Komplexe Analysis mehrerer Veränderlichen

Vorlesung von Otto Forster
im Sommersemester 1973
an der Universität Regensburg

10. Beweis von Theorem B für Steinsche Mannigfaltigkeiten

§ 10. Beweis von Theorem B für Steinsche Mannigfaltigkeiten

Definition. Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}(X)$. Dann heißt X $\mathfrak{F}$-konvex, wenn folgendes gilt:
Für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ ist die Menge

$$\hat{K}_{\mathfrak{F}} := \{x \in X: |f(x)| \le \sup |f(K)| \text{ für alle } f \in \mathfrak{F}\}$$

kompakt.

Definition. Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine offene Teilmenge. Y heißt relativ-holomorph-konvex bezüglich X (oder Rungesch in X), wenn Y $(\mathcal{O}(X)|Y)$-konvex ist, (d.h. für jede kompakte Menge $K \subset Y$ ist die Menge

$$\hat{K}_{X,Y} := \{y \in Y: |f(y)| \le \sup |f(K)| \text{ für alle } f \in \mathcal{O}(X)\}$$

kompakt.)

Satz 1 (Rungescher Approximationssatz von Oka-Weil).
Sei X eine Steinsche Mannigfaltigkeit und Y eine offene relativ holomorph-konvexe Teilmenge von X. Dann kann jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(Y)$ auf jedem kompakten Teil $K \subset Y$ gleichmäßig durch Funktionen aus $\mathcal{O}(X)$ approximiert werden.

Beweis. o.B.d.A. $K = \hat{K}_{X,Y}$, da Y relativ holomorph-konvex bezüglich X. Es gibt ein analytisches Polyeder P, das durch Funktionen aus $\mathcal{O}(X)$ beschrieben wird mit

$$K \subset P \subset \overline{P} \subset Y.$$

(Dies beweist man wie Satz 1, § 6). Nach Satz 3 in § 6 existieren holomorphe Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{O}(X)$ und eine analytische Untermannigfaltigkeit A des Einheitspolyzylinders $E \subset \mathbb{C}^n$, so daß

$$\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n): P \longrightarrow A$$

eine biholomorphe Abbildung ist. Es existiert eine holomorphe Funktion g auf A mit

$$f|P = g \circ \varphi$$

Hilfssatz. (Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 1).
Sei $E' \subset\subset E$ ein konzentrischer offener Polyzylinder. Dann existiert eine holomorphe Funktion $G \in \mathcal{O}(E')$ mit

$$G|A \cap E' = g|A \cap E'.$$

Beweis des Hilfssatzes.
Sei $\mathcal{J}$ die Idealgarbe von A auf E (d.h. für U offen in E ist

$$\mathcal{J}(U) = \{f \in \mathcal{O}(U): f|A \cap U = 0\}.$$

$\mathcal{J}$ ist kohärent nach § 9. Mit Satz 9 in § 9 folgt:

$$H^1(E', \mathcal{J}) = 0.$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{O}_A \longrightarrow 0$$

ist eine exakte Garbensequenz. Dabei ist $\mathcal{O}_E$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf E. $\mathcal{O}_A$ sei die wie folgt definierte Garbe auf E: Für U offen in E ist

$$\mathcal{O}_A(U) := \text{Menge der holomorphen Funktionen auf } A \cap U.$$

$$\mathcal{O}_E \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_A$$

ist die Beschränkungsabbildung. β ist halmweise surjektiv und es gilt $\operatorname{Ker} \beta = \mathcal{J}$. Also ist

$$H^0(E', \mathcal{O}_{E'}) \longrightarrow H^0(E', \mathcal{O}_{A \cap E'}) \longrightarrow H^1(E', \mathcal{J})$$

exakt. Daraus folgt

$$\mathcal{O}(E') \longrightarrow \mathcal{O}(A\cap E')$$

$$f \longmapsto f|A\cap E'$$

ist surjektiv, da $H^1(E',\mathcal{I}) = 0$. Daraus folgt sofort die Behauptung des Hilfssatzes.

