Komplexe Analysis mehrerer Veränderlichen

Vorlesung von Otto Forster
im Sommersemester 1973
an der Universität Regensburg

9. Kohärente Garben

ist kommutativ. Dabei bezeichnet $\phi^{(q)}$ den Isomorphismus, der im obigen Doppelkomplex abelscher Gruppen nach Satz 12 induziert wird. Die natürliche Abbildung ρ ist somit als Isomorphismus nachgewiesen.

§ 9. Kohärente Garben

Definition. Sei $(X,\mathcal{O})$ eine komplexe Mannigfaltigkeit.
Eine analytische Modulgarbe (oder $\mathcal{O}$-Modulgarbe) auf X ist eine Garbe $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen zusammen mit einer $\mathcal{O}$-Modulstruktur, d.h. für jede offene Menge $U \subset X$ ist eine Multiplikation

$$\mathcal{O}(U) \times \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

gegeben, die $\mathcal{F}(U)$ zu einem $\mathcal{O}(U)$-Modul macht und die mit den Beschränkungsabbildungen verträglich ist, d.h. für $V \subset U$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(U) \times \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[d] \\
\mathcal{O}(V) \times \mathcal{F}(V) \arrow[r] & \mathcal{F}(V)
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

Anmerkung: Diese Definition läßt sich allgemeiner für den Fall: X ist beliebiger topologischer Raum, $\mathcal{O}$ beliebige Garbe von Ringen, treffen.

Beispiele.
a) $\mathcal{O}^n$ ist $\mathcal{O}$-Modulgarbe
b) Idealgarben.
Sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$, $\mathcal{O}(U) \times \mathcal{J}(U) \longrightarrow \mathcal{J}(U)$ sei die Ringmultiplikation.

Beispiel einer Idealgarbe:
Sei $(X,\mathcal{O})$ komplexe Mannigfaltigkeit, $A \subset X$ beliebige Teilmenge.
Für $U = \mathring{U} \subset X$ wird definiert:

$$\mathcal{J}(U) := \{f \in \mathcal{O}(U) \colon f|U \cap A = 0\}$$

c) Untermodulgarben $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}^n$

$$\mathcal{O}(U) \times \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$$

ist induziert von

$$\mathcal{O}(U) \times \mathcal{O}(U)^n \longrightarrow \mathcal{O}(U)^n$$

Beispiel einer Untermodulgarbe:
Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige $\mathcal{O}$-Modulgarbe und seinen $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{A}(X)$.
Die "Relationengarbe" $\mathcal{R}(f_1,\dots,f_k) \subset \mathcal{O}^k$ ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{R}(f_1,\dots,f_k)(U) := \{(\varphi_1,\dots,\varphi_k) \in \mathcal{O}(U)^k:$$
$$\varphi_1 f_1 + \dots + \varphi_k f_k = 0 \text{ über } U\}$$

Definition. Sei $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}$-Modulgarbe über X
a) $\mathcal{F}$ heißt von endlichem Typ, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, so daß es endlich viele Elemente $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{F}(U)$ gibt mit

$$\mathcal{F}_y = \mathcal{O}_y \rho_y^U f_1 + \dots + \mathcal{O}_y \rho_y^U f_k$$

für alle $y \in U$. Hierbei ist ρ_y^U: $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_y$ die natürliche Abbildung.
b) $\mathcal{F}$ heißt kohärent, wenn $\mathcal{F}$ von endlichem Typ ist und für je endlich viele Elemente $f_1,\dots,f_m \in \mathcal{F}(Y)$, $Y = \overset{\circ}{Y} \subset X$ die Relationengarbe $\mathcal{R}(f_1,\dots,f_m)$ über Y von endlichem Typ ist.

Satz 1 (Oka).
Sei $(X,\mathcal{O})$ eine komplexe Mannigfaltigkeit und $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{O}(X)^m$.
Dann ist die Relationengarbe $\mathcal{R}(f_1,\dots,f_k)$ von endlichem Typ.

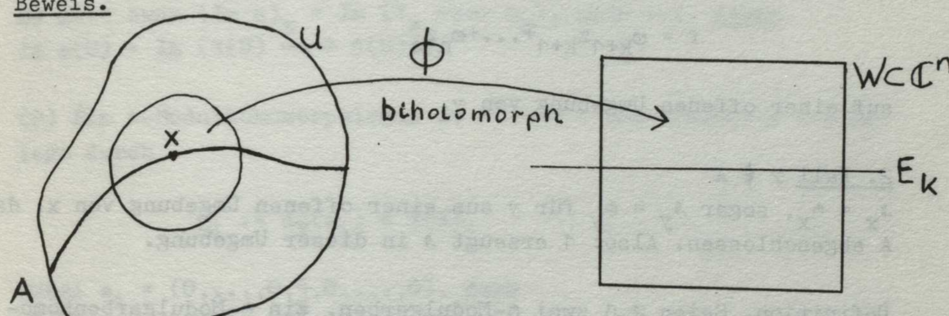
Korollar. $\mathcal{O}^m$ ist kohärent für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Für einen Beweis des Satzes von Oka siehe Gunning-Rossi [13]; vgl. auch K. Oka [23] und H. Cartan [5].

Bemerkung. Eine Untermodulgarbe einer kohärenten Modulgarbe ist genau dann kohärent, wenn sie von endlichem Typ ist.

Beispiel. Sei $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{C}^n$, $A \subset U$ eine abgeschlossene analytische Untermannigfaltigkeit, $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ die Idealgarbe von A. Dann ist $\mathcal{J}$ kohärent.

Beweis.



Sei $x \in U$
1. Fall: $x \in A$.
o.B.d.A. $A = E_k \cap W$, W offen in $\mathbb{C}^n$, $E_k = \{z \in \mathbb{C}^n: z_1 = \dots = z_k = 0\}$, $x = 0$.

Behauptung: $z_{k+1},\dots,z_n$ erzeugen $\mathcal{J}$ über W.
Sei $f \in \mathcal{J}_y$, $y \in W$.

