5. Zahlentheoretische Funktionen

5.1. Definition. Unter einer zahlentheoretischen (oder arithmetischen) Funktion versteht man eine Abbildung $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$.
Die Funktion $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ heißt *multiplikativ*, wenn $f(1) = 1$ und

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}_1 \text{ mit } \gcd(m, n) = 1.$$

Eine multiplikative Funktion $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ heißt *vollständig multiplikativ*, wenn $f(mn) = f(m)f(n)$ ohne Einschränkung gilt.

Bemerkung. Eine multiplikative zahlentheoretische Funktion $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ ist durch ihre Werte auf den Primzahlpotenzen eindeutig bestimmt. Denn aus $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ folgt

$$f(n) = f(p_1^{k_1}) \cdot \ldots \cdot f(p_r^{k_r}).$$

Ist f vollständig multiplikativ, so genügt es schon, die Werte auf den Primzahlen zu kennen, denn dann ist $f(p^k) = f(p)^k$.

5.2. Beispiele

Für viele zahlentheoretische Funktionen liegen die Werte bereits in $\mathbb{Z}$ oder in $\mathbb{R}$.

a) Die Funktion

$$\mathbb{1} : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Z}, \quad \mathbb{1}(n) := 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_1$$

ist offenbar vollständig multiplikativ.

b) Die Abbildung

$$\iota : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Z}, \quad \iota(n) := n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_1$$

ist ebenfalls vollständig multiplikativ.

c) Die sog. Mangoldtsche Funktion $\Lambda : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & \text{falls } n = p^k \text{ eine Primzahlpotenz ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht multiplikativ.

d) Ein Beispiel einer multiplikativen, aber nicht vollständig multiplikativen Funktion wird durch die Eulersche Phi-Funktion gegeben.

5.3. Satz. *Die Eulersche Phi-Funktion $\varphi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Z}$ ist multiplikativ, aber nicht vollständig multiplikativ.*

Beweis. Nach Definition gilt $\varphi(m) = \#(\mathbb{Z}/m)^*$. Ist $m = m_1 m_2$ mit teilerfremden m_1, m_2, so hat man nach dem Chinesischen Restsatz die Isomorphie

$$(\mathbb{Z}/m)^* \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/m_1)^* \times (\mathbb{Z}/m_2)^*,$$

woraus folgt $\varphi(m_1 m_2) = \varphi(m_1)\varphi(m_2)$.

Dass φ nicht vollständig multiplikativ ist, sieht man an folgendem Beispiel: Es ist $\varphi(2) = 1$ und $\varphi(4) = 2$, denn

$$(\mathbb{Z}/2)^* = \{\overline{1}\}, \qquad (\mathbb{Z}/4)^* = \{\overline{1}, \overline{3}\}.$$

Also ist $\varphi(2 \cdot 2) \neq \varphi(2)\varphi(2)$, q.e.d.

Mit Satz 5.3 kann man eine Formel für $\varphi(m)$ mithilfe der Primfaktor-Zerlegung von n aufstellen. Für eine Primzahlpotenz p^k ist $\varphi(p^k)$ die Anzahl der Zahlen aus $M := \{1, 2, \ldots, p^k\}$, die zu p^k teilerfremd, d.h. nicht durch p teilbar sind. Es sind aber genau $p^k/p = p^{k-1}$ Elemente aus M durch p teilbar, also

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$

Hat n die Primfaktor-Zerlegung $n = \prod_{j=1}^r p_j^{k_j}$, so folgt

$$\varphi(n) = \prod_j \varphi(p_j^{k_j}) = \prod_j p_j^{k_j}\Big(1 - \frac{1}{p_j}\Big) = n\prod_j \Big(1 - \frac{1}{p_j}\Big),$$

also

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big),$$

wobei p alle Primteiler von n durchläuft.

5.4. Summatorische Funktion. Ist $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion, so definiert man die *summatorische Funktion* $F : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ von f durch

$$F(n) := \sum_{d|n} f(d).$$

Dabei wird über alle positiven Teiler d von n summiert, einschließlich 1 und n.

Z.B. ist

$$F(6) = f(1) + f(2) + f(3) + f(6).$$

Für jede Primzahl p gilt

$$F(p) = f(1) + f(p).$$

5.5. Satz (Summatorische Funktion der Eulerschen Phi-Funktion). *Für alle $n \in \mathbb{N}_1$ gilt*

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Dies lässt sich auch so ausdrücken: Die summatorische Funktion von φ ist die Funktion ι aus Beispiel 5.2b).