<u>Fortsetzung des Beweises von Satz 1</u>

Wähle E' so groß, daß $\omega(K) \subset E'$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein Abschnitt

$$F(z) = \sum_{i_1+\ldots+i_n\leq k} a_{i_1\ldots i_n} z_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{i_n}$$

der Taylorreihe von G, so daß

$$\sup_{z\in\omega(K)} |F(z) - G(z)| < \varepsilon$$

Für $x \in K$ gilt:

$$G(\varphi(x)) = g(\omega(x)) = f(x) \Rightarrow |f(x) - F(\omega(x))| < \varepsilon \text{ für alle } x \in K.$$

$$F(\omega(x)) = \sum_{i_1+\ldots+i_n\leq k} a_{i_1\ldots i_n} \omega_1^{i_1}(x)\cdot\ldots\cdot\omega_n^{i_n}(x).$$

Es gilt $F\circ\omega \in \mathcal{O}(X)$, da $\omega_\nu \in \mathcal{O}(X)$ für $\nu = 1,\ldots,n$.
Also läßt sich $f \in \mathcal{O}(Y)$ auf K gleichmäßig durch Funktionen $\mathcal{O}(X)$ approximieren. q.e.d.

Der Beweis für den Satz in der hier angegebenen Fassung stammt von K. Oka [21], [22]. Weitere Beweise finden sich in den Arbeiten von H. Cartan [4], [5].
Der Satz wurde zuerst von A. Weil [30] mit Hilfe einer Integralformel bewiesen.

<u>Bemerkung</u> (Verallgemeinerung von Satz 1).
Sei Y eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\pi \subset \mathcal{O}(Y)$ derart, daß gilt:
i) Y ist π-konvex
ii) Die Funktionen aus π trennen die Punkte von Y
iii) Zu jedem Punkt $y \in Y$ gibt es eine Umgebung von U von y und Funktionen $f_1,\ldots,f_n \in \pi$, so daß $(f_1,\ldots,f_n)$ die Menge U biholomorph auf eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ abbildet.
Dann kann jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(Y)$ durch Polynome aus Funktionen von π kompakt approximiert werden.

<u>Lemma</u> (H.Cartan).
Sei U eine offene Menge im $\mathbb{C}^n$ und $x \in U$. Weiter sei M ein Untermodul von $\mathcal{O}_x^k$. Sei $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge von k-tupeln holomorpher Funktionen in U (d.h. $f_\nu \in \mathcal{O}(U)^k$), die kompakt gegen $f \in \mathcal{O}(U)^k$ konvergiert.
Gilt $\rho_x^U(f_\nu) \in M$ für alle ν, so gilt auch $\rho_x^U(f) \in M$.

Der <u>Beweis</u> macht Gebrauch vom Krullschen Lemma.
(Für einen Beweis des Krullschen Lemmas siehe [10]).
Sei $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_x$ das maximale Ideal aller Funktionskeime, die in x verschwinden. Dann gilt:

$$M = \bigcap_{s=1}^{\infty} (M+\mathfrak{m}_x^s\mathcal{O}_x^k).$$

Um das Lemma zu beweisen, genügt es also zu zeigen

$$\rho_x^U(f) \in M + \mathfrak{m}_x^s\mathcal{O}_x^k$$

für alle $s \geq 1$. Sei

$$\pi_s : \mathcal{O}_x^k \longrightarrow \mathcal{O}_x^k/\mathfrak{m}_x^s\mathcal{O}_x^k$$

die kanonische Quotientenabbildung. Es gilt

$$\mathcal{O}_x^k/\mathfrak{m}_x^s\mathcal{O}_x^k \cong P_{s-1}^k \qquad \text{(als } \mathbb{C}\text{-Vektorräume)},$$

wobei P_{s-1} der Vektorraum aller Polynome vom Grad $\leq s-1$ in n Variablen ist.
Für $p = (p_1,\dots,p_n) \in \mathbb{N}^n$ sei $a_p(\varphi)$ der p-te Koeffizient der Taylorreihe um x der in einer Umgebung von x definierten holomorphen Funktion φ. Damit folgt

$$\pi_s(\varphi) = \sum_{|p|<s} a_p(\varphi)(z-x)^p$$

Da (f_ν) kompakt gegen f konvergiert, folgt aus der Cauchyschen Integralformel:

$$(*) \qquad a_p(f_\nu) \text{ konvergiert (in } \mathbb{C}^k\text{) gegen } a_p(f).$$

