Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. O. Forster

WS 2019/20
18. Dez. 2019

Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven

Übungsblatt 8

Aufgabe 29

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter mit $\Lambda \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$ und $\overline{\Lambda} = \Lambda$. Dabei ist

$$\overline{\Lambda} := \{\overline{\omega} : \omega \in \Lambda\}$$

das zu Λ konjugiert komplexe Gitter. Man zeige:

a) Es gibt eine reelle Zahl $t > 0$, so dass Λ eines der folgenden Gitter ist.

i) $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}it$ (Rechtecks-Gitter),

ii) $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\frac{1}{2} + it)$ (rhombisches Gitter).

b) Der Wert der Eisensteinreihe $G_{2k}(\Lambda)$ ist reell für alle $k \geqslant 2$.

Aufgabe 30

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und seien $P_1, P_2 \in \mathbb{C}/\Lambda$ zwei verschiedene Punkte. Man zeige:

Es gibt stets einen Punkt $Q \in \mathbb{C}/\Lambda$ und eine bzgl. Λ doppelt-periodische meromorphe Funktion, die modulo Λ genau in P_1, P_2 Nullstellen 1. Ordnung und in Q einen Pol 2. Ordnung hat. Für den Punkt Q gibt es vier verschiedene Möglichkeiten.

Aufgabe 31

Für eine ganze Zahl $k \geqslant 0$ sei

$$A(k) := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : 2\alpha + 3\beta = k\}.$$

Man beweise: Die Modulformen vom Gewicht $2k$,

$$F_{\alpha,\beta} := g_2^\alpha g_3^\beta, \qquad (\alpha, \beta) \in A(k),$$

sind $\mathbb{C}$-linear unabhängig.

Hinweis. Man benutze $g_2(i) \neq 0$, $g_2(\rho) = 0$, $g_3(i) = 0$, $g_3(\rho) \neq 0$, $(\rho = e^{2\pi i/3})$.

Aufgabe 32

Es bezeichne $\mathfrak{K}(\Gamma)$ den Körper aller Modulfunktionen vom Gewicht 0.

Man zeige: Der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ aller Modulfunktionen vom Gewicht $2k$ ist in natürlicher Weise sogar ein Vektorraum über dem Körper $\mathfrak{K}(\Gamma)$. Was ist die Dimension von $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ über $\mathfrak{K}(\Gamma)$?