Beweis. Sei $M_n := \{1, 2, \ldots, n\}$. Für einen Teiler $d \mid n$ setzen wir

$$A_n(d) := \{k \in M_n : \gcd(k, n) = d\}.$$

Offenbar gilt

$$M_n = \dot{\bigcup_{d|n}} A_n(d) \qquad \text{(disjunkte Vereinigung)},$$

$\varphi(n) := \#A_n(1)$ und $\#A_n(d) = \#A_{n/d}(1) = \varphi(n/d)$, denn die

$$A_n(d) \longrightarrow A_{n/d}(1), \quad k \mapsto n/d,$$

ist bijektiv. Also folgt

$$n = \sum_{d|n} \varphi(n/d) = \sum_{d|n} \varphi(d),$$

denn durchläuft d alle Teiler von n, so durchläuft auch n/d alle Teiler von n. Damit ist Satz 5.5 bewiesen.

5.6. Satz. *Sei $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ eine multiplikative zahlentheoretische Funktion und $F : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ ihre summatorische Funktion. Dann ist auch F multiplikativ.*

Beweis. Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_1$ teilerfremd. Dann lässt sich jeder Teiler $d \mid m_1 m_2$ eindeutig zerlegen als $d = d_1 d_2$ mit $d_1 \mid m_1$ und $d_2 \mid m_2$. Damit folgt

$$\begin{aligned} F(m_1 m_2) &= \sum_{d|m_1 m_2} f(d) \\ &= \sum_{d_1|m_1} \sum_{d_2|m_2} f(d_1 d_2) = \sum_{d_1|m_1} \sum_{d_2|m_2} f(d_1) f(d_2) \\ &= \sum_{d_1|m_1} f(d_1) \sum_{d_2|m_2} f(d_2) = F(m_1) F(m_2), \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

5.7. Teileranzahl und Teilersumme. Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_1$ bezeichne $\tau(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n (einschließlich 1 und n). Dies lässt sich auch so ausdrücken:

$$\tau(n) := \sum_{d|n} 1.$$

Das bedeutet, dass τ die summatorische Funktion der Funktion $\mathbb{1}(n) = 1$ für alle n aus Beispiel 5.2a) ist. Da $\mathbb{1}$ multiplikativ ist, ist nach Satz 5.6 auch τ multiplikativ.

Mit $\sigma(n)$ sei die Summe aller Teiler von n bezeichnet, d.h.

$$\sigma(n) := \sum_{d|n} d.$$

Also ist σ die summatorische Funktion der Funktion $\iota(n) = n$ für alle n aus Beispiel 5.2b). Da ι multiplikativ ist, ist auch σ multiplikativ.

Aus der Multiplikativität lassen sich einfach Formeln für $\tau(n)$ und $\sigma(n)$ herleiten. Eine Primzahlpotenz p^k hat genau $k+1$ Teiler, nämlich $1, p, \ldots, p^k$. Daraus folgt

$$\tau(p^k) = k + 1$$

und

$$\sigma(p^k) = \sum_{i=0}^{k} p^i = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

Daraus folgt für $n = \prod_{j=1}^{r} p_j^{k_j}$

$$\tau(n) = \prod_{j=1}^{r} (k_j + 1) \quad \text{und} \quad \sigma(n) = \prod_{j=1}^{r} \frac{p_j^{k_j+1} - 1}{p_j - 1}.$$

5.8. Mersennesche Primzahlen, vollkommene Zahlen

Es ist leicht zu sehen, dass eine Zahl der Gestalt $M = 2^n - 1$ höchstens dann prim ist, wenn der Exponent n prim ist, denn $2^{k\ell} - 1$ ist durch $2^k - 1$ teilbar. Die Zahlen

$$M_p := 2^p - 1, \quad p \text{ prim},$$

heißen *Mersennesche Zahlen*. Sie sind nicht alle prim. Die ersten Mersenneschen Primzahlen sind

$$\begin{aligned} M_2 &= 2^2 - 1 = 3, \\ M_3 &= 2^3 - 1 = 7, \\ M_5 &= 2^5 - 1 = 31, \\ M_7 &= 2^7 - 1 = 127, \\ M_{13} &= 2^{13} - 1 = 8191, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{17} &= 2^{17} - 1 = 131071, \\ M_{19} &= 2^{19} - 1 = 524287, \\ M_{31} &= 2^{31} - 1 = 2147483647. \end{aligned}$$

Dagegen sind

$$\begin{aligned} M_{11} &= 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89, \\ M_{23} &= 2^{23} - 1 = 8388607 = 47 \cdot 178481, \\ M_{29} &= 2^{29} - 1 = 536870911 = 233 \cdot 1103 \cdot 2089 \end{aligned}$$

zusammengesetzt.