$\pi_s(M)$ ist Untervektorraum von $\mathcal{O}^k_x/m^s_x\mathcal{O}^k_x \Rightarrow \pi_s(M)$ ist abgeschlossen in dem (endlichdimensionalen) Vektorraum $\mathcal{O}^k_x/m^s_x\mathcal{O}^k_x$ (bezüglich der eindeutig bestimmten Hausdorffschen Vektorraumtopologie).
Es gilt: $\pi_s(\overline{f_\nu}) \in \pi_s(M)$, wobei $\overline{f_\nu} := \rho^U_x(f_\nu)$.

$$\pi_s(\overline{f_\nu}) \longrightarrow \pi_s(\overline{f}) \text{ wegen } (*).$$

Daraus folgt $\pi_s(\overline{f}) \in M \Rightarrow$

$$\overline{f} \in M + \mathcal{O}^k_x/m^s_x\mathcal{O}^k_x.$$

<u>Corollar.</u> Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{F} \subset \mathcal{O}^k$ eine Untermodulgarbe. $\mathcal{O}^k(X)$ trage die Topologie der kompakten Konvergenz. Dann ist $\mathfrak{F}(X)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{O}^k(X)$.

<u>Beweis.</u> Sei $f \in \mathcal{O}^k(X)$. Dann gilt

$$f \in \mathfrak{F}(X) \Leftrightarrow \rho^U_x(f) \in \mathfrak{F}_x \text{ für alle } x \in X.$$

Beweis hierfür: "$\Rightarrow$" ist trivial.

"$\Leftarrow$": Zu jedem $x \in X$ existiert offene Umgebung U_x, so daß $f|U_x \in \mathfrak{F}(U_x)$. Da $\bigcup_{x\in X} U_x = X$, gilt nach Garbenaxiom (II) für $\mathfrak{F}$ und (I) für $\mathcal{O}^k$: $f \in \mathfrak{F}(X)$.
Sei jetzt $f_\nu \in \mathfrak{F}(X)$, $\nu \in \mathbb{N}$, eine Folge, die kompakt gegen $f \in \mathcal{O}^k(X)$ konvergiert. Dann gilt $\rho^X_x(f) \in \mathfrak{F}_x$ für alle $x \in X \Rightarrow f \in \mathfrak{F}(X)$.

<u>Satz 2.</u> Sei F ein Fréchetraum und $E \subset F$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann sind auch E mit der induzierten Topologie und F/E mit der Quotiententopologie Frécheträume.

<u>Satz 3</u> (Banach). Seien E,F Frécheträume und $\varphi: E \longrightarrow F$ eine stetige surjektive lineare Abbildung. Dann ist φ offen.
Insbesondere gilt: Ist φ sogar bijektiv, so ist φ ein Homöomorphismus.

<u>Satz 4.</u> Sei $(F_i)_{i\in I}$ eine abzählbare Familie von Frécheträumen. Dann ist $\prod_{i\in I} F_i$ (mit der Produkttopologie) wieder ein Fréchetraum.

Zum Beweis dieser drei funktionalanalytischen Sätze siehe z.B. Köthe [16].

<u>Definition</u> (Fréchetgarbe).
Sei X ein topologischer Raum. Eine <u>Fréchetgarbe</u> ist eine Garbe $\mathfrak{F}$ von Vektorräumen, bei der alle $\mathfrak{F}(U)$, U offen in X, die Struktur eines Fréchetraumes tragen und die Beschränkungsabbildungen

$$\mathfrak{F}(U) \longrightarrow \mathfrak{F}(V)$$

für $V \subset U$ offen stetige lineare Abbildungen sind.

<u>Beispiele.</u> Sei X komplexe Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie.
a) $\mathcal{O}, \mathcal{O}^k$ sind Fréchetgarben. Dabei trage $\mathcal{O}(U)$ für $U \subset X$ offen die Topologie der kompakten Konvergenz

b) $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}^k$ eine Untermodulgarbe. Dann ist $\mathcal{F}$ nach dem Corollar zu dem Lemma von Cartan und Satz 2 eine Fréchetgarbe.

Kohärente analytische Garben als Fréchetgarben

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie und $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Modulgarbe über X.
Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge. U heiße von der Gestalt (*), falls es eine offene Menge $U' \subset X$ mit $U \subset\subset U'$ und eine biholomorphe Abbildung $U' \longrightarrow E'$ gibt, wobei E' ein Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$ ist, so daß $\alpha(U) =: E$ ein konzentrischer Polyzylinder ist.