Fall a: $y \notin E_k$.
Dann: Für wenigstens ein $l \in \{k+1,\dots,n\}$ gilt: $z_l(y) \neq 0$.
Dann ist

$$\frac{1}{\rho_y^W(z_l)} \in \mathcal{O}_y \Rightarrow \frac{f}{\rho_y^W(z_l)} \in \mathcal{O}_y,\ f = \frac{f}{\rho_y^W(z_l)} \cdot \rho_y^W(z_l)$$

Fall b: $y \in E_k$, $y = (y_1,\dots,y_k, 0,\dots 0)$. Es gilt:

$$f(z)=\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{\infty} c_{i_1\dots i_n}(z_1-y_1)^{i_1}\cdot\ldots\cdot(z_k-y_k)^{i_k}\cdot z_{k+1}^{i_{k+1}}\cdot\ldots\cdot z_n^{i_n}$$

$f|E_k = 0$. Daraus folgt mit Identitätssatz für Potenzreihen, da der Konvergenzbereich der Reihe für f geschnitten mit E_k offen in $\mathbb{C}^k$ ist: Jeder Summand der Reihe ist durch wenigstens ein z_l, $l = k+1,\dots,n$ teilbar. Daraus folgt:

$$f = \varphi_{k+1}z_{k+1}+\dots+\varphi_n z_n$$

auf einer offenen Umgebung von y.

<u>2. Fall</u> $x \notin A$

$\mathcal{J}_x = \mathcal{O}_x$, sogar $\mathcal{J}_y = \mathcal{O}_y$ für y aus einer offenen Umgebung von x, da A abgeschlossen. Also: 1 erzeugt $\mathcal{J}$ in dieser Umgebung.

<u>Definition.</u> Seien $\mathcal{F},\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}$-Modulgarben. Ein <u>$\mathcal{O}$-Modulgarbenhomomorphismus</u> $\alpha: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ist ein Garbenhomomorphismus derart, daß für jede offene Menge U die Abbildung

$$\alpha_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

ein $\mathcal{O}(U)$-Modul-Homomorphismus ist.
(Dann ist $\alpha_x: \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ ein $\mathcal{O}_x$-Modul-Homomorphismus für jedes $x \in X$).

<u>Bemerkungen.</u> (1) Sei $\alpha: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ $\mathcal{O}$-Modul-Homomorphismus, dann ist auch <u>Ker α</u> wieder eine $\mathcal{O}$-Modulgarbe mit

$$\operatorname{Ker}\alpha(U) := \operatorname{Ker}(\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U)).$$

<u>Coker α</u> ist definiert als die der durch

$$\operatorname{Coker}\alpha(U) := \mathcal{G}(U)/\alpha_U\mathcal{F}(U)$$

gegebenen Prägarbe zugeordnete Garbe.

Die Sequenz

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \operatorname{Coker}\alpha \longrightarrow 0$$

ist eine exakte Garbensequenz, <u>Im α</u> definiert als

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{G} \longrightarrow \operatorname{Coker}\alpha).$$

Es gilt zwar $(\operatorname{Im}\alpha)_x = \operatorname{Im}(\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x)$, aber i.a. <u>nicht</u> $\operatorname{Im}\alpha(U) = \operatorname{Im}(\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U))$.

(2) Ein $\mathcal{O}$-Modulhomomorphismus $\alpha: \mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{F}$ ist eindeutig festgelegt durch

$$g_i := \alpha_X(e_i) \in \mathcal{F}(X),$$

wobei $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, denn

i-te Stelle

$$\alpha((f_1,\dots,f_k)) = \sum_{i=1}^{k} f_i\alpha(e_i|U) = \sum_{i=1}^{k} f_i g_i|U$$

für $(f_1,\dots,f_k) \in \mathcal{O}^k(U)$.

Aus der Definition ergibt sich folgende <u>Umformulierung der Kohärenz.</u>

$\mathcal{F}$ sei eine $\mathcal{O}$-Modulgarbe über X.

(a) $\mathcal{F}$ ist genau dann von endlichem Typ, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, so daß über U ein $\mathcal{O}$-Modul-Epimorphismus

$$\mathcal{O}^k \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

existiert.

(b) $\mathfrak{F}$ ist genau dann Relationen-endlich, wenn zu jedem $\mathcal{O}$-Modulhomomorphismus

$$\mathcal{O}^k \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{F}$$

über einer offenen Menge $U \subset X$ und jedem Punkt $x \in U$ eine offene Menge $V, x \in V \subset U$ existiert und ein $\mathcal{O}$-Modulhomomorphismus $\mathcal{O}^l \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}^k$, so daß die Sequenz

$$\mathcal{O}^l \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}^k \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{F}$$

über V exakt ist.

<u>Satz 2 (Serre [28])</u>. Sei $(X,\mathcal{O})$ ein geringter Raum.
(a) Seien $\mathfrak{F},\mathfrak{G}$ kohärente $\mathcal{O}$-Modulgarben und $\alpha\colon \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ ein $\mathcal{O}$-Modulhomomorphismus. Dann sind Ker (α) und Coker (α) kohärent.

(b)
$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{H} \longrightarrow 0$$

sei eine exakte $\mathcal{O}$-Modulgarbensequenz. Sind $\mathfrak{F},\mathfrak{H}$ kohärent, dann ist auch $\mathfrak{G}$ kohärent.

<u>Beweis.</u> (a) Da $\mathfrak{K} := \mathrm{Ker}\,(\mathfrak{F} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{G})$ Untergarbe von $\mathfrak{F}$ ist, genügt es z.z.: $\mathfrak{K}$ ist von endlichem Typ.
$\mathfrak{F}$ von endlichem Typ $\Rightarrow$ $\exists$ lokal $\mathcal{O}$-Modul-Epimorphismus $\mathcal{O}^k \xrightarrow{\beta} \mathfrak{F}$.
Dann ist Ker $(\mathcal{O}^k \xrightarrow{\alpha\beta} \mathfrak{G})$ von endlichem Typ, da $\mathfrak{G}$ Relationen-endlich $\Rightarrow$ $\exists$ lokal ein $\mathcal{O}$-Modul-Homomorphismus $\gamma\colon \mathcal{O}^l \longrightarrow \mathcal{O}^k$, so daß

$$\mathcal{O}^l \xrightarrow{\gamma} \mathcal{O}^k \xrightarrow{\alpha\beta} \mathfrak{G} \quad \text{exakt ist}$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}^l \xrightarrow{\beta\gamma} \mathfrak{F} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{G} \quad \text{ist exakt}$$

$$\text{d.h. } \mathcal{O}^l \longrightarrow \mathfrak{K} \longrightarrow 0 \quad \text{ist exakt,}$$

also ist $\mathfrak{K}$ von endlichem Typ.