Eine Zahl $n \in \mathbb{N}_1$ heißt *vollkommen*, falls $\sigma(n) = 2n$. Dies lässt sich auch so ausdrücken: Bezeichnet

$$\sigma'(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d<n}} d = \sigma(n) - n$$

die Summe der *echten* Teiler von n, so ist eine vollkommene Zahl n dadurch charakterisiert, dass $\sigma'(n) = n$. Die kleinsten vollkommenen Zahlen sind

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3, \\ 28 &= 2^2 \cdot 7 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14, \\ 496 &= 2^4 \cdot 31 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248. \end{aligned}$$

Die vollkommenen Zahlen hängen eng mit den Mersenneschen Primzahlen zusammen. Schon Euklid bewies:

Ist $M_p = 2^p - 1$ prim, so ist $N := 2^{p-1}M_p$ vollkommen.

Denn nach 5.7 ist $\sigma(2^{p-1}) = 2^p - 1$, und da M_p prim ist, $\sigma(M_p) = M_p + 1 = 2^p$. Also $\sigma(N) = \sigma(2^{p-1})\sigma(M_p) = (2^p - 1)2^p = 2N$.

Die obigen Beispiele vollkommener Zahlen entsprechen den Mersenneschen Primzahlen $M_2 = 3$, $M_3 = 7$ und $M_5 = 31$. Zumindest alle geraden vollkommenen Zahlen lassen sich nach dem folgenden Satz von Euler so aus Mersenneschen Primzahlen gewinnen. Ob es ungerade vollkommene Zahlen gibt, ist unbekannt.

5.9. Satz (Euler). *Eine gerade Zahl $N > 1$ ist genau dann vollkommen, wenn sich N schreiben lässt als*

$$N := 2^{p-1}(2^p - 1),$$

wobei $M_p = 2^p - 1$ eine Mersennesche Primzahl ist.

Beweis. Wir brauchen nur noch die Notwendigkeit der Bedingung zu zeigen.

Sei also N eine gerade vollkommene Zahl. Sie lässt sich scheiben als $N = 2^\nu M$ mit einer ungeraden Zahl M und $\nu \geqslant 1$. Wegen $\sigma(N) = \sigma(2^\nu)\sigma(M) = 2N$ gilt

$$(*) \qquad (2^{\nu+1} - 1)\sigma(M) = 2^{\nu+1}M,$$

also $2^{\nu+1} \mid \sigma(M)$, d.h. $\sigma(M) = 2^{\nu+1}m$ mit einer ganzen Zahl $m \geqslant 1$. Setzt man dies in $(*)$ ein, erhält man $M = (2^{\nu+1} - 1)m = 2^{\nu+1}m - m$ und

$$\sigma(M) = 2^{\nu+1}m = M + m.$$

Da M und m Teiler von M sind, folgt dass M und m die einzigen Teiler von M sind. Daher gilt $m = 1$ und $M = 2^{\nu+1} - 1$ ist eine Primzahl, also eine Mersennesche Primzahl, insbesondere ist $\nu + 1 =: p$ prim. Also hat $N = 2^\nu(2^{\nu+1} - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1)$ die behauptete Form.

5.10. Die Möbius-Funktion

Eine Zahl $n \in \mathbb{N}_1$ heißt *quadratfrei*, wenn n von keiner Quadratzahl > 1 geteilt wird, d.h. wenn es keine Primzahl p mit $p^2 \mid n$ gibt. Die Möbius-Funktion $\mu : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Z}$ wird nun definiert durch

$$\mu(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ nicht quadratfrei,} \\ (-1)^r, & \text{falls } n \text{ quadratfrei und } r \text{ verschiedene Primteiler hat.} \end{cases}$$

Für $n \leqslant 14$ ergeben sich folgende Werte

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mu(n)$	1	−1	−1	0	−1	1	−1	0	0	1	−1	0	−1	1

Es folgt unmittelbar aus der Definition, dass μ multiplikativ ist.

