Komplexe Analysis mehrerer Veränderlichen

Vorlesung von Otto Forster
im Sommersemester 1973
an der Universität Regensburg

5. Das Lemma von Dolbeault

§ 5. Das Lemma von Dolbeault

$\mathcal{E}(U)$ bezeichne den Vektorraum der (beliebig oft reell) differenzierbaren komplexwertigen Funktionen in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}^n$.

$\mathcal{E}(U)$ ist Fréchetraum:

Sei $K_0 \underset{\circ}{\subset} K_1 \subset \dots$ eine Ausschöpfung von U durch kompakte Mengen, $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$, und seien

$$z_k = x_k + ix_{n+k} \qquad k = 1,\dots,n$$

die kanonischen Koordinaten in $\mathbb{C}^n$. Durch

$$p_{\nu\alpha}(f) := \sup_{z\in K_\nu} \left|(D^\alpha f)(z)\right| \qquad f \in \mathcal{E}(U),\ \nu \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{N}^{2n}$$

werden Seminormen auf $\mathcal{E}(U)$ definiert, und die abzählbare Familie $\{p_{\nu\alpha}\}_{\nu\in\mathbb{N},\alpha\in\mathbb{N}^{2n}}$ erzeugt auf $\mathcal{E}(U)$ eine Hausdorfftopologie,bzgl. der $\mathcal{E}(U)$ vollständig ist.

Weiter sei

$\mathcal{E}^{(r)}$:= Vektorraum aller Differentialformen vom Grad r mit differenzierbaren Koeffizienten in U, bestehend also aus den Elementen

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\dots<i_r\le 2n} a_{i_1\dots i_r}\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_r} \quad \text{mit } a_{i_1\dots i_r} \in \mathcal{E}(U).$$

$\mathcal{E}^{p,q}(U)$:= Vektorraum aller Differentialformen der Gestalt

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n}\ \sum_{1\le j_1<\dots<j_q\le n} a_{i_1\dots i_p j_1\dots j_q}\, dz_{i_1}\wedge\dots\wedge dz_{i_p}\wedge d\bar{z}_{j_1}\wedge\dots\wedge d\bar{z}_{j_q}$$

mit $a_{i_1\dots j_q} \in \mathcal{E}(U)$.

Dann gilt:

$$\mathcal{E}^r(U) = \bigoplus_{p+q=r} \mathcal{E}^{p,q}(U)$$

Wir erklären Ableitungen

$$d' : \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}^{1,0}(U) \text{ durch } d'(f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}\, dz_j$$

$$d'' : \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}^{0,1}(U) \text{ durch } d''(f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j$$

Das Differential einer Funktion $f \in \mathcal{E}(U)$ schreibt sich also als

$$df = d'f + d''f$$

und $f \in \mathcal{E}(U)$ ist genau dann holomorph, wenn $d''f = 0$.
Schreibt man abkürzend für $\omega \in \mathcal{E}^{p,q}(U)$

$$\omega = \sum_I \sum_J a_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J\ ,$$

so wird durch

$$d''\omega = \sum_I \sum_J d''a_{IJ} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

eine Abbildung

$$d'' : \mathcal{E}^{p,q}(U) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}(U)$$

definiert und es gilt für alle $\omega \in \mathcal{E}^{p,q}(U)$

$$(d''\circ d'')\omega = 0.$$

<u>Beweis.</u> $d''\omega = \sum_{I,J} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{IJ}}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$

$$d''(d''\omega) = \sum_{I,J} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a_{IJ}}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

$$= \sum_{I,J} \sum_{j=1}^n \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 a_{IJ}}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j} - \frac{\partial^2 a_{IJ}}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{z}_i}\right) d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = 0.$$

Schließlich sei

$\Omega^p(U)$:= Vektorraum der holomorphen Differentialformen vom Grad p in U mit Elementen der Gestalt

$$\omega = \sum_I a_I dz_I$$

wobei $a_I \in \mathcal{O}(U)$.