Bemerkung. Die Mengen der Gestalt (*) bilden eine Basis der Topologie von X.
1) Sei U eine Menge der Gestalt (*), U" ein Polyzylinder (d.h. biholomorph zu einem Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$), so daß

$$U \subset U'' \subset U'.$$

Über U" existiert eine exakte Sequenz

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

nach Satz 8, § 9, wobei $\mathcal{R} = \operatorname{Ker}(\mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{F})$. $\mathcal{R}$ ist nach Satz 2, § 9, kohärent und nach Theorem B für Polyzylinder (Satz 9, § 9) gilt

$$H^1(U,\mathcal{R}) = 0.$$

Also ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{R}(U) \longrightarrow \mathcal{O}^k(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow 0$$

exakt. Daraus folgt

$$\mathcal{F}(U) \cong \mathcal{O}^k(U)/\mathcal{R}(U).$$

Auf $\mathcal{F}(U)$ werde die Quotiententopologie eingeführt. Dadurch wird $\mathcal{F}(U)$ zu einem Fréchetraum.
a) Diese Topologie ist unabhängig von der gewählten Auflösung (**). Die Wahl der Auflösung ist gleichbedeutend mit der Wahl eines Erzeugenden-Systems $f_1,\dots,f_k$ von $\mathcal{F}$ über U". Es genügt also zu zeigen: Ist $f_1,\dots,f_k,\ f_{k+1},\dots,f_m$ eine Erweiterung des Erzeugendensystems, so ergibt sich dieselbe Topologie.
Sei

$$\begin{gathered}\mathcal{O}^k(U) \longrightarrow \mathcal{O}^m(U)\\ e_i \longmapsto e_i\end{gathered}$$

für i = 1,...,k. Dann ist

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{R}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}^k(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0\\
0 \arrow[r] & \mathcal{R}'(U) \arrow[r] & \mathcal{O}^m(U) \arrow[r] & \mathcal{F}(U)' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm (mit exakten Zeilen), wobei

$$\mathcal{R}(U) \longrightarrow \mathcal{R}'(U)$$

die von $\mathcal{O}^k(U) \longrightarrow \mathcal{O}^m(U)$ induzierte Abbildung ist und $\mathcal{F}(U)'$ bezeichne den Raum $\mathcal{F}(U)$, versehen mit der Quotiententopologie, die von

$$\mathcal{O}^m(U)/\mathcal{R}'(U) \cong \mathcal{F}(U)$$

herrührt.

$$\mathrm{id}\colon \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)'$$

ist stetig und also nach Satz 3 ein Homöomorphismus.

b) Seien V,U Mengen in X der Gestalt (*) mit $V \subset U$. Dann ist die Beschränkungsabbildung

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

stetig.

Beweis.

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{O}^k \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow 0$$

ist exakt über U". Daraus folgt

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a}(U) & \longrightarrow & \mathfrak{O}^k(U) & \longrightarrow & \mathfrak{F}(U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \text{stetig}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \text{stetig}} & & \Big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{a}(V) & \longrightarrow & \mathfrak{O}^k(V) & \longrightarrow & \mathfrak{F}(V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ist kommutativ. Nach a) folgt hieraus die Stetigkeit der Abbildung

$$\mathfrak{F}(U) \longrightarrow \mathfrak{F}(V).$$

c)
$$\mathfrak{O}(U) \times \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \mathfrak{F}(U)$$
$$(\omega, f) \longmapsto \omega \cdot f$$

ist stetig.

2) Sei $U \subset X$ eine beliebige offene Menge. Dann läßt sich U darstellen als

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

wobei $(U_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Familie von offenen Mengen der Gestalt (*) ist. Sei

$$\lambda : \mathfrak{F}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathfrak{F}(U_i)$$
$$f \longmapsto (f|U_i)_{i \in I}$$

λ ist eine injektive lineare Abbildung. Es gilt:
$\lambda(\mathfrak{F}(U))$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $\prod_{i \in I} \mathfrak{F}(U_i)$.