5.11. Satz (Summatorische Funktion der Möbius-Funktion).

$$\sum_{d|n} \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies lässt sich auch so ausdrücken: Die summatorische Funktion von μ ist die Funktion $\delta_1 : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{Z}$ mit

$$\delta_1(n) := \delta_{1n} := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Wir setzen $S(n) := \sum_{d|n} \mu(n)$. Es ist also zu zeigen, dass die Funktionen S und δ_1 übereinstimmen. δ_1 ist offensichtlich multiplikativ, ebenso S als summatorische Funktion der multiplikativen Funktion μ. Daher genügt es,

$$S(p^k) = \delta_1(p^k) \quad \text{für Primzahlpotenzen } p^k$$

zu beweisen. Der Fall $k = 0$ ist trivial. Für $k \geqslant 1$ ist

$$S(p^k) = \sum_{i=0}^{k} \mu(p^i) = \mu(1) + \mu(p) = 1 - 1 = 0 = \delta_1(p^k), \quad \text{q.e.d.}$$

Eine interessante Anwendung der Möbiusschen μ-Funktion wird durch folgenden Satz gegeben.

5.12. Satz (Möbiusscher Umkehrsatz). *Sei $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion und*

$$F(n) := \sum_{d|n} f(d)$$

ihre summatorische Funktion. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_1$

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\Big(\frac{n}{d}\Big) = \sum_{d|n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) F(d).$$

Beweis. Dass die beiden Summen in der letzten Formel gleich sind, folgt wieder aus der Tatsache, dass wenn d alle Teiler von n durchläuft, auch n/d alle Teiler von n durchläuft. Wir berechnen nun die Summe

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \mu(d) F\Big(\frac{n}{d}\Big) &= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{\ell|(n/d)} f(\ell) = \sum_{\substack{d,\ell \\ d\ell|n}} \mu(d) f(\ell) \\ &= \sum_{\ell|n} f(\ell) \sum_{d|(n/\ell)} \mu(d) = \sum_{\ell|n} f(\ell)\delta_1\Big(\frac{n}{\ell}\Big) = f(n), \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Beispiele. a) Die Teileranzahl-Funktion $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ ist summatorische Funktion der konstanten Funktion $\mathbb{1}(n) = 1$. Also gilt

$$\sum_{d|n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) \tau(d) = 1.$$

b) Die Teilersummen-Funktion $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ ist summatorische Funktion der Funktion $\iota(n) = n$. Daraus folgt

$$\sum_{d|n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) \sigma(d) = n.$$

c) Für die Eulersche Phi-Funktion haben wir in Satz 5.5 bewiesen

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Daraus folgt

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d}.$$

Dies lässt sich so umformen:

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Vergleich mit der in 5.5 bewiesenen Formel $\varphi(n) = n\prod_{p|n}(1-1/p)$ ergibt

$$\prod_{p|n}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) = \sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d},$$

wobei auf der linken Seite das Produkt über alle Primteiler von n zu nehmen ist, während auf der rechten Seite über alle Teiler von n summiert wird.

5.13. Dirichlet-Faltung. Sind $f, g : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ zwei zahlentheoretische Funktionen, so definiert man ihre Dirichlet-Faltung $f * g : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ durch

$$(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\Big(\frac{n}{d}\Big) = \sum_{d|n} f\Big(\frac{n}{d}\Big)g(d) = \sum_{\substack{k,\ell\\ k\ell=n}} f(k)g(\ell).$$

Beispiele. Ist $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion, so kann man ihre summatorische Funktion

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

als Faltung von f mit der konstanten Funktion $\mathbb{1}(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_1$ auffassen,

$$F = f * \mathbb{1}.$$

Insbesondere ergibt sich für die Teileranzahl-Funktion $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ die Darstellung

$$\tau = \mathbb{1} * \mathbb{1}.$$

Die Formel des Möbiusschen Umkehrsatzes

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F\Big(\frac{n}{d}\Big)$$

lässt sich mit der Dirichlet-Faltung einfach schreiben als

$$f = \mu * F.$$

5.14. Satz. *Die Dirichlet-Faltung ist eine kommutative und assoziative Verknüpfung auf der Menge aller zahlentheoretischen Funktionen $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$. Die Funktion $\delta_1 : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$,*

$$\delta_1(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist ein Eins-Element für die Dirichlet-Faltung.