Offensichtlich gilt

$$\Omega^p(U) = \operatorname{Ker}(\mathcal{E}^{p,0}(U) \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{p,1}(U)).$$

<u>Satz 1.</u> Sei X ein offener Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$ (evtl. einige Radien $r_\nu = \infty$) und $X' \subset\subset X$ ein offener, konzentrischer Polyzylinder. Dann gibt es für $q \geq 1$ zu jeder Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{p,q}(X)$ mit $d''\omega = 0$ eine Differentialform $\sigma \in \mathcal{E}^{p,q-1}(X')$ mit

$$d''\sigma = \omega|X'.$$

<u>Hilfssatz.</u> Sei $U \subset \mathbb{C}^m$ eine offene Menge und

$$\varphi: \mathbb{C}\times U \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine (beliebig oft reell) differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger in der ersten Variablen. Dann ist durch

$$f(z,s) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta,s)}{\zeta-z}\, d\zeta\wedge d\bar\zeta$$

eine (beliebig oft reell) differenzierbare Funktion $f: \mathbb{C}\times U \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert, für die gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \varphi.$$

Zusatz: Hängt φ noch zusätzlich holomorph oder differenzierbar von s ab, so auch f.

<u>Beweis.</u> f ist sicher wohldefiniert (Übergang zu Polarkoordinaten) und erfüllt den Zusatz. f löst aber auch in jedem Punkt $(a,s) \in \mathbb{C}\times U$ die Differentialgleichung:

Translation der Integrationsvariablen ζ um z ergibt

$$f(z,s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \varphi(z+\zeta,s)\, \frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial f(z,s)}{\partial \bar z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\varphi(z+\zeta,s)}{\partial \bar z}\, \frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta}$$

Daraus ergibt sich, bei nochmaliger Translation der Integrationsvariablen und unter Verwendung des Satzes von Stokes

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a,s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta}(\zeta,s)\, \frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta-a} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{|\zeta-a|\geq\varepsilon} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta}(\zeta,s)\, \frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta-a}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{|\zeta-a|\geq\varepsilon} d\left(\frac{\varphi(\zeta,s)}{\zeta-a}\, d\zeta\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{|\zeta-a|=\varepsilon} \frac{\varphi(\zeta,s)}{\zeta-a}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_0^{2\pi} \varphi(a+\varepsilon e^{i\psi},s)\,d\psi = \varphi(a,s).$$

<u>Beweis von Satz 1.</u>

Sei $A_\nu(X) := \{\omega \in \mathcal{E}^{p,q}(X): \omega = \sum_I \sum_{J\leq\nu} a_{IJ}\, dz_I\wedge d\bar z_J\}$.

Dabei bedeute $J \leq \nu$, daß für alle $(j_1,\dots,j_q) \in J$ gilt: $j_s \leq \nu$, $s = 1,\dots,q$.

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über ν.
$\nu = 0 \Rightarrow \omega = 0$, da $q \geq 1$. Man setze $\sigma = 0$.
Sei nun X'' ein offener, konzentrischer Polyzylinder mit $X' \subset\subset X'' \subset\subset X$, $\omega \in A_\nu(X)$ und die Aussage für $\nu-1$ schon bewiesen.

$$\omega = \sum_I \sum_{J \leq \nu} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

$$= d\bar{z}_\nu \wedge \alpha + \beta$$

wobei $\alpha = \sum_I \sum_{J \leq \nu-1} a_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ und $\beta \in A_{\nu-1}(X)$.

$$d''\omega = \sum_I \sum_{J \leq \nu} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_m} d\bar{z}_m \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = 0,$$

also $\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_m} = 0$ für $m > \nu$.
Da die a_{IJ} bis auf Vorzeichen mit gewissen Koeffizienten $f_{I'J'}$ von ω übereinstimmen, gibt es nach dem Hilfssatz in $z_{\nu+1},\dots,z_n$ holomorphe Funktionen

$$c_{IJ} \in \mathcal{E}(X'') \text{ mit } \frac{\partial c_{IJ}}{\partial \bar{z}_\nu} = a_{IJ}|X''.$$