Beweis. $U_i \cap U_j$ läßt sich darstellen als

$$U_i \cap U_j = \bigcup_{\nu \in \Lambda} W_{ij\nu}$$

wobei $W_{ij\nu}$ offene Mengen der Gestalt (*) sind. Sei

$$\kappa : \prod_{i \in I} \mathfrak{F}(U_i) \longrightarrow \prod_{i,j,\nu} \mathfrak{F}(W_{ij\nu})$$

$$(f_i)_{i \in I} \longmapsto ((f_i - f_j)|W_{ij\nu})_{(i,j,\nu) \in I \times I \times \Lambda}$$

Es gilt dann: $\operatorname{Ker} \kappa = \operatorname{Im} \lambda$.
κ ist stetig nach 1 b. Also ist

$$\operatorname{Im} \lambda = \operatorname{Ker} \kappa = \kappa^{-1}\{0\}$$

ein abgeschlossener Untervektorraum, q.e.d.

Man führe auf $\mathfrak{F}(U)$ die Relativtopologie von $\prod_{i \in I} \mathfrak{F}(U_i)$ ein. Dadruch wird $\mathfrak{F}(U)$ nach Satz 2 ein Fréchetraum.

Satz 5. Sei Y eine komplexe Mannigfaltigkeit, $E = \overset{\circ}{E} \subset \mathbb{C}^n$, und $\varphi: Y \longrightarrow A \subset E$ eine biholomorphe Abbildung von Y auf eine analytische Untermannigfaltigkeit A von E.
Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Modulgarbe auf Y. Die Bildgarbe $\varphi_*\mathcal{F}$ auf E ist wie folgt definiert: Für $U = \overset{\circ}{U} \subset E$ sei

$$(\varphi_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))$$

$\varphi_*\mathcal{F}$ wird eine $\mathcal{O}_E$-Modulgarbe durch folgende Multiplikation:

$$\mathcal{O}_E(U)\times\varphi_*\mathcal{F}(U) \longrightarrow \varphi_*\mathcal{F}(U)$$
$$(\alpha,f) \longmapsto \alpha\cdot f$$

wobei $\alpha\cdot f := \varphi^*(\alpha)\cdot f \in \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U))$ mit $\varphi^*(\alpha) = \alpha\circ\varphi \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(U))$.

Behauptung. $\varphi_*\mathcal{F}$ ist eine kohärente $\mathcal{O}_E$-Modulgarbe.

Beweis. 1. Fall. Sei $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$.
Ist $\mathcal{J}$ die Idealgarbe von A in E, $i: \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_E$ die Einbettungsabbildung, dann gilt

$$\varphi_*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_E/\mathcal{J} = \text{Coker}\ (\mathcal{J} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_E)$$

Also ist $\varphi_*\mathcal{O}_Y$ kohärent nach Satz 2, § 9.

2. Fall. Sei $\mathcal{F}$ beliebige kohärente Garbe.
Dann existiert lokal eine exakte Sequenz

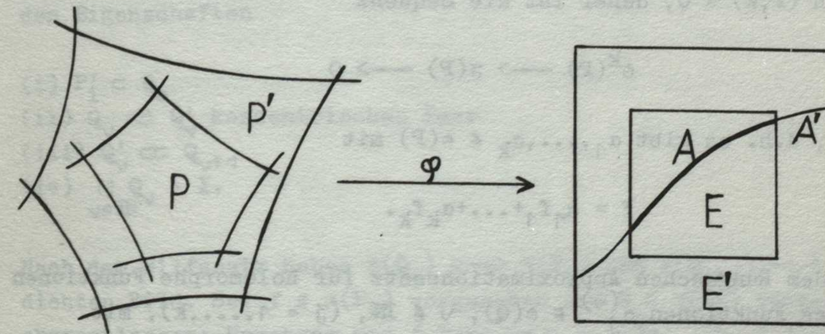
$$\mathcal{O}_Y^l \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_Y^k \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$
$$\Rightarrow \varphi_*\mathcal{O}_Y^l \xrightarrow{\varphi^*\alpha} \varphi_*\mathcal{O}_Y^k \longrightarrow \varphi_*\mathcal{F} \longrightarrow 0 \text{ ist exakt.}$$

Nach dem 1. Fall und Satz 2, § 9 ist dann $\varphi_*\mathcal{F}$ kohärent (da $\varphi_*\mathcal{F} \cong \text{Coker}\ \varphi^*\alpha$).