Beweis. a) Die Kommutativität $f * g = g * f$ ist klar.

b) Zur Assoziativität: Seien $f, g, h : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ drei zahlentheoretische Funktionen. Dann ist

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(n) &= \sum_{\substack{k,\ell \\ k\ell = n}} (f * g)(k) h(\ell) = \sum_{\substack{k,\ell \\ k\ell = n}} \sum_{\substack{i,j \\ ij = k}} f(i)g(j)h(\ell) \\ &= \sum_{\substack{i,j,\ell \\ ij\ell = n}} f(i)g(j)h(\ell). \end{aligned}$$

Andrerseits gilt

$$\begin{aligned} (f * (g * h))(n) &= ((g * h) * f)(n) = \sum_{\substack{i,j,\ell \\ ij\ell = n}} g(i)h(j)f(\ell) \\ &= \sum_{\substack{i,j,\ell \\ ij\ell = n}} g(j)h(\ell)f(i) = ((f * g) * h)(n), \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

c) Einselement:

$$(\delta_1 * f)(n) = \sum_{d|n} \delta_1(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \delta_1(1) f\left(\frac{n}{1}\right) = f(n),$$

d.h. $\delta_1 * f = f$. Damit ist Satz 5.14 bewiesen.

Anwendung. Mit der Dirichlet-Faltung erhalten wir einen neuen Beweis des Möbiusschen Umkehrsatzes: Sei f eine zahlentheoretische Funktion mit summatorischer Funktion $F = f * \mathbb{1}$. Multiplizieren wir diese Gleichung (bzgl. der Dirichlet-Faltung) mit der Möbius-Funktion μ, erhalten wir wegen $\mu * \mathbb{1} = \delta_1$ (Satz 5.11)

$$F * \mu = (f * \mathbb{1}) * \mu = f * (\mathbb{1} * \mu) = f * \delta_1 = f,$$

d.h. den Umkehrsatz $f = F * \mu$.

Aus $f = F * \mu$ lässt sich umgekehrt durch Multiplikation mit der Funktion $\mathbb{1}$ wieder $F = f * \mathbb{1}$ herleiten.

5.15. Dirichlet-Reihen. Jeder zahlentheoretischen Funktion $a : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ kann eine sog. Dirichlet-Reihe

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

zugeordnet werden. Dies ist zunächst nur eine formale Reihe. Falls aber die Koeffizienten $a(n)$ einer Abschätzung der Form

$$|a(n)| \leqslant Cn^\alpha \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_1$$

mit Konstanten $C \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$, genügen, konvergiert die Reihe $F(s)$ absolut für alle reellen $s > \sigma_0 := \alpha + 1$, denn mit $\varepsilon := s - \sigma_0 > 0$ gilt

$$\left|\frac{a(n)}{n^s}\right| \leqslant C\frac{n^\alpha}{n^s} = \frac{C}{n^{1+\varepsilon}},$$

und bekanntlich konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$.

Ein ähnliches Argument zeigt, dass die Reihe sogar für jedes $\sigma_1 > \sigma_0$ auf dem Intervall $[\sigma_1, \infty[\subset \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, also eine auf dem Intervall $]\sigma_0, \infty[$ stetige Funktion darstellt.

Beispiel. Für die konstante Funktion $u(n) = 1$ entsteht die Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Die Reihe konvergiert für alle $s > 1$.

Bemerkung. In der analytischen Zahlentheorie betrachtet man die Zetafunktion auch für komplexe Argumente s. In dieser Vorlesung beschränken wir uns jedoch auf reelle Argumente.

5.16. Dirichlet-Reihen und Dirichlet-Faltung. Seien $a, b : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{C}$ zwei zahlentheoretische Funktionen und

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \qquad G(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}$$

ihre zugeordneten Dirichlet-Reihen. Wir setzen voraus, dass beide Reihen für $s > \sigma_0$ absolut konvergieren. Wegen der absoluten Konvergenz darf man beide Reihen gliedweise multiplizieren.

$$F(s)G(s) = \sum_k \frac{a(k)}{k^s} \sum_\ell \frac{b(\ell)}{\ell^s} = \sum_{k,\ell} \frac{a(k)b(\ell)}{(k\ell)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k\ell=n} a(k)b(\ell) \Big) \frac{1}{n^s}.$$

Es folgt also

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a*b)(n)}{n^s}.$$

Das Produkt der a und b zugeordneten Dirichlet-Reihen gehört also zum Faltungs-Produkt von a und b.

Beispiele. a) Wir haben gesehen, dass sich die Teileranzahl-Funktion τ als Faltung der konstanten Funktion $\mathbb{1}$ mit sich selbst schreiben lässt, $\tau = \mathbb{1} * \mathbb{1}$. Daraus folgt

$$\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \qquad \text{für } s > 1.$$

b) Aus der Gleichung $\mathbb{1} * \mu = \delta_1$ folgt

$$\zeta(s)\Big(\sum_n \frac{\mu(n)}{n^s}\Big) = \sum_n \frac{\delta_1(n)}{n^s} = 1,$$

also

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \qquad \text{für } s > 1.$$