Für $\gamma := \sum_I \sum_{J \leq \nu-1} c_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ gilt:

$$d''\gamma = \sum_I \sum_{J \leq \nu-1} \sum_{m=1}^{\nu} \frac{\partial c_{IJ}}{\partial \bar{z}_m} d\bar{z}_m \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J = d\bar{z}_\nu \wedge \alpha + \delta \ ,$$

wobei $\delta \in A_{\nu-1}(X'')$.
Es folgt

$$\omega - d''\gamma = \beta - \delta \in A_{\nu-1}(X'').$$

Nach I.V. gibt es ein

$$\eta \in \mathcal{E}^{p,q-1}(X') \text{ mit } d''\eta = \beta - \delta.$$

Also erhält man mit $\sigma = \gamma + \eta \in \mathcal{E}^{p,q-1}(X')$ über X':

$$\omega = d''\sigma.$$

<u>Satz 2</u> (Dolbeaultsches Lemma [8]).
Sei X ein offener Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$. Dann ist

$$0 \longrightarrow \Omega^p(X) \hookrightarrow \mathcal{E}^{p,0}(X) \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{p,1}(X) \xrightarrow{d''} \dots$$

eine exakte Sequenz (von Vektorräumen).

<u>Beweis.</u> Da $\Omega^p(X) = \mathrm{Ker}(\mathcal{E}^{p,0}(X) \xrightarrow{d''} \mathcal{E}^{p,1}(X))$ ist noch zu zeigen:
Zu jedem $\omega \in \mathcal{E}^{p,q}(X)$, $q \geq 1$, mit $d''\omega = 0$ existiert ein $\sigma \in \mathcal{E}^{p,q-1}(X)$ mit $d''\sigma = \omega$.
Beweis mithilfe des Mittag-Lefflerschen Ausschöpfungsprinzips.
Sei $X_0 \subset\subset X_1 \subset\subset X_2 \subset\subset \dots$ Ausschöpfung von X durch offene, konzentrische Polyzylinder und sei

$$M_i := \{\sigma \in \mathcal{E}^{p,q-1}(X_i) : d''\sigma = \omega|X_i\}$$

sowie $\rho_i : M_i \longrightarrow M_{i-1}$ die gewöhnliche Beschränkungsabbildung.
Für den Rest des Beweises seien $\sigma_i \in M_i$ festgewählt.
Induktion über q:
<u>$q = 1$:</u> Sind $\sigma', \sigma'' \in M_i$, so folgt $\sigma' - \sigma'' \in \Omega^p(X_i)$. Also ist die Abbildung

$$\psi_i : \Omega^p(X_i) \longrightarrow M_i$$
$$\eta \longmapsto \eta + \sigma_i$$

surjektiv.
Wir definieren: $\tau_i : \Omega^p(X_i) \longmapsto \Omega^p(X_{i-1})$

$$\eta \longmapsto \eta + (\sigma_i - \sigma_{i-1})$$

τ_i ist stetig und hat dichtes Bild (ist $\sigma \in \Omega^p(X_{i-1})$, so wähle man Taylorpolynome der Koeffizienten von $\sigma - (\sigma_i - \sigma_{i-1})$ als Urbilder).
Auch ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\Omega^p(X_i) \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & \Omega^p(X_{i-1}) \arrow[d, "\psi_{i-1}"] \\
M_i \arrow[r, "\rho_i"] & M_{i-1}
\end{tikzcd}$$

Die Familie $(\Omega^p(X_i),\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzungen des Mittag-Lefflerschen Induktionsprinzips, also gibt es $\eta_i \in \Omega^p(X_i)$ mit $\tau_i(\eta_i) = \eta_{i-1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Wir setzen: $\tilde{\sigma}_i := \psi_i(\eta_i) = \eta_i+\sigma_i$.
Dann gilt $\tilde{\sigma}_i|X_{i-1} = \rho_i\tilde{\sigma}_i = \psi_i\rho_i(\eta_i) = \psi_{i-1}\tau_i(\eta_i) = \psi_{i-1}(\eta_{i-1}) = \tilde{\sigma}_{i-1}$
Also existiert ein $\sigma \in \mathcal{E}^{p,0}(X)$ mit $\sigma|X_i = \tilde{\sigma}_i$ und $d''\sigma = \omega$.