Aus der Kohärenz von $\mathfrak{G}$ und der exakten Sequenz

$$\mathfrak{F} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{G} \xrightarrow{\beta} \mathrm{Coker}\,\alpha \longrightarrow 0$$

folgt sofort, daß Coker α von endlichem Typ ist.
Sei

$$\mathcal{O}^p \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Coker}\,\alpha$$

ein $\mathcal{O}$-Modulhomomorphismus über der offenen Menge U. Dann gibt es zu jedem $x \in U$ einen $\mathcal{O}$-Modulhomomorphismus

$$\mathcal{O}^p \xrightarrow{\psi} \mathfrak{G}$$

und eine offene Umgebung $V \subset U$ von x, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}^p \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathfrak{G} \arrow[r, "\beta"'] & \mathrm{Coker}\,\alpha \end{tikzcd}$$

kommutativ über V ist.
Da $\mathfrak{F}$ von endlichem Typ, existiert zu $x \in U$ eine Umgebung $W \subset V$ und ein Epimorphismus $\delta\colon \mathcal{O}^l|W \longrightarrow \mathfrak{F}|W$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^l \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{O}^l \times \mathcal{O}^p \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \mathcal{O}^p \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dl, "\psi"'] & 0 \\ \mathfrak{F} \arrow[r, "\alpha"] & \mathfrak{G} \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Coker}\,\alpha \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ist dann kommutativ über W, wobei

$$\varepsilon\colon \mathcal{O}^l \times \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathfrak{G}$$

$$(a,b) \longmapsto \alpha(\delta a) + \psi(b).$$

Ker $\varepsilon \longrightarrow$ Ker γ ist surjektiv, denn sei $c \in \mathcal{O}^p|W$: $\gamma c = 0$, d.h. $\beta(\psi c) = 0$, also gibt es ein $a \in \mathcal{F}|W$, $a = \delta(d)$, $d \in \mathcal{O}^l|W$ mit

$$\varepsilon(-d,c) = \alpha(-\delta d) + \psi(c) = -\psi(c) + \psi(c) = 0$$

und $\pi(-d,c) = c$.
Da nach obigem Ker $(\mathcal{O}^{l+p} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{G})$ von endlichem Typ, ist daher auch Coker α relationenendlich.

(b) Sei $x \in X$. Mit obigen Bezeichnungen erhält man über einer genügend kleinen Umgebung W von x das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^l \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta", "\text{Epi.}"'] & \mathcal{O}^l \times \mathcal{O}^p \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \mathcal{O}^p \arrow[d, "\gamma"', "\text{Epimorphismus}"] \arrow[dl, "\psi"'] \\
\mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"'] & \mathcal{G} \arrow[r, "\beta"'] & \mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

Dann ist ε surjektiv (Diagrammjagd), also $\mathcal{G}$ von endlichem Typ. Sei nun $g: \mathcal{O}^l \longrightarrow \mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}$-Modulhomomorphismus über $U \subset X$. Da $\mathcal{H}$ Relationenendlich, erhalten wir zu jedem $x \in U$ über einer Umgebung $W \subset U$ von x das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}^p \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\psi"] & \mathcal{O}^l \arrow[r, "\beta \circ g"] \arrow[d, "g"] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"'] & \mathcal{G} \arrow[r, "\beta"'] & \mathcal{H} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist ψ definiert, da Im $(g \circ \gamma) \subset$ Im α. Es folgt: Ker $\psi \longrightarrow$ Ker g ist surjektiv; da nach (a) Ker ψ von endlichem Typ folgt Ker g von endlichem Typ, d.h. $\mathcal{G}$ ist Relationenendlich.

Satz 3. Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Modulgarbe über X und $x \in X$ mit $\mathcal{F}_x = 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x, so daß $\mathcal{F}_y = 0$ für alle $y \in U$.

Beweis. Da $\mathcal{F}$ von endlichem Typ gibt es eine Umgebung V von x und $(f_1,\dots,f_k) \in \mathcal{O}^k(V)$ mit

$$\mathcal{F}_y = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{O}_y f_i$$

für alle $y \in V$.
$\mathcal{F}_x = 0 \Rightarrow \rho_x^V(f_i) = 0 \quad i = 1,\dots,k \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ Umgebung U von x: $f_i|U = 0 \quad (i = 1,\dots,k)$.

Corollar. Seien $\mathcal{F},\mathcal{G}$ kohärente $\mathcal{O}$-Moduln über X und $\alpha: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}$-Modulhomomorphismus. Gilt für ein $x \in X$, daß

$$\alpha_x: \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$$

surjektiv (injektiv) ist, so gibt es eine Umgebung $U = \mathring{U}$ von x, so daß $a_y: \mathcal{F}_y \longrightarrow \mathcal{G}_y$ surjektiv (injektiv) ist für alle $y \in U$.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus Satz 3, denn wegen der Exaktheit von

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \longrightarrow \text{Coker } \alpha \longrightarrow 0$$

gilt: $(\text{Coker } \alpha)_x = 0$.
Die zweite Aussage ergibt sich mit Satz 3 direkt aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \alpha \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}.$$

Definition. Eine $\mathcal{O}$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ über X heißt lokalfrei, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, so daß über U eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ und ein $\mathcal{O}$-Modulgarben-Isomorphismus

$$\alpha: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}^k$$

existiert.

Bemerkung. Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\varphi: \mathcal{O}^l \longrightarrow \mathcal{O}^k$ ein $\mathcal{O}$-Modulhomomorphismus mit $\varphi(e_i) = (f_{i1},\dots,f_{ik}) \in \mathcal{O}^k(X)$. Dann heißt

$$\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{l1} & \cdots & f_{lk} \end{pmatrix} \in M(l\times k,\mathcal{O}(X))$$

die φ zugeordnete Matrix F. Sei $\psi: \mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{O}^m$ ein weiterer $\mathcal{O}$-Modulhomomorphismus mit zugeordneter Matrix $G \in M(k\times m,\mathcal{O}(X))$. Dann ist dem Homomorphismus

$$\psi\circ\varphi: \mathcal{O}^l \longrightarrow \mathcal{O}^m$$

die Matrix $F\cdot G$ zugeordnet.
φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $k = l$ und F invertierbar ist.

Lemma (Cartansches Matrizen-Heftungslemma [3]).
Seinen Q_1, Q_2 heftbare kompakte Quader im $\mathbb{C}^n$, U eine offene Umgebung von $Q_1 \cap Q_2$ und $A \in GL(k,\mathcal{O}(U))$. Dann gibt es Umgebungen U_i von Q_i mit $U_1\cap U_2 \subset U$ und Matrizen $A_i \in GL(k,\mathcal{O}(U_i))$ mit

$$A = A_1 A_2^{-1} \text{ über } U_1\cap U_2.$$

Wir beweisen dieses Heftungslemma am Ende dieses Paragraphen.

