Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2019/20
15. Jan. 2020

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 10

Aufgabe 37

a) Für die Eisensteinreihen G_{2k}, $(k \geqslant 2)$, zeige man

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k)\Big(1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n\Big), \qquad q = e^{2\pi i \tau},$$

vgl. Aufgabe 6.

b) Man bestimme Konstanten $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ so, dass die Modulform vom Gewicht 12

$$F(\tau) := G_{12}(\tau) - \lambda G_4(\tau)^3 - \mu G_6(\tau)^2$$

im Unendlichen von der Ordnung $\geqslant 2$ verschwindet, d.h. die Fourier-Entwicklung folgende Gestalt hat:

$$F(\tau) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n q^n, \quad c_n \in \mathbb{C}.$$

c) Mithilfe der Gewichtsformel schließe man, dass F identisch verschwindet, d.h.

$$G_{12}(\tau) = \lambda G_4(\tau)^3 + \mu G_6(\tau)^2.$$

Hinweis. Folgende Formeln für die Bernoulli-Zahlen B_{2k} dürfen ohne Beweis verwendet werden:

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}.$$

$2k$	2	4	6	8	10	12
B_{2k}	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$

Aufgabe 38

a) Für die absolute Modulfunktion zeige man

$$J(\tau) = \frac{20 G_4(\tau)^3}{20 G_4(\tau)^3 - 49 G_6(\tau)^2}.$$

b) Sei $\tau_0 \in \mathbb{H}$ eine (modulo Γ eindeutig bestimmte) Nullstelle der Eisensteinreihe $G_{12}(\tau)$. Man beweise:

$$J(\tau_0) = \frac{250}{691}.$$

Hinweis. Mittels Aufgabe 38c) drücke man die absolute Modulfunktion durch G_4 und G_{12} aus.

Aufgabe 39

a) Man zeige: $J(\tau)$ ist reell für $|\tau| = 1$. Die Funktion J bildet den Einheitskreisbogen von ρ nach i,

$$e^{it}, \quad 2\pi/3 \geqslant t \geqslant \pi/2,$$

bijektiv auf das Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ab.

b) Wählt man die Nullstelle τ_0 von $G_{12}(\tau)$ im Fundamentalbereich

$$\mathfrak{F}(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H} : |\operatorname{Re}(z)| \leqslant \tfrac{1}{2}, |z| \geqslant 1\},$$

so gilt $|\tau_0| = 1$.

Aufgabe 40

Sei $\tau := i\sqrt{5}$ und $\tau' = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{5})$.

a) Man zeige, dass die Gitter $\Lambda := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ und $\Lambda' := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau'$ nicht äquivalent sind.

b) Man berechne die Endomorphismenringe $\operatorname{End}(\mathbb{C}/\Lambda)$ und $\operatorname{End}(\mathbb{C}/\Lambda')$ und zeige, dass sie gleich sind.

c)* Sei $\Lambda_1 := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau_1$, $\tau_1 \in \mathbb{H}$, ein weiteres Gitter mit

$$\operatorname{End}(\mathbb{C}/\Lambda_1) = \operatorname{End}(\mathbb{C}/\Lambda).$$

Man beweise, dass Λ_1 äquivalent zu einem der Gitter Λ oder Λ' ist.