<u>$q \geq 2$:</u> $\sigma',\sigma'' \in M_i \Rightarrow d''(\sigma'-\sigma'') = 0 \overset{\text{I.V.}}{\Rightarrow} \exists\, \eta \in \mathcal{E}^{p,q-2}(X_i)\colon d''\eta = \sigma'-\sigma''$.
Daher ist die Abbildung

$$\psi_i\colon \mathcal{E}^{p,q-2}(X_i) \longrightarrow M_i$$
$$\eta \longmapsto d''\eta+\sigma_i$$

surjektiv.
Wir definieren $\tau_i\colon \mathcal{E}^{p,q-2}(X_i) \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q-2}(X_{i-1})$

$$\eta \longmapsto \eta+\gamma_{i-1}$$

wobei $d''\gamma_{i-1} = \sigma_i-\sigma_{i-1}$.
τ_i ist stetig mit dichtem Bild (das folgt daraus, daß es zu jeder kompakten Menge $K \subset X_{i-1}$ eine Funktion $s \in \mathcal{E}(X_i)$ gibt mit $\operatorname{supp} s \subset X_{i-1}$ und $s = 1$ auf K).
Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}^{p,q-2}(X_i) \arrow[r, "\tau_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & \mathcal{E}^{p,q-2}(X_{i-1}) \arrow[d, "\psi_{i-1}"] \\
M_i \arrow[r, "\rho_i"] & M_{i-1}
\end{tikzcd}$$

Wieder gibt es also nach dem Mittag-Lefflerschen Ausschöpfungsprinzip ein $\eta_i \in \mathcal{E}^{p,q-2}(X_i)$ mit $\tau_i(\eta_i) = \eta_{i-1}$ für alle i, also
$\sigma_i+d''\eta_i|X_{i-1} = \rho_i\psi_i(\eta_i) = \psi_{i-1}\tau_i(\eta_i) = \psi_{i-1}(\eta_{i-1}) = \sigma_{i-1}+d''\eta_{i-1}$.

Sei $\sigma \in \mathcal{E}^{p,q-1}(X)$ die Differentialform mit

$$\sigma|X_i = \sigma_i + d''\eta_i.$$

Dann gilt $d''\sigma = \omega$.

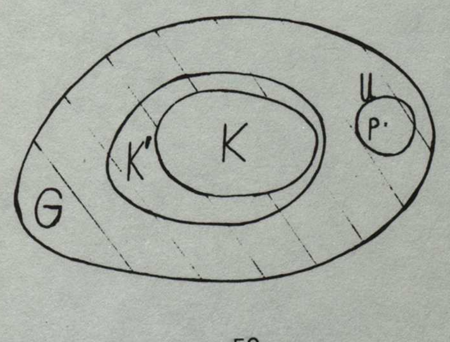
<u>Satz 3.</u> Sei $\alpha \in \mathcal{E}^{0,1}(\mathbb{C}^n)$, $n \geq 2$, mit $d''\alpha = 0$ und kompakten Träger. Dann gibt es eine Differentialform $\beta \in \mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$ mit kompakten Träger und $d''\beta = \alpha$.

<u>Beweis.</u> Nach Satz 2 existiert ein $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$ mit $d''\gamma = \alpha$. Sei $K = \operatorname{supp} \alpha$. Dann ist γ holomorph in $\mathbb{C}^n \setminus K$. Nach Cor. 1, Satz 3, § 3 gibt es eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ mit $g = \gamma$ außerhalb eines K umfassenden abgeschlossenen Polyzylinders P.
Sei $\beta := \gamma-g$. Dann ist $\beta \in \mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$ mit $\operatorname{supp} \beta \subset P$ und $d''\beta = \alpha$.

<u>Bemerkung.</u> Der Satz ist falsch in $\mathbb{C}$.

<u>Satz 4</u> (Hartogs).
Sei $G \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, ein Gebiet und $K \subset G$ eine kompakte Teilmenge, so daß $G \setminus K$ zusammenhängt. Dann läßt sich jede in $G \setminus K$ holomorphe Funktion holomorph nach G fortsetzen.