Satz 4. Sei X ein beschränkter offener Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$ und $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Modulgarbe über einer offenen Umgebung U von $\overline{X}$. Ist $\mathcal{F}$ lokal frei in U, so ist $\mathcal{F}$ frei (d.h. isomorph zu $\mathcal{O}^k$) über X.

Beweis. Wegen des Riemannschen Abbildungssatzes genügt es mittels des Cousinschen Induktionsprinzips zu zeigen: Ist U offen in $\mathbb{C}^n$ und $\mathcal{F}$ lokalfrei in U, so ist $\mathcal{F}$ frei über einer offenen Umgebung jedes kompakten Quaders in U.

Seien also Q_1 und Q_2 heftbare Quader. Da $\mathcal{F}$ frei über Umgebungen U_i' von Q_i, existieren Isomorphismen

$$\varphi_i: \mathcal{O}^k \xrightarrow{\sim} \mathcal{F},\ i = 1,2$$

über $U_i' = \mathring{U}_i' \supset Q_i$. Über $U_1'\cap U_2'$ werde

$$\phi := \varphi_1^{-1}\circ\varphi_2: \mathcal{O}^k \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^k$$

repräsentiert durch $\tilde{\phi} \in GL(k,\mathcal{O}(U_1'\cap U_2'))$. Nach dem Cartanschen Heftungslemma existieren offene Umgebungen U_i von Q_i mit $U_i \subset U_i'$, sowie $\tilde{\phi}_i \in GL(k,\mathcal{O}(U_i))$, so daß für die zugeordneten Abbildungen ϕ_i gilt

$$\phi = \phi_1\circ\phi_2^{-1}$$

$\Rightarrow \varphi_2\phi_2 = \varphi_1\phi_1$ über $U_1\cap U_2$, deshalb ist über $U_1\cup U_2$

$$\psi: \mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{F}$$

durch $\psi|U_i = \varphi_i\circ\phi_i$ wohldefiniert. Insbesondere ist ψ ein Isomorphismus, d.h. $\mathcal{F}$ ist frei über $U_1\cup U_2 \supset Q_1\cup Q_2$.

Definition. Sei M ein endlich erzeugter Modul über $\mathcal{O}_x$. Unter der homologischen Dimension $hd_{\mathcal{O}_x} M$ von M versteht man die kleinste natürliche Zahl d derart, daß eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_x^{p_d} \longrightarrow \mathcal{O}_x^{p_{d-1}} \longrightarrow \dots\ \mathcal{O}_x^{p_o} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

existiert.

Bemerkung. $hd\ M = 0 \Leftrightarrow M$ frei.

Zum Beweis der folgenden Sätze 5-7 verweisen wir auf Grauert-Remmert [10] und Northcott [20], siehe auch Gunning-Rossi [13].

Satz 5. Der $\mathcal{O}_x$-Modul M habe homologische Dimension $d \geq 1$ und es sei

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \mathcal{O}_x^k \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz. Dann gilt: hd $N = d-1$.

Satz 6 (Rückert [26]).
Sei x Punkt einer n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit. Dann ist $\mathcal{O}_x$ Noethersch.
(D.h. jedes Ideal ist endlich erzeugt).

Satz 7 (Syzygiensatz von Hilbert [15]).
Sei x Punkt einer n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit. Dann hat jeder endlich erzeugte $\mathcal{O}_x$-Modul M eine homologische Dimension $\leq n$.

Satz 8. Sei $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}$-Modulgarbe über dem offenen Polyzylinder $X \subset \mathbb{C}^n$ und es gebe eine exakte $\mathcal{O}$-Modulgarbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{p_k} \longrightarrow \mathcal{O}^{p_{k-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}^{p_o} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

über X. Dann gilt für $q \geq 1$

$$H^q(X,\mathcal{F}) = 0.$$

Beweis durch Induktion nach der Länge k der Auflösung.

k = 0: $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}^{p_o}$, daher gilt nach Satz 8, § 8

$$H^q(X,\mathcal{F}) \cong H^q(X,\mathcal{O}^{p_o}) \cong H^q(X,\mathcal{O})^{p_o} = 0.$$

$k-1 \longmapsto k$: Mit $\mathcal{G} := \operatorname{Ker}(\mathcal{O}^{p_o} \longrightarrow \mathcal{F})$ erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{p_k} \longrightarrow \dots \mathcal{O}^{p_1} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0,$$

also gilt nach Induktionsvoraussetzung $H^q(X,\mathcal{G}) = 0$ für $q \geq 1$.

Aus dem Abschnitt

$$H^q(X,\mathcal{O}^{p_o}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^{q+1}(X,\mathcal{G})$$

der langen exakten Cohomologiesequenz für

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}^{p_o} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

folgt dann $H^q(X,\mathcal{F}) = 0$ für $q \geq 1$.

Definition. Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Modulgarbe über der komplexen Mannigfaltigkeit X. Unter der homologischen Dimension von $\mathcal{F}$ versteht man die Zahl

$$\sup_{x \in X} \operatorname{hd}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x)$$

Satz 9. Sei $X \subset \mathbb{C}^n$ ein beschränkter offener Polyzylinder und U eine offene Umgebung von $\overline{X}$. Es sei $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}$-Modulgarbe über U mit der homologischen Dimension d. Dann gibt es über X eine exakte $\mathcal{O}$-Modulgarbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{p_d} \longrightarrow \mathcal{O}^{p_{d-1}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{O}^{p_o} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

(Insbesondere ist also $H^q(X,\mathcal{F}) = 0$, $q \geq 1$ für jede in einer offenen Umgebung von $\overline{X}$ kohärente Garbe).

Beweis des Satzes durch Induktion nach d.

d = 0: Nach Satz 4, § 9, genügt es z.z.: $\mathcal{F}$ ist lokal frei.
Sei $x \in U$. Wegen $\operatorname{hd}_{\mathcal{O}_x}\mathcal{F}_x = 0$ gibt es einen Isomorphismus $\alpha\colon \mathcal{O}_x^p \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x$.

$$\varphi_i := \alpha(e_i) \in \mathcal{F}_x,\ i = 1,\dots,p$$

wobei e_i die kanonischen Erzeugenden von $\mathcal{O}_x^p$ sind. Es gibt eine offene Umgebung $V \subset U$ von x und Elemente $f_1,\dots,f_p \in \mathcal{F}(V)$ mit

$$\rho_x^V(f_i) = \varphi_i,$$

wobei $\rho_x^V: \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}_x$. Seien e_i die kanonischen Erzeugenden von $\mathcal{O}^p$, $\beta: \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{F}$ über V der durch

$$\beta(e_i) = f_i$$

gegebene $\mathcal{O}$-Modulgarbenhomomorphismus. $\beta_x: \mathcal{O}_x^p \longrightarrow \mathcal{F}_x$ stimmt dann mit α überein, ist also bijektiv. Nach Corollar zu Satz 3, § 9, ist daher β_y bijektiv für alle y aus einer gewissen Umgebung $W \subset V$ von x. Also ist β ein Isomorphismus über W.