Corollar. Sei X eine Steinsche Mannigfaltigkeit, $P' \subset X$ ein analytischer Polyeder und $P \subset\subset P'$ ein "konzentrisches" analytisches Polyeder. Dann gilt für jede kohärente $\mathcal{O}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X

$$H^q(P,\mathcal{F}) = 0 \text{ für } q \geq 1$$

Beweis. Es gibt eine biholomorphe Abbildung $\varphi: P' \longrightarrow A'$ in eine analytische Untermannigfaltigkeit A' eines Polyzylinders $E' \subset \mathbb{C}^n$. Sei $E \subset\subset E'$ ein konzentrischer Polyzylinder, $A := A'\cap E$ und $P := \varphi^{-1}(E)$.



Es gilt: $H^q(P,\mathcal{F}) = H^q(E,\varphi_*\mathcal{F})$, denn ist $\mathfrak{U}$ irgendeine offene Überdeckung von E, so gilt

$$H^q(\varphi^{-1}(\mathfrak{U})\cap P,\mathcal{F}) = H^q(\mathfrak{U},\varphi_*\mathcal{F})$$

und da A abgeschlossen in E ist, läßt sich jede offene Überdeckung $\mathfrak{W}$ von P darstellen als

$$\mathfrak{W} = \varphi^{-1}(\mathfrak{U})\cap P,$$

wobei $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von E ist. Die Behauptung folgt mit Satz 9, § 9.

Hilfssatz. Sei X eine Steinsche Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{F}$ kohärente analytische Garbe auf X und $P \subset\subset P'$, bzw. $Q \subset\subset Q'$ Paare konzentrischer analytischer Polyeder mit $P' \subset Q$. Dann hat die Beschränkungsabbildung $\mathfrak{F}(Q) \longrightarrow \mathfrak{F}(P)$ dichtes Bild.

Beweis. Es gibt über Q eine exakte Sequenz

$$\mathcal{O}^k \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow 0,$$

$$e_i \longmapsto f_i$$

d.h. $f_1,\ldots,f_k$ erzeugen jeden Halm $\mathfrak{F}_x$ für $x \in Q$.
Sei $f \in \mathfrak{F}(P)$ vorgegeben. Für die Garbe $\mathfrak{R} = \mathrm{Ker}\ (\mathcal{O}^k \longrightarrow \mathfrak{F})$ gilt $H^1(P,\mathfrak{R}) = 0$, daher ist die Sequenz

$$\mathcal{O}^k(P) \longrightarrow \mathfrak{F}(P) \longrightarrow 0$$

exakt, d.h. es gibt $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathcal{O}(P)$ mit

$$f = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_k f_k.$$

Nach dem Rungeschen Approximationssatz für holomorphe Funktionen gibt es Funktionen $\alpha_j^{(\nu)} \in \mathcal{O}(Q)$, $\nu \in \mathbb{N}$, $(j = 1,\ldots,k)$, mit

$$a_j^{(\nu)} \longrightarrow a_j \text{ für } \nu \longrightarrow \infty$$

(bzgl. der Topologie der kompakten Konvergenz).

$$f^{(\nu)} := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(\nu)} f_j \in \mathfrak{F}(Q).$$

Es gilt $f^{(\nu)}|P \longrightarrow f$, (da die Modulmultiplikation stetig ist).

Satz 6 (Rungescher Approximationssatz für Garben).
Sei X eine Steinsche Mannigfaltigkeit und Y eine relativ-holomorph-konvexe Teilmenge von X. Für jede kohärente analytische Garbe $\mathfrak{F}$

hat die Beschränkungsabbildung

$$\mathfrak{F}(X) \longrightarrow \mathfrak{F}(Y)$$

dichtes Bild.

Beweis. Y kann durch analytische Polyeder $P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \ldots$ ausgeschöpft werden (siehe Corollar zu Satz 1, § 6). Die Polyeder P_i können sogar so gewählt werden, daß sie relativ-kompakt und konzentrisch in analytischen Polyedern $P_i' \subset\subset Y$ enthalten sind.

(1) Behauptung. $\mathfrak{F}(P_i) = \overline{\mathfrak{F}(X)|P_i}$
Sei $i \in \mathbb{N}$ fixiert. Es gibt analytische Polyeder Q_ν, Q_ν' in X mit den Eigenschaften

(i) $P_i' \subset Q_0$
(ii) $Q_\nu \subset\subset Q_\nu'$ konzentrisches Paar
(iii) $Q_\nu' \subset\subset Q_{\nu+1}$
(iv) $\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} Q_\nu = X$.