<u>Beweis.</u> Sei $f \in \mathcal{O}(G \setminus K)$. Man wähle eine kompakte Teilmenge $K' \subset G$ mit $K \subset \mathring{K}' \subset K' \subset G$.



$f|G\setminus K'$ läßt sich fortsetzen zu einem Element $g \in \mathcal{E}(G)$. Da

$$d''g = d''f = 0 \text{ auf } G\setminus K',$$

folgt $d''g \in \mathcal{E}^{0,1}(\mathbb{C}^n)$, indem man $d''g$ durch Null auf $\mathbb{C}^n\setminus G$ fortsetzt. Nach Satz 3 existiert ein $\beta \in \mathcal{E}(\mathbb{C}^n)$ mit kompakten Träger P und

$$d''\beta = d''g.$$

Daher ist

$$F := g - \beta$$

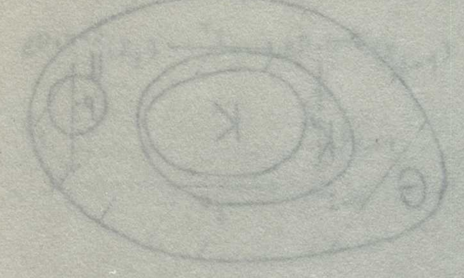
holomorph in G und

$$F|(G\setminus K) = f,$$

Beweis. Die Funktion β ist holomorph in $\mathbb{C}^n\setminus K'$.
Da $\beta = 0$ auf $\mathbb{C}^n\setminus P$, gibt es wegen des Identitätssatzes einen Punkt $p \in G\setminus K'$ mit einer offenen Umgebung $U \subset G\setminus K'$, so daß $\beta|U = 0$.
Daraus folgt

$$F|U = g|U = f|U.$$

Da $G\setminus K$ zusammenhängt, folgt wiederum nach dem Identitätssatz: $F = f$ auf $G\setminus K$.



§ 6. Komplexe Mannigfaltigkeiten

Definition. Es sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{T}$ das System der offenen Mengen in X. Eine Prägarbe von Gruppen auf X ist ein Paar $(\mathcal{F},\rho)$, bestehend aus

i) einer Familie $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U\in\mathfrak{T}}$ von Gruppen mit $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$,
ii) einer Familie $\rho = (\rho^U_V)_{U,V\in\mathfrak{T},V\subset U}$ von "Beschränkungs"-Homomorphismen $\rho^U_V: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ mit

$$\rho^U_U = id_{\mathcal{F}(U)},\ \rho^U_W = \rho^V_W \circ \rho^U_V \text{ für } W \subset V \subset U \text{ aus } \mathfrak{T}.$$

Man schreibt meist $\mathcal{F}$ statt $(\mathcal{F},\rho)$.
Analog sind Prägarben von Ringen, Vektorräumen, Algebren ... definiert.

Definition. Eine Prägarbe $(\mathcal{F},\rho)$ auf X heißt Garbe, wenn folgende Axiome erfüllt sind:
Seien $U_i \in \mathfrak{T}$, $(i \in I)$, und $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann gilt

(I) Sind $f,g \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho^U_{U_i}(f) = \rho^U_{U_i}(g)$, $i \in I$, so folgt $f = g$

(II) Sind $f_i \in \mathcal{F}(U_i)(i \in I)$ mit $\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(f_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(f_j)$ für alle $i,j \in I$, dann existiert ein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho^U_{U_i}(f) = f_i$ $(i \in I)$.

Bemerkung. Wegen (I) ist dieses f eindeutig bestimmt.

Beispiele.
a) Sei X ein topologischer Raum
$\mathcal{C}$, die Garbe der stetigen (komplexwertigen) Funktionen ist eine Garbe von Ringen mit $\mathcal{C}(U)$ = Ring der stetigen Funktionen $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ und den gewöhnlichen Beschränkungsabbildung $\rho^U_V: \mathcal{C}(U) \longrightarrow \mathcal{C}(V)$.
b) Sei wieder X ein topologischer Raum, $\mathcal{B}(U)$ = Ring der beschränkten stetigen Funktionen $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$. Die so erhaltene Prägarbe $\mathcal{B}$ von Ringen erfüllt i.a. nicht Garbenaxiom II.