Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2019/20
22. Jan. 2020

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 11

Aufgabe 41

Sei $\tau := \frac{i\sqrt{2}}{3}$ und $\Lambda := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Man berechne den Endomorphismenring $\mathrm{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ und zeige, dass er nicht die Maximalordnung in seinem Quotientenkörper ist.

Aufgabe 42

Welche der folgenden Gitter besitzen komplexe Multiplikation?

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &:= \mathbb{Z}\cdot(1+2i) + \mathbb{Z}\cdot(3+4i),\\ \Lambda_2 &:= \mathbb{Z}\cdot(1+2i) + \mathbb{Z}\cdot(3+i\sqrt{2}),\\ \Lambda_3 &:= \mathbb{Z}\cdot(1+2i) + \mathbb{Z}\cdot\sqrt{3+4i}.\end{aligned}$$

Bemerkung. Bei Λ_3 sei $\sqrt{3+4i}$ irgend eine der beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = 3+4i$; das definierte Gitter ist unabhängig von der Wahl der Wurzel.

Aufgabe 43

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\Lambda_1 \subset \Lambda$ ein Untergitter.
Man zeige: Es gibt eine ganze Zahl $n > 0$, so dass $n\Lambda \subset \Lambda_1$.

Aufgabe 44

Seien $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{C}$ drei Gitter mit

$$\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \Lambda_2.$$

Man beweise: Besitzt Λ komplexe Multiplikation, so auch Λ_1 und Λ_2.