Nach dem Hilfssatz haben $\mathfrak{F}(Q_0) \longrightarrow \mathfrak{F}(P_i)$ und $\mathfrak{F}(Q_{\nu+1}) \longrightarrow \mathfrak{F}(Q_\nu)$ dichtes Bild. Sei $f \in \mathfrak{F}(P_i)$ vorgegeben und $N \subset \mathfrak{F}(P_i)$ vorgegebene abgeschlossene Umgebung von f. Dann ist $M_\nu := (\rho^{Q_\nu}_{P_i})^{-1}(N) \subset \mathfrak{F}(Q_\nu)$ ein vollständiger metrisierbarer Raum.
Die Kette

$$\ldots \longrightarrow M_3 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0$$

genügt den Voraussetzungen des Mittag-Lefflerschen Ausschöpfungsprinzips (Satz 6, § 4). Also existieren

$$F_\nu \in M_\nu \text{ mit } \rho^{Q_\nu}_{Q_{\nu-1}}(F_\nu) = F_{\nu-1}.$$

Daher gibt es ein $F \in \mathfrak{F}(X)$ mit $\rho^X_{Q_\nu}(F) = F_\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$F|P_i \in N.$$

Damit ist die Behauptung (1) bewiesen.

(2) Behauptung. $\mathfrak{F}(Y) = \overline{\mathfrak{F}(X)|Y}$

Wegen (1) genügt es zu zeigen: Sei $f \in \mathfrak{F}(Y)$ und N eine offene Umgebung von f in $\mathfrak{F}(Y)$. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ und eine Umgebung M von $f|P_i$ in $\mathfrak{F}(P_i)$, so daß

$$(\rho^Y_{P_i})^{-1}(M) \subset N.$$

$$\alpha: \mathfrak{F}(Y) \longrightarrow \prod_{j=0}^{\infty} \mathfrak{F}(P_j)$$

$$g \longmapsto (g|P_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

ist ein Homöomorphismus von $\mathfrak{F}(Y)$ auf einen abgeschlossenen Unterraum des Produkts. Es gibt also eine offene Menge $\Psi \subset \prod_{j=0}^{\infty} \mathfrak{F}(P_j)$ mit $N = \alpha^{-1}(\Psi)$. Weiter gibt es nach Definition der Produkttopologie eine offene Menge $\phi \subset \prod_{j=0}^{i} \mathfrak{F}(P_j)$, so daß für $\Psi' := \phi \times \prod_{j=i+1}^{\infty} \mathfrak{F}(P_j)$ gilt: (i) $\Psi' \subset \Psi$, (ii) $\alpha(f) \in \Psi'$.

Mit der natürlichen Einbettung $\beta: \mathfrak{F}(Y) \longrightarrow \prod_{j=0}^{i} \mathfrak{F}(P_j)$ folgt: $\alpha^{-1}(\Psi') = \beta^{-1}(\phi)$.
Sei $\gamma: \mathfrak{F}(P_i) \longrightarrow \prod_{j=0}^{i} \mathfrak{F}(P_j)$. Dann gilt

$$\beta^{-1}(\phi) = (\rho^Y_{P_i})^{-1} \circ \gamma^{-1}(\phi)$$

Sei $M := \gamma^{-1}(\phi) \in \mathfrak{F}(P_i)$. M ist offen und wegen (ii) gilt $f|P_i \in M$. Weiter folgt

$$(\rho^Y_{P_i})^{-1}(M) = \alpha^{-1}(\Psi') \subset \alpha^{-1}(\Psi) = N, \qquad \text{q.e.d.}$$

Satz 7 (Theorem B von Cartan-Serre 1951/52, [6]).
Sei X eine Steinsche Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf X. Dann gilt

$$H^q(X,\mathfrak{F}) = 0 \quad \text{für } q \geq 1.$$

Beweis. Nach dem Corollar zu Satz 5, § 10, gibt es eine Ausschöpfung

$$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \dots$$

von X durch relativ-holomorph-konvexe offene Teilmengen U_i von X mit

$$H^q(U_i,\mathfrak{F}) = 0 \quad \text{für } q \geq 1.$$

$\mathfrak{U} := (U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von X. Mit dem Satz von Leray folgt

$$H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \cong H^q(X,\mathfrak{F})$$