<u>$d-1 \longrightarrow d$:</u> Sei $\overline{X} \subset X' \subset \overline{X}' \subset U$. Wir zeigen: Es gibt einen $\mathcal{O}$-Modul-Epimorphismus

$$(*) \qquad \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

über X'. Denn wegen $hd(\mathcal{N}) = d-1$, $\mathcal{N} = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{F})$ folgt aus der Induktionsvoraussetzung die Behauptung.

(*) beweisen wir mithilfe des Cousinschen Induktionsprinzips. Sei Q ein Quader.

$A(Q) = 1 :\Leftrightarrow$ Über einer Umgebung von Q existiert ein Epimorphismus $\mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$.

Seien Q_1, Q_2 heftbar mit $A(Q_1) = A(Q_2) = 1$, also gelte

$$\mathcal{O}^k \xrightarrow{\ \varphi\ } \mathcal{F} \longrightarrow 0 \text{ über } U_1 \supset Q_1,$$

$$\mathcal{O}^l \xrightarrow{\ \psi\ } \mathcal{F} \longrightarrow 0 \text{ über } U_2 \supset Q_2.$$

Weiter seien $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{F}(U_1)$ und $g_1,\dots,g_l \in \mathcal{F}(U_2)$ die Bilder der kanonischen Erzeugenden von $\mathcal{O}^k$ unter φ, bzw. der von $\mathcal{O}^l$ unter ψ. Dann gilt für alle $x \in U_1$

$$\mathcal{F}_x = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{O}_x f_i$$

und entsprechendes über U_2. Für alle $x \in U_1 \cap U_2$ erzeugen sowohl die Keime $f_1,\dots,f_k$ als auch die Keime $g_1,\dots,g_l$ den Modul $\mathcal{F}_x$ über $\mathcal{O}_x$.

<u>Hilfssatz</u> (im Beweis). Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe über U mit der homologischen Dimension d. Satz 9 gelte für alle Garben der $hd < d$. Weiter sei $Y \subset\subset U$ ein offener Polyzylinder und $F_1,\dots,F_k \in \mathcal{F}(Y)$ Erzeugende eines jeden Halmes $\mathcal{F}_y, y \in Y$. Dann gilt für jeden offenen Polyzylinder $Y' \subset Y$

$$\mathcal{F}(Y') = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{O}(Y')F_i$$

<u>Beweis.</u> $\mathcal{O}^k \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathcal{F} \longrightarrow 0$, $\alpha(e_i) = F_i$ ist eine exakte Garbensequenz über Y. Sei $\mathcal{N} = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{O}^k \longrightarrow \mathcal{F})$, also $hd\,\mathcal{N} < d$, daher gilt nach Voraussetzung insbesondere $H^1(Y',\mathcal{N}) = 0$, und damit ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(Y') \longrightarrow \mathcal{O}^k(Y') \longrightarrow \mathcal{F}(Y') \longrightarrow 0$$

exakt, d.h. $\mathcal{O}^k(Y') \longrightarrow \mathcal{F}(Y')$ ist surjektiv.

Nach dem Hilfssatz existieren eine offene Umgebung $V \subset U_1 \cap U_2$ von $Q_1 \cap Q_2$ und holomorphe Matrizen $A \in M(l{\times}k, \mathcal{O}(V))$, $B \in M(k{\times}l, \mathcal{O}(V))$ mit

$$gA := (g_1,\dots,g_l)A = (f_1,\dots,f_k)$$

$$fB := (f_1,\dots,f_k)B = (g_1,\dots,g_l) \text{ über } V.$$

Daraus folgt für die $(k+l)$-tupel $(0,g)$ und $(f,0)$

$$(0,g) = (f,0)\begin{pmatrix} 1-BA & B \\ -A & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist Element von $GL(k+l, \mathcal{O}(V))$, da

$$\begin{pmatrix} 1-BA & B \\ -A & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -B \\ A & 1-AB \end{pmatrix} = 1,$$

also gibt es nach dem Satz über die Matrizenheftung offene Umgebungen $V_i \subset U_i$ von Q_i mit $V_1 \cap V_2 \subset V$ und Matrizen $A_i \in GL(k+l, \mathcal{O}(V_i))$ $(i = 1,2)$ mit

$$\begin{pmatrix} 1-BA & B \\ -A & 1 \end{pmatrix} = A_1 \cdot A_2^{-1} \text{ über } V,$$

$$\Rightarrow (0,g)A_2 = (f,0)A_1$$

Diese Gleichung liefert daher ein p-tupel $(F_1,\dots,F_p) \in \mathcal{F}(V_1 \cup V_2)^p$, $p := k+1$, mit

$$(0,g)A_2 = (F_1,\dots,F_p) \text{ über } V_2$$

$$(f,0)A_1 = (F_1,\dots,F_p) \text{ über } V_1.$$

Da A_1, A_2 invertierbar sind, erzeugen $F_1,\dots,F_p$ jeden Halm $\mathcal{F}_x$, $x \in V_1 \cup V_2$. Daher existiert ein $\mathcal{O}$-Modul-Epimorphismus

$$\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

über $V_1 \cup V_2$ mit $e_i \longmapsto F_i$, $i = 1,\dots,p$, d.h. $A(Q_1 \cup Q_2) = 1$, q.e.d.

Die Cartansche Matrizenheftung

Heftungslemma von Cartan [3]

Seien Q_1, Q_2 heftbare kompakte Quader in $\mathbb{C}^n$, U eine offene Umgebung von $Q_1 \cap Q_2$ und $A \in GL(k, \mathcal{O}(U))$. Dann gibt es offene Umgebungen U_i von Q_i mit $U_1 \cap U_2 \subset U$ und Matrizen $A_i \in GL(k, \mathcal{O}(U_i))$ mit

$$A = A_1 \cdot A_2^{-1} \text{ über } U_1 \cap U_2.$$

Zum Beweis stellen wir folgende Sätze bereit.

