$

$$= a_\sigma(x) \Rightarrow$$

$\sigma f_i - f_i = a_\sigma$.

Setze dann in $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$

$$g_{ij} := f_i - f_j$$

g_{ij} ist dann holomorph in $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$. Ferner ist $g_{ij} \in \mathcal{O}(X)$, denn

$$\sigma g_{ij} = \sigma f_i - \sigma f_j = f_i + a_\sigma - (f_j + a_\sigma) = f_i - f_j = g_{ij}$$

$(g_{ij})_{(i,j)\in I\times I}$ erfüllt die Cozyklenrelation bezüglich $\mathfrak{U}$:

Seien $i,j,k \in I$. Dann gilt über $U_i \cap U_j \cap U_k$

$$g_{ij} + g_{jk} = f_i - f_j + f_j - f_k = f_i - f_k = g_{ik}.$$

Da nach Theorem B gilt $H^1(\mathfrak{U},\mathcal{O}) = 0$, existieren Funktionen $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$ mit

$$g_{ij} = g_i - g_j$$

in $U_i \cap U_j$. Daraus folgt: Über $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ gilt

$$f_i - g_i = f_j - g_j$$

Also existiert eine globale definierte Funktion $f \in \mathcal{O}(\tilde{X})$ mit

$$f|\pi^{-1}(U_i) = f_i - g_i$$

und f ist Lösung des Problems, d.h. $\sigma f - f = a_\sigma$.

<u>Beweis hiervon.</u> Es genügt, die Gleichheit lokal zu zeigen. Über $\pi^{-1}(U_i)$ gilt

$$\sigma(f_i - g_i) - (f_i - g_i) = f_i + a_\sigma - g_i - f_i + g_i = a_\sigma.$$

Damit ist Satz 8 bewiesen.

Literatur

[1] A. ANDREOTTI and R. NARASIMHAN: A topological property of Runge pairs, Ann. of Math. 76, 499 - 509, (1962).

[2] S. BOCHNER und W.T. MARTIN: Several complex variables. Princeton University Press (1948).

[3] H. CARTAN: Sur les matrices holomorphes de n variables complexes. J. Math. 9e série, 19, 1 - 26 (1940).

[4] H. CARTAN: Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes. Ann. École Norm. Sup. 61, 149 - 197 (1944).

[5] H. CARTAN: Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes. Bull. Soc. Math. France 78, 28 - 64 (1950).

[6] H. CARTAN: Séminaire E.N.S. (1951/52), Exposé 19: Faisceaux analytiques sur les variétés de Stein: Démonstration de théorèmes fondamentaux. In Séminaire Cartan, Vol 2 (1951-54), Benjamin (1967).

[7] P. COUSIN: Sur les fonctions de n variables complexes. Acta Math. 19, 1 - 62 (1895).

[8] P. DOLBEAULT: Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe, I. Ann. of Math. 64, 83 - 130 (1956).

[9] H. GRAUERT: Charakterisierung der holomorph-vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. 129, 233 - 259 (1955).

[10] H. GRAUERT und R. REMMERT: Analytische Stellenalgebren. Springer (1971).

[11] T.H. GRONWALL: On the expressibility of a uniform function of several complex variables as the quotient of two functions of entire character. Amer. Math. Soc. Trans. 18,50 - 64 (1917).

[12] A. GROTHENDIECK et J.A. DIEUDONNÉ: Eléments de Géométrie Algébrique I. Springer (1971).

[13] R. GUNNING and H. ROSSI: Analytic Functions of several complex variables. Prentice-Hall (1965).

[14] F. HARTOGS: Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Math. Ann. 62, 1 - 88 (1906).

[15] D. HILBERT: Über die Theorie der algebraischen Formen. Math. Ann. 36, 473 - 534 (1890). Siehe auch: Gesammelte Abhandlungen, Band 2, 199 - 257. Julius Springer (1933).

[16] G. KÖTHE: Topological Vector Spaces I. Springer (1970).

[17] R. KULTZE: Garbentheorie. Teubner (1970).

[18] W. MAAK: Fastperiodische Funktionen. Springer (1950).

[19] R. NARASIMHAN: Several Complex Variables. The University of Chicago Press (1971).

[20] D.G. NORTHCOTT: Homological Algebra. Cambridge Univ. Press (1966).

[21] K. OKA: Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles. J. Sa. Hiroshima Univ. 6, 245 - 255 (1936).

[22] K. OKA: Domaines d'holomorphie. J. Sa. Hiroshima Univ. 7, 115 - 130 (1937).

[23] K. OKA: Sur les quelques notions arithmétiques. Bull. Soc. Math. France 78, 1 - 27 (1950).

Die drei Artikel [21], [22], [23] finden sich auch in dem Sammelband K. OKA: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. Iwanami Shoten, Tokio (1961).

[24] H. POINCARÉ: Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 23, 185 - 220 (1907). In Oeuvres de Henri Poincaré, Tome IV, 244 - 289. Gauthier-Villars, Paris (1950).

[25] K. REINHARDT: Über Abbildungen durch analytische Funktionen zweier Veränderlicher. Math. Ann. 83, 211 - 255 (1921).

[26] W. RÜCKERT: Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale. Math. Ann. 107, 259 - 281 (1933).

[27] H. SCHUBERT: Topologie. Teubner (1964).

[28] J.P. SERRE: Faisceaux algébrique cohérents. Ann. of Math. 61, 197 - 278 (1955).

[29] K. STEIN: Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite Cousinsche Problem. Math. Ann. 123, 201 - 222 (1951).

[30] A. WEIL: L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. Math. Ann. 111, 178 - 182 (1935).