Nach demselben Satz gilt für die Überdeckung $\mathfrak{U}^i = (U_j)_{j\leq i}$ von U_i, $(i \in \mathbb{N})$:

$$(*) \qquad H^q(\mathfrak{U}^i,\mathfrak{F}) \cong H^q(U_i,\mathfrak{F}) = 0.$$

Sei nun $\xi \in Z^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$. Dann ist z.z.: es gibt ein $\eta \in C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ mit $\delta\eta = \xi$.
Wegen (*) gilt:

$$M_i := \{\eta \in C^{q-1}(\mathfrak{U}^i,\mathfrak{F}): \xi_i := \xi|U_i = \delta\eta\} \neq \emptyset$$

und weiter folgt nach Wahl eines $\eta_i \in M_i$ für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$M_i = \eta_i + Z^{q-1}(\mathfrak{U}^i,\mathfrak{F}).$$

Der Fréchetraum

$$Z^{q-1}(\mathfrak{U}^i,\mathfrak{F}) = \mathrm{Ker}\,(C^{q-1}(\mathfrak{U}^i,\mathfrak{F}) \xrightarrow{\delta} C^q(\mathfrak{U}^i,\mathfrak{F}))$$

induziert eine Topologie auf M_i, die unabhängig von der Auswahl von η_i ist, denn für ein $\eta_i' \in M_i$ ist die Translation

$$
\begin{array}{ccc}
Z^{q-1}(\mathfrak{U}^i,\mathcal{F}) & \longrightarrow & Z^{q-1}(\mathfrak{U}^i,\mathcal{F}) \\
v & \longmapsto & (\eta_i'-\eta_i)+v
\end{array}
$$

des topologischen $\mathbb{C}$-Vektorraums $Z^{q-1}(\mathfrak{U}^i,\mathcal{F})$ eine stetige und offene Abbildung.

<u>Behauptung.</u> Die Beschränkungsabbildung $M_{i+1} \longrightarrow M_i$ ist stetig und hat dichtes Bild.

<u>Beweis.</u> OBdA gelte $\eta_i = \eta_{i+1}|U_i$. Dann ist zu zeigen: Die Beschränkungsabbildung

$$Z^{q-1}(\mathfrak{U}^{i+1},\mathcal{F}) \longrightarrow Z^{q-1}(\mathfrak{U}^i,\mathcal{F})$$

hat dichtes Bild.

<u>1. Fall $q = 1$.</u> Die Aussage ergibt sich aus dem kommutativen Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
Z^{0}(\mathfrak{U}^{i+1},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha", "\cong"'] & Z^{0}(\mathfrak{U}^{i},\mathcal{F}) \arrow[d, "\beta"', "\cong"] \\
\mathcal{F}(U_{i+1}) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{F}(U_i)
\end{tikzcd}
$$

denn α,β sind topologische Isomorphismen und Im γ ist dicht in $\mathfrak{F}(U_i)$ nach Satz 6, § 10.

<u>2. Fall: $q \geq 2$.</u> Dann ist

$$\beta\colon Z^{q-1}(\mathfrak{U}^{i+1},\mathcal{F}) \longrightarrow Z^{q-1}(\mathfrak{U}^i,\mathcal{F})$$

sogar surjektiv.
Denn sei $\zeta \in Z^{q-1}(\mathfrak{U}^i,\mathcal{F}) \Rightarrow$

$$\exists\ \chi \in C^{q-2}(\mathfrak{U}^i,\mathcal{F}):\ \delta\chi = \zeta.$$

χ läßt sich auf triviale Weise fortsetzen zu

$$\overline{\chi} \in C^{q-2}(\mathfrak{U}^{i+1},\mathcal{F}) \text{ mit } \overline{\chi}|U_i = \chi$$

und es gilt

$$\overline{\zeta} := \delta\overline{\chi} \in Z^{q-1}(\mathfrak{U}^{i+1},\mathcal{F}) \text{ mit } \overline{\zeta}|U_i = \zeta.$$

Nach dem Mittag-Lefflerschen Ausschöpfungsprinzip gibt es daher eine Folge $\overline{\eta}_i \in M_i (i \in \mathbb{N})$ mit

$$\overline{\eta}_{i+1}|U_i = \overline{\eta}_i.$$

Also existiert eine Cokette $\eta \in C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ mit $\eta|U_i = \overline{\eta}_i$ und $\delta\eta = \xi$
q.e.d.