Definition. Sei E und F Banachräume, $U = \mathring{U} \subset E$ und $a \in U$. Eine Abbildung $f: U \longrightarrow F$ heißt strikt differenzierbar in a, wenn es eine stetige lineare Abbildung $\mu: E \longrightarrow F$ gibt mit

$$\lim_{\substack{u,v \to a \\ u \neq v}} \frac{\|f(u)-f(v)-\mu(u-v)\|}{\|u-v\|} = 0$$

$\mu =: f'(a)$ heißt die Ableitung von f in a.

Hilfssatz 1. Mit obigen Bezeichnungen gilt: Ist f strikt differenzierbar in a und $f'(a)$ surjektiv, so gibt es eine Umgebung V von $f(a)$ mit

$$f(U) \supset V$$

Beweis. Nach dem Satz von Banach (Satz 3, § 10) ist μ eine offene Abbildung. Daher gibt es ein $C \in \mathbb{R}_+^*$ und zu jedem $y \in F$ ein $x \in E$ mit $y = \mu(x)$ und

$$(*) \qquad \|x\| \leq C\|y\|$$

OBdA gelte $a = 0$, $f(a) = 0$ und $C = 1$. Aus obiger Definition folgt für alle $(x,y) \in E \times E$

$$\|f(x)-f(y)-\mu(x-y)\| = \omega(x,y)\|x-y\|$$

wobei wir definiert haben: $\varpi(x,x) = 0$ für alle $x \in E$, und es gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varpi(x,y) = 0.$$

Also gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\varpi(x,y) \leq \frac{1}{2}$$

für alle $(x,y) \in \overline{K_\delta(0)} \times \overline{K_\delta(0)} = \{(x,y) \in E\times E\colon \|x\| \leq \delta \text{ und } \|y\| \leq \delta\}$.

Sei nun $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\delta \geq r > 0$ so gewählt, daß $\overline{K_r(0)} \subset U$.

<u>Behauptung.</u> $V = \overline{K_{\frac{r}{2}}(0)} \subset f(U)$

<u>Beweis.</u> Sei $y_o \in \overline{K_{\frac{r}{2}}(0)}$. z.z.: $\exists\, \tilde{x} \in U\colon y_o = f(\tilde{x})$. Sei

$$g\colon U \longrightarrow F$$

definiert durch

$$x \longmapsto y_o + u(x) - f(x)$$

Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E mit

(1) $g(x_n) = u(x_{n+1})$

(2) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq (\frac{1}{2})^n \frac{r}{4}$

(3) $\|x_n\| \leq \frac{3}{4}r + \frac{r}{4}(\frac{1}{2} + \ldots + (\frac{1}{2})^{n-1}) < r$

Zur Konstruktion: $\exists\, x_o \in E$ mit $u(x_o) = y_o$ und $\|x_o\| \leq \|y_o\| \leq \frac{r}{2}$.

$$(*) \quad \Rightarrow \exists\, z \in E\colon u(z) = u(x_o) - f(x_o) \text{ und}$$

$$\|z\| \leq \|u(z)\| = \|u(x_o) - f(x_o)\| = \varpi(x_o,0)\|x_o\| \leq \frac{r}{4}$$

$x_1 := z + x_o$ erfüllt dann (1),(2),(3).

Seien $x_o, \ldots, x_n$ schon konstruiert. Es gibt ein $z \in E$ mit $u(z) = g(x_n) - g(x_{n-1})$ und

$$\|z\| \leq \|u(z)\| = \varpi(x_n, x_{n-1})\|x_n - x_{n-1}\| \leq (\tfrac{1}{2})^n \tfrac{r}{4}$$

Dann hat $x_{n+1} := z + x_n$ die gewünschten Eigenschaften.

(2),(3) $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n =: \tilde{x} \in \overline{K_r(0)} \subset U$.

Es ist noch zu zeigen

$$y_o = f(\tilde{x}).$$

Nun gilt aber

$$f(\tilde{x}) = \lim f(x_n) = y_o,$$

denn

$$\|f(x_n) - f(\tilde{x})\| \leq \|f(x_n) - f(\tilde{x}) + u(x_n - \tilde{x})\| + \|u(x_n - \tilde{x})\|$$

$$\leq \varpi(x_n, \tilde{x}) \cdot \|x_n - \tilde{x}\| + \|u(x_n - \tilde{x})\|$$

und

$$\|y_o - f(x_n)\| = \|g(x_n) - u(x_n)\| = \|u(x_{n+1} - x_n)\| \longrightarrow 0. \text{ q.e.d.}$$

Seien $U_1 = \mathring{U}_1$ und $U_2 = \mathring{U}_2$ offene Mengen in $\mathbb{C}^n$ und $U_o := U_1 \cap U_2$.
$\mathcal{B}(U_i)$ bezeichne die Algebra der beschränkten holomorphen Funktionen auf U_i.
E_i sei der Banachraum aller $(k\times k)$-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathcal{B}(U_i)$ $(i = 0,1,2)$,
E_i^* die Menge der invertierbaren Elemente in E_i.

Für $f = (f_1, \ldots, f_k) \in (\mathcal{B}(U_i))^k$ setzen wir

$$\|f\| = \sup_{j=1}^{k} \|f_j\| = \sup_{j=1}^{k}\Big(\sup_{z\in U_i} |f_j(z)|\Big)$$

und führen auf E_i $(i = 0,1,2)$ die Operatornormen

$$\|A\| = \sup_{f\in\mathcal{B}(U_i)} \|Af\|$$

ein, sowie auf $E_1 \times E_2$ die Norm

$$\|(A,B)\| = \sup(\|A\|,\|B\|).$$

Satz 10. Jedes $g \in \mathcal{A}(U_o)$ besitze über U_o eine Zerlegung

$$g = g_1 \cdot g_2$$

mit $g_i \in \mathcal{A}(U_i)$.
Dann gibt es eine Umgebung $V \subset E_o$ der Einheitsmatrix, so daß sich jedes $C \in V$ darstellen läßt als

$$C = AB^{-1}$$

mit $(A,B) \in E_1^* \times E_2^*$.

