Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2019/20
5. Feb. 2020

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Klausur

Aufgabe 1

Sei $\Lambda := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \subset \mathbb{C}$ das Quadrat-Gitter. Für die Weierstraßsche $\wp$-Funktion $\wp_\Lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$ zum Gitter Λ zeige man

$$\wp_\Lambda(iz) = -\wp_\Lambda(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 2

Sei $C \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ die algebraische Kurve, deren afffiner Teil durch die Gleichung

$$C_{\text{aff}} : \, Y^2 = X^4 - 1$$

gegeben wird.

a) Man berechne den Schnitt von C mit der unendlich fernen Geraden.

b) Man bestimme alle singulären Punkte von C.

Aufgabe 3

Sei Λ das Gitter $\Lambda := \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot 2i$. Weiter seien folgende Punkte gegeben:

$$Q_1 := 0, \quad Q_2 := \tfrac{1}{2} + i, \quad P_1 := \tfrac{1}{3} + i.$$

Man beweise: Es gibt eine bzgl. Λ doppelt-periodische meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}_1$, die modulo Λ genau in den Punkten Q_1 und Q_2 Pole erster Ordnung hat und in P_1 sowie einem weiteren Punkt P_2 Nullstellen erster Ordnung.
Man berechne den Punkt P_2. Ist er (modulo Λ) eindeutig bestimmt?

Aufgabe 4

Welche der folgenden Gitter besitzen komplexe Multiplikation?

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &:= \mathbb{Z} \cdot (1+i) \ + \ \mathbb{Z} \cdot (2+i), \\
\Lambda_2 &:= \mathbb{Z} \cdot (1+i\sqrt{2}) \ + \ \mathbb{Z} \cdot (2+i\sqrt{2}), \\
\Lambda_3 &:= \mathbb{Z} \cdot (1+\sqrt{2}) \ + \ \mathbb{Z} \cdot i.
\end{aligned}$$

Die Antwort ist zu begründen.
