Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2019/20
31. Jan. 2020

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Blatt 11, Lösungen

Aufgabe 41

Sei $\tau := \frac{i\sqrt{2}}{3}$ und $\Lambda := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Man berechne den Endomorphismenring $\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ und zeige, dass er nicht die Maximalordnung in seinem Quotientenkörper ist.

Lösungsvorschlag

τ erzeugt den imaginär-quadratischen Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\frac{i\sqrt{2}}{3}) = \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$. Da $-2 \equiv 2 \bmod 4$, ist nach Vorlesung die Maximalordnung von K gleich

$$R := \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot i\sqrt{2}.$$

Der Endomorphismenring ist jedenfalls ein Unterring von R. Wir untersuchen also, welche Elemente

$$\xi = n + im\sqrt{2} \in R, \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

zu $\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ gehören. $\xi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ ist gleichbedeutend mit $\xi \cdot 1 \in \Lambda$ und $\xi \cdot \frac{i\sqrt{2}}{3} \in \Lambda$, d.h. es müssen ganze Zahlen n_1, m_1, n_2, m_2 exitieren, so dass

$$\begin{aligned} \xi \cdot 1 &= n + im\sqrt{2} = n_1 + m_1 \cdot \tfrac{i\sqrt{2}}{3}, \\ \xi \cdot \tfrac{i\sqrt{2}}{3} &= n\tfrac{i\sqrt{2}}{3} - m \cdot \tfrac{2}{3} = n_2 + m_2 \cdot \tfrac{i\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Durch Trennung von Real- und Imaginärteil kommt man auf ein System von 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} n &= n_1, & m &= \tfrac{m_1}{3}, \\ n &= m_2, & -\tfrac{2m}{3} &= n_2. \end{aligned}$$

Dies besitzt genau dann ganzzahlige Lösungen $n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{Z}$, wenn m durch 3 teilbar ist. Also gilt

$$\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot 3i\sqrt{2} \subsetneq R.$$

Aufgabe 42

Welche der folgenden Gitter besitzen komplexe Multiplikation?

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &:= \mathbb{Z} \cdot (1+2i) + \mathbb{Z} \cdot (3+4i), \\ \Lambda_2 &:= \mathbb{Z} \cdot (1+2i) + \mathbb{Z} \cdot (3+i\sqrt{2}), \\ \Lambda_3 &:= \mathbb{Z} \cdot (1+2i) + \mathbb{Z} \cdot \sqrt{3+4i}. \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag

Vorbemerkung. Sind Λ und Λ' zwei äquivalente Gitter, d.h. $\Lambda' = \lambda \cdot \Lambda$ mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{C}^*$, so besitzt Λ genau dann komplexe Multiplikation, wenn das für Λ' der Fall ist.

Ein Gitter $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ist zu $\Lambda' := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{\omega_2}{\omega_1}$ äquivalent. Das Gitter $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, $(\tau \in \mathbb{C} \setminus R)$, besitzt genau dann komplexe Multiplikation, wenn τ eine quadratische Irrationalzahl ist, oder was dasselbe ist, wenn der Körper $\mathbb{Q}(\tau)$ eine Körper-Erweiterung von $\mathbb{Q}$ vom Grad 2 ist, d.h. $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\tau) = 2$.

Nun zur Untersuchung der gegebenen Gitter.

1) Λ_1 ist äquivalent zu $\Lambda_1' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_1$ mit

$$\tau_1 := \frac{3+4i}{1+2i} = \frac{1}{5}(3+4i)(1-2i) = \frac{1}{5}(11-2i).$$

Offensichtlich ist $\mathbb{Q}(\tau_1) = \mathbb{Q}(i)$, was ein imaginär-quadratischer Zahlkörper ist. Also besitzt Λ_1 komplexe Multiplikation.

2) Λ_2 ist äquivalent zu $\Lambda_2' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_2$ mit

$$\tau_2 := \frac{3+i\sqrt{2}}{1+2i} = \frac{1}{5}(3+i\sqrt{2})(1-2i) = \frac{1}{5}(3+2\sqrt{2}-6i+i\sqrt{2}).$$

Es gilt $\mathbb{Q}(\tau_2) = \mathbb{Q}(\xi)$ mit $\xi = 2\sqrt{2} - 6i + i\sqrt{2}$.