Beweis. Offensichtlich ist $E_1^* \times E_2^*$ offen. Wir zeigen:

$$f\colon E_1^* \times E_2^* \longrightarrow E_o$$

$$(A,B) \longmapsto (A|U_o)\cdot(B^{-1}|U_o)$$

ist strikt differenzierbar in $(1,1)$ und es gilt

$$f'(1,1)\colon E_1 \times E_2 \longrightarrow E_o$$

$$(A,B) \longmapsto A|U_o - B|U_o.$$

Da $f'(1,1)$ surjektiv ist nach Voraussetzung, folgt die Behauptung aus Hilfssatz 1.
Seien also (A,B), $(C,D) \in E_1^* \times E_2^*$.
$f(A,B)-f(C,D)-((A-C)-(B-D)) = AB^{-1}-CD^{-1}((A-B)-(C-D)) =$
$= (C-B)D^{-1}(D-B)B^{-1}+(A-C)(B^{-1}-1)-(B-D)(D^{-1}-1).$
Für $A \neq C$ und $B \neq D$ folgt

$$\lim_{\substack{((A,B),(C,D)) \to (1,1) \\ (A,B) \neq (C,D)}} \frac{\|f(A,B)-f(C,D)-f'(1,1)((A,B)-(C,D))\|}{\|(A-C,B-D)\|} \leq$$

$$\lim_{\substack{((A,B),(C,D)) \to (1,1) \\ (A,B) \neq (C,D)}} \left\{ \frac{\|A-C\|\cdot\|B^{-1}-1\|}{\|A-C\|} + \frac{\|B-D\|\cdot\|D^{-1}-1\|}{\|B-D\|} + \right.$$

$$\left. + \frac{\|C-B\|\cdot\|D^{-1}\|\cdot\|B-D\|\cdot\|B^{-1}\|}{\|B-D\|} \right\} = 0$$

Diesen Grenzwert erhält man auch im Falle $A = C$ oder $B = D$ (aber $(A,B) \neq (C,D)$).

Satz 11. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ ein sternförmiges Gebiet und $A \in GL(k,\mathcal{O}(U))$.
Dann gibt es eine stetige Abbildung

$$\gamma\colon [0,1] \longrightarrow GL(k,\mathcal{O}(U))$$

mit $\gamma(0) = A$ und $\gamma(1) = E$.

Beweis. OBdA sei U sternförmig bzgl. $0 \in \mathbb{C}^n$. Für $t \in [0,\frac{1}{2}]$ definieren wir

$$A_t(x) := A((1-2t)x), \quad x \in U.$$

Dann hängt $A_t \in GL(k,\mathcal{O}(U))$ stetig von t ab mit $A_o = A$ und $A_{\frac{1}{2}} = A(0) \in GL(k,\mathbb{C})$.

Nach Corollar 4 zu Satz 3, § 3 und Corollar zu Satz 2, § 3 ist

$$GL(k,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{k^2} \setminus \{B \in \mathbb{C}^{k^2} : \det B = 0\}$$

zusammenhängend, also gibt es eine stetige Abbildung $\tilde{\gamma}\colon [\frac{1}{2},1] \longrightarrow GL(k,\mathbb{C})$ mit $\tilde{\gamma}(\frac{1}{2}) = A(0)$, $\tilde{\gamma}(1) = E$.
Also verbindet $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow GL(k,\mathcal{O}(U))$

$$\gamma(t) := \begin{cases} A_t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\gamma}(t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

A stetig mit E in $GL(k,\mathcal{O}(U))$.

Satz 12. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein offener Quader. Dann hat die Beschränkungsabbildung

$$\mathcal{O}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$$

dichtes Bild (bzgl.der Topologie der kompakten Konvergenz).

Beweis. Sei $f \in \mathcal{O}(U)$, $K \subset U$ kompakt und $\varepsilon > 0$ gegeben. OBdA ist K selbst ein abgeschlossener Quader in U. Sei Γ ein geschlossener Weg um K in U mit dist $(K,\Gamma) > 0$. Für $z_o \in K$ gilt

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_o} d\zeta$$

Daher gibt es eine Riemannsche Summe

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} f(\eta_\nu)(\eta_{\nu+1} - \eta_\nu) \cdot \frac{1}{\eta_\nu - z_o}$$

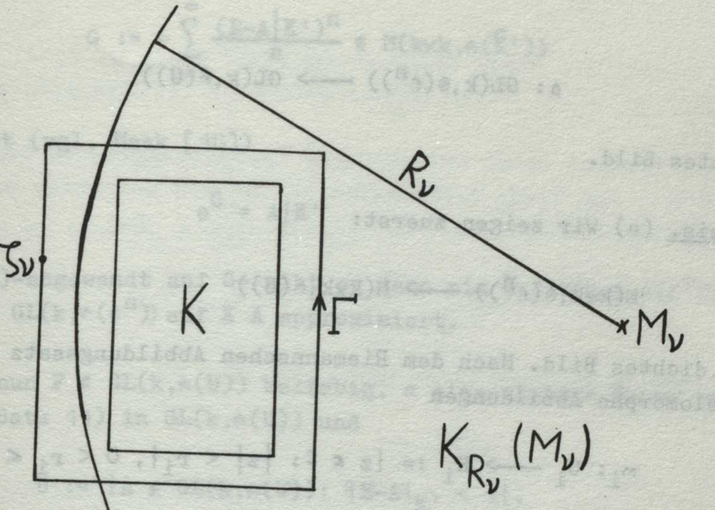
mit $\eta_\nu \in \Gamma$ und

(*) $$\left| f(z_o) - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} f(\eta_\nu)(\eta_{\nu+1} - \eta_\nu) \frac{1}{\eta_\nu - z_o} \right| < \varepsilon$$

Da (*) auch für jede feinere Unterteilung von Γ und in einer Umgebung von z_o gilt, sowie K kompakt ist, gibt es $\zeta_\nu \in \Gamma$ $\nu = 1,\dots,N$ und ein N-tupel $(c_1,\dots,c_N) \in \mathbb{C}^N$ mit

$$\sup_{z \in K} \left| f(z) - \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \frac{1}{\zeta_\nu - z} \right| < \varepsilon/2$$

Weiter gibt es $M_\nu \in \mathbb{C}$, $R_\nu \in \mathbb{R}_+^*$ mit $K \subset K_{R_\nu}(M_\nu)$, $\zeta_\nu \notin \overline{K_{R_\nu}(M_\nu)}$ für $\nu = 1,\dots,N$.



Für jede holomorphe Funktion $\frac{c_\nu}{\zeta_\nu - z} \in \mathcal{O}(K_{R_\nu}(M_\nu))$ wählen wir einen Abschnitt $g_\nu \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ der Taylorreihe mit

$$\sup_{z \in K} \left| \frac{c_\nu}{\zeta_\nu - z} - g_\nu(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2N}$$

$$\Rightarrow \sup_{z \in K} \left| f(z) - \sum_{\nu=1}^{N} g_\nu(z) \right| \le \sup_{z \in K} \left| f(z) - \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu \frac{1}{\zeta_\nu - z} \right| + \sum_{\nu=1}^{N} \sup_{z \in K} \left| \frac{c_\nu}{\zeta_\nu - z} - g_\nu(z) \right| < \varepsilon$$

d.h.

$$g := \sum_{\nu=1}^{N} g_\nu \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

approximiert f auf K mit der geforderten Genauigkeit.

