Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 9

Aufgabe 33

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter mit positiv orientierter Basis (ω_1, ω_2) und $\tau := \omega_2/\omega_1$. Wir definieren Gittervektoren ω'_1 und ω'_2 wie folgt:

Sei $\omega'_1 \in \Lambda \setminus \{0\}$ ein Vektor minimaler Länge (bzgl. des gewöhnlichen Absolutbetrags $|\omega'_1|$) und $\omega'_2 \in \Lambda \setminus \{0\}$ ein Vektor minimaler Länge unter den folgenden Nebenbedingungen:

- i) ω'_2 ist von ω'_1 reell linear unabhängig,
- ii) (ω'_1, ω'_2) ist positiv orientiert.

Man beweise: $\Lambda = \mathbb{Z}\omega'_1 + \mathbb{Z}\omega'_2$, und $\tau' := \omega'_2/\omega'_1$ ist zu τ äquivalent bzgl. der Modulgruppe $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ und liegt im Fundamentalbereich

$$\mathfrak{F}(\Gamma) := \{z \in \mathbb{H} : |\Re(z)| \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1\}.$$

Aufgabe 34

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Man zeige: Zu vorgegebenem $R > 0$ gibt es stets eine $\mathbb{Z}$ -Basis (ω_1, ω_2) von Λ (d.h. $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$) mit

$$|\omega_\nu| \geq R \quad \text{für } \nu = 1, 2.$$

Aufgabe 35

Es bezeichne $\mathfrak{K}(\Gamma)$ den Körper aller Modulformen vom Gewicht 0 und es sei $j \in \mathfrak{K}(\Gamma)$ die absolute Modulfunktion. Man beweise:

- a) Ist $f \in \mathfrak{K}(\Gamma)$ eine Funktion, die im Endlichen keine Pole hat, und ist $\text{ord}_\infty(f) = -n$, so gibt es ein Polynom $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad n mit $f = P(j)$.
- b) Jede Funktion $f \in \mathfrak{K}(\Gamma)$ lässt sich als rationale Funktion der absoluten Modulfunktion darstellen, d.h. es gibt eine rationale Funktion $R(X) \in \mathbb{C}(X)$ mit $f = R(j)$.

Aufgabe 36 (Fortsetzung von Aufgabe 35)

Man beweise: Jede Modulfunktion $f \in \mathfrak{K}(\Gamma)$ lässt sich für ein geeignetes k als Quotient zweier Modulformen vom Gewicht $2k$ darstellen.