Behauptung. $\mathbb{Q}(\xi)$ ist kein quadratischer Zahlkörper.

Zum Beweis zeigen wir, dass ξ keiner quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}\xi^2 &= (2\sqrt{2}-6i+i\sqrt{2})^2 = 8 - 36 - 2 - 24i\sqrt{2} + 8i + 12\sqrt{2}\\ &= (-30+12\sqrt{2}) + i(8-24\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Falls ξ einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügte, wäre ξ^2 rationale Linearkombination von ξ und 1, d.h. $\xi^2 = c_1\xi + c_0$ mit $c_0, c_1 \in \mathbb{Q}$. Trennung in Real- und Imaginärteil ergibt:

$$\begin{aligned}-30 + 12\sqrt{2} &= c_1 \cdot 2\sqrt{2} + c_0,\\ 8 - 24\sqrt{2} &= c_1 \cdot (-6 + \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Da 1 und $\sqrt{2}$ über $\mathbb{Q}$ linear unbhängig sind, folgt aus der ersten Gleichung

$$c_0 = -30 \quad \text{und} \quad c_1 = 6.$$

Setzt man $c_1 = 6$ ind die zweite Gleichung ein, erhält man einen Widerspruch, da

$$8 - 24\sqrt{2} \neq 6 \cdot (-6 + \sqrt{2}).$$

Daher ist $\mathbb{Q}(\xi)$ kein quadratischer Zahlkörper, also hat Λ_2 keine komplexe Multiplikation.

3) Zur Berechnung der Quadratwurzel aus $3+4i$ machen wir den Ansatz

$$(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 3 + 4i, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dies wird gelöst durch $x = 2$, $y = 1$. Es gilt also

$$\Lambda_3 = \mathbb{Z} \cdot (1 + 2i) + \mathbb{Z} \cdot (2 + i).$$

Dass dieses Gitter komplexe Multiplikation besitzt, zeigt man wie für Λ_1.

Aufgabe 43

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\Lambda_1 \subset \Lambda$ ein Untergitter.
Man zeige: Es gibt eine ganze Zahl $n > 0$, so dass $n\Lambda \subset \Lambda_1$.

Lösungsvorschlag

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ und $\Lambda_1 = \mathbb{Z}\omega_1' + \mathbb{Z}\omega_2'$. Da $\Lambda_1 \subset \Lambda$, gibt es eine Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2, \mathbb{Z})$ mit $\det A \neq 0$, so dass

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Sei $A^{\#} := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Damit gilt $A^{\#}A = (\det A) \cdot E_2$, ($E_2$ zweireihige Einheits-Matrix). Es folgt

$$A^{\#} \begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{pmatrix} = A^{\#}A \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \det A \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$n\Lambda \subset \Lambda_1 \qquad \text{mit } n := |\det A| \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad \text{q.e.d.}$$

Aufgabe 44

Seien $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{C}$ drei Gitter mit

$$\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \Lambda_2.$$

Man beweise: Besitzt Λ komplexe Multiplikation, so auch Λ_1 und Λ_2.

Lösungsvorschlag

1) Nach Aufgabe 43 gibt es eine ganze Zahl $n \neq 0$ mit $n\Lambda \subset \Lambda_1$. Da Λ komplexe Multiplikation besitzt, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $\alpha\Lambda \subset \Lambda$. Insbesondere gilt

$$\alpha\Lambda_1 \subset \Lambda \quad \Longrightarrow \quad n\alpha\Lambda_1 \subset n\Lambda \subset \Lambda_1,$$

also ist $n\alpha$ ein kompexer Multiplikator für das Gitter Λ_1.

2) Nach Aufgabe 43 gibt es eine ganze Zahl $m \neq 0$ mit $m\Lambda_2 \subset \Lambda$ Da Λ komplexe Multiplikation besitzt, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit

$$\alpha\Lambda \subset \Lambda \subset \Lambda_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha m\Lambda_2 \subset \alpha\Lambda \subset \Lambda_2,$$

also ist $m\alpha$ ein kompexer Multiplikator für das Gitter Λ_2.