Satz 13. Seien $U_i \subset \mathbb{C}$ offene Quader $(i = 1,\dots,n)$ und $U := U_1 \times \dots \times U_n$. Dann hat die Beschränkungsabbildung

$$\rho: GL(k,\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow GL(k,\mathcal{O}(U))$$

dichtes Bild.

Beweis. (a) Wir zeigen zuerst:

$$M(k\times k,\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)) \longrightarrow M(k\times k,\mathcal{O}(U))$$

hat dichtes Bild. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es biholomorphe Abbildungen

$$\omega_i: U_i \longrightarrow K_i := \{z \in \mathbb{C}: |z| < r_i\},\ 0 < r_i \leq \infty.$$

$$\phi: U \longrightarrow P := K_1\times\ldots\times K_n$$
$$(z_1,\ldots,z_n) \longmapsto (\omega_1(z_1),\ldots,\omega_n(z_n))$$

bildet dann U biholomorph auf einen Polyzylinder P ab. Sei nun $f \in \mathcal{O}(U)$ und $K \subset U$ kompakt $\Rightarrow f\circ\phi^{-1} \in \mathcal{O}(P) \Rightarrow f\circ\phi^{-1}$ ist approximierbar auf $\phi(K)$ durch einen Abschnitt

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N} c_{k_1\ldots k_n} z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}$$

der Taylorentwicklung auf P. Daher wird f auf K approximiert durch

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{N} c_{k_1\ldots k_n} \omega_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot\omega_n^{k_n}$$

Mit Satz 12 (angewandt auf ω_i, $i = 1,\ldots,n$) folgt nun die Behauptung.

(b) Sei $K \subset U$ kompakt, oBdA. ein Quader, $\varepsilon > 0$ und $K' \subset U$ ein weiterer kompakter Quader mit $K \subset \mathring{K}'$. Für $A \in GL(k,\mathcal{O}(U))$ mit $\|E-A\|_{K'} < 1$ definieren wir

$$G := -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(E-A|K')^n}{n} \in M(k\times k,\mathcal{O}(\mathring{K}'))$$

Dann gilt (vgl. Maak [18])

$$e^G = A|K'$$

Wegen (a)-angewandt auf G- gibt es dann ein $\tilde{G} \in M(k\times k,\mathcal{O}(\mathbb{C}^n))$, so daß $e^{\tilde{G}} \in GL(k,\mathcal{O}(\mathbb{C}^n))$ auf K A approximiert.

(c) Sei nun $F \in GL(k,\mathcal{O}(U))$ beliebig, α eine stetige Kurve von E nach F (Satz 11) in $GL(k,\mathcal{O}(U))$ und

$$U := \{A \in GL(k,\mathcal{O}(U)): \|E-A\|_{K'} < 1\}.$$

Dann gibt es endlich viele $G_i \in \alpha([0,1])$ $(i = 0,\ldots,s)$ mit $G_o = E$, $G_s = F$ und $F_i := G_i^{-1}G_{i+1} \in U$ $(i = 0,\ldots,s-1)$. Da nun gilt

$$F = \prod_{i=0}^{s-1} F_i$$

folgt die Behauptung aus (b).

Beweis des Cartanschen Heftungslemmas.
(i) Wir wählen quaderförmige Umgebungen U_i von Q_i $(i = 1,2)$ mit in U relativ kompaktem Durchschnitt $U_o := U_1\cap U_2 \subset U$, und weisen nach, daß die Voraussetzung von Satz 10 erfüllt ist:

Sei $f \in \mathcal{B}(U_o)$.
Es gibt eine nur von der Koordinate z_1 abhängige beliebig oft differenzierbare beschränkte Funktion α mit $\alpha|(U_1\setminus U_o) = 1$ und $\alpha|(U_2\setminus U_o) = 0$. Wir setzen

$$\omega_1 = (\alpha-1)f$$

$$\omega_2 = \alpha f$$

ω_i ist dann auf U_i definiert und beschränkt und über U_o gilt

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}_1} \cdot f$$

$\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}_1} \cdot f$ kann zu einer beliebig oft differenzierbaren beschränkten Funktion β auf $U_1 \cup U_2$ fortgesetzt werden mit kompaktem Träger in der ersten Variablen. Mit

$$h(z,s) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\beta(\zeta,s)}{\zeta - z} \, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

gilt über $U_1 \cup U_2$ nach einem Hilfssatz in § 5:

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}_1} = \beta$$

Wir definieren

$$f_i = \omega_i - h, \quad i = 1,2$$

und erhalten

$$f = f_2 - f_1 \quad \text{über } U_o$$

und $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, denn

$$\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{z}_1} - \frac{\partial h}{\partial \bar{z}_1} = \beta - \beta = 0$$

und trivialerweise ist f_i partiell holomorph in den anderen Variablen.
Weiter gilt für $(a,s) \in U_1 \cup U_2$ mit positiven Konstanten K und M

$$|h(a,s)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \beta(a + re^{i\theta}, s) \, dr d\theta \right| \leq K \cdot \|\beta\| \leq K \cdot M \|f\|$$

also sind f_1 und f_2 beschränkte holomorphe Funktionen auf U_1 bzw. U_2.
(ii) Sei nun $A \in GL(k, \mathcal{O}(U))$. Nach Satz 13 gibt es $B \in GL(k, \mathcal{O}(\mathbb{C}^n))$ mit
(1) $\|1 - AB\|_{\overline{U}_o} < 1$, d.h. die Koeffizienten von AB sind aus $\mathcal{B}(U_o)$

(2) AB liegt in einer Umgebung der 1 im Sinne von Satz 10.
$\Rightarrow \exists\ A_1 \in GL(k, \mathcal{O}(U_1)),\ \tilde{A}_2 \in GL(k, \mathcal{O}(U_2))$ mit

$$AB = A_1 \cdot \tilde{A}_2^{-1} \text{ über } U_o,$$

d.h. mit $A_2 := B \cdot \tilde{A}_2 \in GL(k, \mathcal{O}(U_2))$

$$A = A_1 \cdot A_2^{-1}.$$